

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Экспоненциальная параметризация матрицы смешивания нейтрино как элемент группы $SU(3)$ и учет новых экспериментальных данных

К. В. Жуковский

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru*

Статья поступила 22.09.2016, подписана в печать 28.09.2016

Экспоненциальная форма матрицы смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты для нейтрино рассматривается в контексте фундаментального представления группы $SU(3)$. Находится логарифм матрицы смешивания. С последними экспериментальными данными о смешивании нейтрино вычисляются точные значения каждого из параметров экспоненциальной матрицы смешивания нейтрино. Установлены значения элементов ее действительной и мнимой частей, отвечающих за смешивания без CP-нарушения и за CP-нарушение соответственно. Подтверждается гипотеза дополнительности смешивания кварков и нейтрино. Показана факторизация экспоненциальной матрицы смешивания, которая позволяет разделить вклады смешивания без CP-нарушения и само CP-нарушение в виде произведения вращений вокруг действительной и мнимой осей.

Ключевые слова: нейтрино, смешивание, PMNS-матрица, CP-нарушение, экспоненциальная параметризация, группа.

УДК: 53.01, 539.123. PACS: 14.60.Pq, 12.15.Ff, 02.20.-a.

Введение

В Стандартной модели электрослабых взаимодействий [1–3] важную роль играют нейтрино. Изначально масса нейтрино в рамках Стандартной модели полагалась равной нулю, но в связи с обнаружением у нейтрино отличной от нуля массы в нее были внесены изменения. Существуют по меньшей мере три массовых состояния нейтрино ν_1, ν_2, ν_3 , соответствующие полному ортонормированному базису трех флейворных нейтринных состояний ν_e, ν_μ, ν_τ , которые и взаимодействуют с тремя заряженными лептонами e, μ, τ обменом калибровочными бозонами W^+, W^- и Z . При этом во взаимодействии участвуют смешанные состояния, предсказанные ранее Б. Понтекорво [8, 9]. Физика нейтрино в последнее время привлекает значительное внимание ученых. В 2015 г. Нобелевская премия по физике была присуждена за открытие нейтринных осцилляций, подтвердивших явление смешивания нейтрино. В процессе распространения нейтрино происходит изменение их флейвора, установленное в экспериментах и наблюдениях по смешиванию атмосферных [6], солнечных [4, 5] и реакторных нейтрино [7]. Для описания перехода из базиса массовых состояний нейтрино в базис флейворных состояний и обратно используется унитарная матрица смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты (PMNS) U_{PMNS} [10]

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,2,3} U_{PMNS \alpha i}^* |\nu_i\rangle, \tag{1}$$

$$U_{PMNS \alpha i} \equiv \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle, \quad \alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3,$$

построенная аналогично матрице смешивания Кабиббо–Кобаяси–Маскавы (СКМ) в кварковом секторе. С ее помощью флейворные состояния нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ записываются в виде линейной комбинации массовых состояний нейтрино ν_1, ν_2, ν_3 (1), так что в совместном рождении лептона типа α и соответствующего нейтрино ν_α заряженным W -бозоном задействованы все массовые состояния нейтрино. Для трех поколений без участия стерильного нейтрино [11–13], которое не взаимодействует с W - и Z -бозонами, унитарная матрица смешивания 3×3 имеет следующий вид:

$$U_{PMNS} = U_{st} P_{Mjr}, \tag{2}$$

где стандартный вид матрицы смешивания U_{st} для нейтрино

$$U_{st} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \nu_\alpha \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{3}$$

определяется четырьмя параметрами: тремя углами смешивания $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ в виде $c_{ij} = \cos \theta_{ij}, s_{ij} = \sin \theta_{ij}, i, j=1,2,3$, и фазой δ_{CP} , описывающей CP-нарушение [14]. Возможную майорановскую природу нейтрино, т. е. когда они совпадают со своими античастицами, описывает диагональная матрица $P_{Mjr} = \text{diag}(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1)$. Для майорановских частиц фазы α_1 и α_2 не равны нулю: $\alpha_{1,2} \neq 0$;

они играют роль в процессах с нарушением лептонного числа. Матрица U_{st} стандартной параметризации (3) для нейтрино играет ту же роль, что и матрица СКМ для кварков [14–18]. В отличие от кваркового сектора, где непосредственно определяются значения элементов матрицы смешивания экспериментальным измерением амплитуд соответствующих процессов, в лептонном секторе определяются углы смешивания на основе прямых или косвенных наблюдений и измерений. Смешивание для нейтрино значительно сильнее, чем для кварков, и соответствующие углы смешивания θ_{12} и θ_{23} велики, так что нельзя провести разложение по малому параметру: $\lambda = \sin \theta_{Cabibbo} \approx 0.22$ — синусу угла Кабиббо [19], как в случае кварков. Значения майорановских фаз на настоящий момент неизвестны. Их учет с помощью экспоненциальной параметризации был произведен, например, в [20], однако это не внесло ясности в общую картину, которая и без того достаточно сложна ввиду больших значений углов смешивания и особенно из-за сильного CP-нарушения в лептонном секторе Стандартной модели. В дальнейшем мы будем рассматривать дираковские нейтрино.

1. Экспоненциальная параметризация матрицы смешивания

Наряду со стандартной параметризацией матрицы смешивания (3), для описания смешивания хорошо подходит матричная экспонента, которая дает по аналогии с матрицей для смешивания кварков [21–23]

$$U_{\text{exp}} = \exp A. \quad (4)$$

При этом возникает вопрос о соответствии элементов матриц A и U_{st} . Для перехода от (4) к (3) можно воспользоваться чисто алгебраическим методом, основанном на применении теоремы Кэли–Гамильтона [24]. В частности, можно получить точное выражение для элементов матрицы смешивания в виде матричного полинома второго порядка по A :

$$e^{\hat{A}} = a_0 I + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2, \quad (5)$$

где коэффициенты a_n определяются довольно громоздкими, но чисто алгебраическими вычислениями (см. выражения в [23]). Мы их не приводим для краткости, но они вполне приемлемы для вычисления соответствующих численных значений. Альтернативный метод основан на использовании фундаментального представления группы $SU(3)$, которой принадлежит матрица смешивания (3). Недавно в [25] было проделано исследование некоторых результатов для фундаментального представления $SU(3)$. В частности, было показано, что элемент фундаментального представления $SU(3)$ всегда может быть выражен через полином второго порядка эрмитовой матрицы — генератора H с коэффициентами из элементарных тригонометрических функций, зависящих от единственного инварианта $\det(H)$

и параметра группы. Опуская детали, используем основной результат [25], а именно то, что для любого элемента группы $SU(3)$, сгенерированного эрмитовой матрицей H размерности 3×3 , след которой равен нулю, справедливо следующее соотношение [25]:

$$\exp[i\theta H] = \sum_{k=0,1,2} \left[H^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} H \sin(\phi + 2\pi k/3) - \frac{1}{3} I (1 + 2 \cos(2(\phi + 2\pi k/3))) \right] \times \exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}} i\theta \sin(\phi + 2\pi k/3)\right) \times \frac{1}{1 - 2 \cos(2(\phi + 2\pi k/3))}, \quad (6)$$

с нормировкой

$$\text{tr}[H^2] = 2, \quad (7)$$

дающей масштаб для θ . Таким образом, H — элемент группы $SU(3)$ — записывается как матричный полином второй степени и зависит от угла вращения группы θ и единственного инварианта $\det(H)$, который можно переобозначить в терминах другого угла (см. [25]):

$$\phi = \frac{1}{3} \left(\arccos\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\det(H)\right) - \frac{\pi}{2} \right). \quad (8)$$

Отметим также, что с помощью преобразований Лапласа формула (6) может быть также записана в виде следующего дифференциального уравнения [25]:

$$\exp[i\theta H] = \left(H^2 - iH \frac{d}{d\theta} - I \left(1 + \frac{d^2}{d^2\theta} \right) \right) \times \sum_{k=0,1,2} \frac{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}} i\theta \sin(\phi + 2\pi k/3)\right)}{1 - 2 \cos(2(\phi + 2\pi k/3))}, \quad (9)$$

для решения которого можно использовать операторный метод [26–32]. Теперь используем приведенные выше результаты непосредственно для нашей задачи. Выделим в экспоненциальной параметризации матрицы смешивания $U_{\text{exp}} = \exp A$ (4) множитель $i\theta$ так, чтобы привести (4) в соответствие с левой частью уравнения (6). Тогда с учетом обычной нормировки (7) получаем в нашем случае для параметра θ следующее простое выражение:

$$\theta = \left(-\text{tr} \left[\frac{A^2}{2} \right] \right)^{1/2}, \quad (10)$$

определяющее по существу угол поворота в группе $SU(3)$. Теперь для матрицы смешивания как для элемента фундаментального представления группы с помощью формулы (6) получаем матричный полином второго порядка эрмитового генератора H с коэффициентами (8) из элементарных тригонометрических функций единственного инварианта $\det(H)$.

Рассмотрим теперь обратную задачу, а именно найдем матрицу A показателя экспоненты (4) по имеющейся матрице смешивания U . По существу, нам нужно найти логарифм матрицы смешивания U . Можно вычислить интегральное представление логарифма матрицы по схеме, разработанной в [33].

Опуская детали теорем и доказательств, касающихся существования матричного логарифма, приведем результат для матрицы \hat{A} (см. [33]):

$$\hat{A} = \ln \hat{U} = \int_0^1 \left[e^{i\theta} \hat{U} - I \right] \left[(1-t)I + t e^{i\theta} \hat{U} \right]^{-1} dt - i\theta I, \quad (11)$$

которая есть логарифм квадратной матрицы \hat{U} , т.е., естественно, $\hat{U} = \exp \hat{A}$. Угол θ произволен, но таков, что $e^{i\theta} \hat{U}$ не имеет сингулярностей на $(-\infty, 0]$. Решение (11) уравнения $\hat{U} = \exp \hat{A}$ есть аналитическая матричная функция, и оно коммутирует с любой матрицей, которая коммутирует с A . Более того, любое решение, которое коммутирует с A , отличается от (11) на логарифм единичной матрицы $I = \exp \hat{A}$. Применим развитый в [33] формализм к нашему случаю и положим для простоты $\theta = 0$, что дает следующее выражение для показателя экспоненциальной матрицы смешивания:

$$\hat{A} = \ln \hat{U} = \int_0^1 \left[\hat{U} - I \right] \left[t(\hat{U} - I) + I \right]^{-1} dt. \quad (12)$$

Формула (12) применима к описанию любого смешивания с произвольным нарушением CP, что мы и используем в следующих разделах.

2. Смешивание без учета CP-нарушения

В случае смешивания без нарушения CP в экспоненциальном представлении получаем чистое вращение в трехмерном пространстве; для элемента $SU(3)$ имеем $\det H = \phi = 0$ и общая формула (6) сводится к известному случаю Родригеса для вращений $SO(3) \subset SU(3)$ вокруг действительной оси n :

$$\exp[i\theta H]_{\phi=0} = I + iH \sin \theta + H^2(\cos \theta - 1). \quad (13)$$

Экспоненциальная матрица смешивания A в этом случае представляет генератор вращения вокруг фиксированной оси n группы $SO(3)$ [22], которая совпадает с вектором $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$:

$$\begin{aligned} R = e^{A_{\text{rot}}} &= \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \exp \left[\Phi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Элементы R_{ij} матрицы вращения (14) могут быть определены из следующего тензорного выражения (см. [41]):

$$R_{ij} = (1 - \cos \Phi) n_i n_j + \delta_{ij} \cos \Phi - \varepsilon_{ijk} n_k \sin \Phi, \quad i, j, k = x, y, z, \quad (15)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, ε_{ijk} — символ Леви-Чивиты. Координаты вектора \mathbf{n}

$$n_x = \frac{\nu}{\Phi}, \quad n_y = \frac{\mu}{\Phi}, \quad n_z = -\frac{\lambda}{\Phi} \quad (16)$$

и угол поворота в пространстве

$$\Phi = \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \quad (17)$$

представлены в терминах параметров μ, ν, λ матрицы вращения A_{rot} (14).

Экспериментально определенные значения углов смешивания для нейтрино в стандартной параметризации (3) на настоящий момент (май 2016 г.) [34, 35] составляют (best fit):

$$\theta_{12} \cong 33.72^\circ, \quad \theta_{23} \cong 49.3^\circ, \quad \theta_{13} \cong 8.47^\circ. \quad (18)$$

Отметим, что в трибимаксимальной параметризации, которая до недавнего времени хорошо описывала экспериментальные данные, $\theta_{13} = 0$, $\delta_{\text{CP}} = 0$ и $\theta_{12} = \arctg(1/\sqrt{2}) \cong 35.25^\circ$, $\theta_{23} = \pi/4 = 45^\circ$. Однако последние данные (18) показывают, что $\theta_{13} \neq 0$ (см. [35]). С помощью представления (14) вращения вокруг выделенной оси (16) в трехмерном пространстве на угол (17) координаты вектора и угол поворота для трибимаксимальной параметризации (ТБМ) таковы:

$$\mathbf{n}_{\text{ТБМ}} = (0.7858, 0.2235, 0.5777), \quad \Phi_{\text{ТБМ}} \cong 56.6^\circ, \quad (19)$$

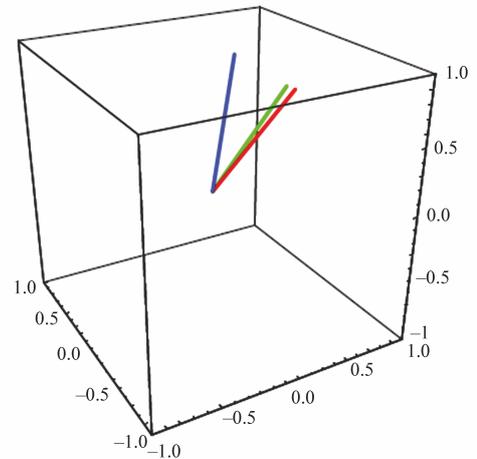
на основании данных PDG 2014 имеем

$$\mathbf{n}_{\nu 2014} = (0.7021, 0.3936, 0.5934), \quad \Phi_{\nu 2014} \cong 49.8^\circ \quad (20)$$

и по последним имеющимся данным [35] на май 2016 г.:

$$\mathbf{n}_{\nu 2016} = (0.8142, 0.1100, 0.5701), \quad \Phi_{\nu 2016} \cong 61.7^\circ. \quad (21)$$

Сравнение координат вектора и угла вращения в (19), (20), (21) друг с другом показывает, что они довольно сильно отличаются от года в год, особенно компонента вектора n_y ; угол поворота также меняется на $\approx 20\%$. Однако сравнение направления



Оси вращения в пространстве для смешивания кварков (синяя), нейтрино по данным мая 2016 г. (красная) и нейтрино в ТБМ-параметризации (зеленая)

вектора вращения для нейтрино (при отсутствии CP-нарушения) с направлением аналогичного вектора вращения для кварков в рамках той же экспоненциальной параметризации [21, 22] показывает, что угол между вектором для кварков \mathbf{n}_q и вектором для нейтрино \mathbf{n}_ν составляет 43.6° для TBM, 44.5° для PDG 2014 и 45.8° для данных на май 2016 г. (рисунок).

Таким образом, наблюдается поразительная стабильность величины угла между \mathbf{n}_q и \mathbf{n}_ν с высокой точностью равного $\approx 45^\circ$ при сильном разбросе данных по нейтрино.

3. Учет CP-нарушения в экспоненциальной параметризации

В качестве матрицы A в (4) обычно выбиралась следующая матрица $A = A_0$ [20]:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 e^{i\delta} \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_3 e^{-i\delta} & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где фаза δ , вообще говоря, не совпадает с δ_{CP} . Такая экспоненциальная матрица смешивания для нейтрино была предложена в [36], и она хорошо описывает смешивание при слабом CP-нарушении. Использование экспоненциальной параметризации позволяет выделить вращение, CP-нарушение и майорановскую часть отдельными множителями в новой унитарной параметризации [20]:

$$V = P_{\text{tot}} P_{CP} P_{Mj}, \quad (23)$$

где $P_{\text{tot}} = R$ задано в (14), а CP-нарушение описано матрицей

$$P_{CP} = \exp(A_{CP}). \quad (24)$$

Тогда для матрицы A_0 (22) имеем CP-нарушающую часть $P_{CP} = \tilde{P}_{CP0}$:

$$\tilde{P}_{CP0} = e^{\tilde{A}_{CP0}}, \quad (25)$$

$$\tilde{A}_{CP0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu(-1 + e^{i\delta}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu(1 - e^{-i\delta}) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а майорановская часть зависит от соответствующих фаз:

$$P_{Mjr} = e^{A_{Mjr}}, \quad A_{Mjr} = i \begin{pmatrix} \alpha_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Экспоненциальная параметризация (4) матрицы смешивания нейтрино с учетом CP-нарушения посредством минимального комплексного расширения (22) и ее факторизация (23) в виде произведения матрицы вращения (14) и \tilde{A}_{CP0} описывают экспериментальные данные только при малых углах CP-нарушения. Для больших значений фазы δ ее учет с помощью (22), проведенный, например, в [39] для

$\delta = -60^\circ$, дает лишь удовлетворительные результаты для абсолютных величин элементов PMNS матрицы; комплексная составляющая появляется у других, по сравнению со стандартной параметризацией (3), элементов. Более того, не очевидно, какие значения нужно выбирать для CP-нарушающей фазы δ в экспоненциальной параметризации, так как экспериментальные оценки CP-нарушения проведены для фазы δ_{CP} в другой параметризации. Качественное соответствие фаз δ и δ_{CP} , установленное в [39] на основании того, что вклад комплексной составляющей максимален при $\delta_{CP} = \delta = \pi/2 \pm \pi n$, а при $\delta_{CP} = \delta = \pm 2\pi n$ CP-нарушающая матрица становится единичной и CP-нарушение исчезает, логично, но не есть доказательство того, что эти фазы равны: $\delta = \delta_{CP}$. Для точного описания экспериментальных данных в качестве матрицы A лучше использовать следующую более общую матрицу A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1(\delta_{CP}) & \lambda_3(\delta_{CP}) \\ -\lambda_1^*(\delta_{CP}) & 0 & \lambda_2(\delta_{CP}) \\ -\lambda_3^*(\delta_{CP}) & -\lambda_2^*(\delta_{CP}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где все матричные элементы λ_i комплексны. Унитарность матрицы смешивания $U_{\text{exp}} = \exp A_1$ обеспечивается антиэрмитовой формой матрицы A_1 (28).

С использованием формулы (6) можно сравнить матричные элементы стандартной параметризации (3) и результат разложения (5) экспоненциальной параметризации (4) в полином второй степени A . Решение составленной в результате системы уравнений дает точные аналитические выражения для $A_{i,j}$ как функций θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} и δ_{CP} , но они чрезвычайно громоздки и не проясняют суть дела. Произведем численный расчет с имеющимися данными по смешиванию нейтрино и CP-нарушению [34, 35] (best fit, май 2016 г.). Исходя из данных (18) на май 2016 г. и $\delta_{CP} \cong 272^\circ$ [34, 35, 38], получаем следующие численные значения матричных элементов для смешивания нейтрино (3):

$$U_{\text{best fit}} = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.005 + 0.147i \\ -0.365 + 0.093i & 0.540 + 0.062i & 0.750 \\ 0.418 + 0.080i & -0.632 + 0.053i & 0.645 \end{pmatrix} \quad (29)$$

и их абсолютные величины

$$|U_{\text{best fit}}| = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.147 \\ 0.374 & 0.546 & 0.750 \\ 0.428 & 0.633 & 0.645 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Используя то, что матрица смешивания принадлежит фундаментальному представлению группы $SU(3)$, вычислим логарифм (29) по формуле (12)

и получим следующее значение матричных элементов экспоненциальной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -0.0253632i & 0.551703 + 0.0557619i & -0.249131 + 0.136429i \\ -0.551703 + 0.0557619i & 0.0502214i & 0.834211 + 0.0319945i \\ 0.249131 + 0.136429i & -0.834211 + 0.0319945i & -0.0248583i \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Тогда экспоненциальная параметризация (4) с (31) точно воспроизводит экспериментально обоснованные данные (best fit 2016) (29): $U_{\text{best fit}} = e^A$.

Несмотря на наличие малых по величине диагональных элементов в матрице (31), ее след точно равен нулю: $\text{Tr}[A] = 0$, что необходимо для сохранения унитарности матрицы смешивания. Отметим, что мнимые угловые элементы (1, 1) и (3, 3) почти точно равны друг другу: $\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2$, $\alpha_2 = 0.0502214$. Мнимая диагональ матрицы A (31)

$$A_{\text{diag Im}} = i \text{diag} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad (32)$$

внешне напоминает вклад для майорановских частиц, но он происходит от CP-нарушения. Соответствующие фазы очень малы $|\alpha_i| \approx 10^{-2}$. Отметим, что все элементы матрицы A (31), точно воспроизводящей экспериментальные данные, комплексны и точный учет CP-нарушения невозможно произвести простейшей матрицей (26), как предлагалось ранее в [20, 39]. Полученные в [20, 39] результаты с комплексным расширением только в двух угловых элементах (1, 3) и (3, 1) могут рассматриваться только как первое приближение. Экспоненциальная матрица смешивания с анзацем $\tilde{A}_{\text{CP}0}$ (26) годится для описания небольшого CP-нарушения и неудовлетворительно описывает данные по смешиванию на май 2016 г. (29); этот результат мы даже не приводим.

Факторизация (23) экспоненциальной матрицы смешивания (4) может быть осуществлена путем разделения действительной и мнимой частей A :

$$A_{\text{rot}} = \text{Re}[A] \quad \text{и} \quad A_{\text{CP}} = i \text{Im}[A]. \quad (33)$$

Точно описывающая смешивание при любом CP-нарушении матрица A (31) представима в виде суммы действительной и мнимой частей (33):

$$A = A_{\text{rot}} + A_{\text{CP}} = A_{\text{rot}} + A_{\text{CP}1} + A_{\text{diag Im}}, \quad (34)$$

где за смешивание без CP-нарушения и за трехмерное вращение отвечает действительная матрица

$$A_{\text{rot}} = \text{Re}[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0.551703 & -0.249131 \\ -0.551703 & 0 & 0.834211 \\ 0.249131 & -0.834211 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

а за основной вклад от CP-нарушения и за вращение вокруг чисто мнимой оси отвечает мнимая матрица

$$A_{\text{CP}1} = i \text{Im}[A - A_{\text{diag Im}}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.0557619i & 0.136429i \\ 0.0557619i & 0 & 0.0319945i \\ 0.136429i & 0.0319945i & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Их сумма дает предложенный нами анзац A_1 (28) с комплексными параметрами λ_i . Для $\delta_{\text{CP}} = 272^\circ$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.554514 \times e^{i5.7^\circ} & 0.284041 \times e^{i151.3^\circ} \\ -0.554514 \times e^{-i5.7^\circ} & 0 & 0.834825 \times e^{i2.2^\circ} \\ -0.284041 \times e^{-i151.3^\circ} & -0.834825 \times e^{-i2.2^\circ} & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Очевидно, что основное CP-нарушение содержится в матричных элементах (1, 3) и (3, 1). Малая диагональная поправка $A_{\text{diag Im}}$ задана формулой (32). Естественно, экспоненциальная параметризация (4) с учетом (31) дает в точности результат (29): $\exp[A_{\text{rot}} + A_{\text{CP}1} + A_{\text{diag Im}}] = U_{\text{best fit}}$. Пренебрегая малым вкладом $A_{\text{diag Im}}$ с анзацем (28) $A_1 = A_{\text{rot}} + A_{\text{CP}1}$ в экспоненциальной параметризации (4), получаем следующие величины элементов матрицы смешивания:

$$|U_1| = |\exp[A_1]| = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.550 & 0.141 \\ 0.378 & 0.542 & 0.751 \\ 0.424 & 0.635 & 0.646 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

которые хорошо согласуются с экспериментально обоснованными значениями (30).

Таким образом, предложенный нами анзац (28), в отличие от ранее использовавшейся в [20, 39] матрицы (26) для экспоненциальной параметризации (4), хорошо описывает смешивание даже с $\delta_{\text{CP}} = 270^\circ$, при котором CP-нарушение максимально, а вклад мнимой диагонали (32) $A_{\text{diag Im}}$ дает малую поправку.

Получим теперь результат для экспоненциальной параметризации матрицы смешивания нейтрино с учетом CP-нарушения простейшим комплексным расширением (22) только двух матричных элементов (1, 3) и (3, 1). Тогда из (37) получаем численные значения для (22) в виде

$$A_0 \cong \begin{pmatrix} 0 & 0.552 & 0.284e^{i150^\circ} \\ -0.552 & 0 & 0.834 \\ -0.284e^{-i150^\circ} & -0.834 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Значение CP-нарушающей фазы в экспоненциальной параметризации составляет $\delta \cong 150^\circ$, что соответствует $\delta_{\text{CP}} \cong 270^\circ$ в стандартной параметризации. В результате получаем для значения величин элементов матрицы смешивания

$$|U_0| = |\exp[A_0]| = \begin{pmatrix} 0.824 & 0.555 & \mathbf{0.112} \\ 0.366 & 0.543 & 0.755 \\ 0.431 & 0.630 & 0.646 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

которые хорошо согласуются с экспериментальными данными best fit 2016 (30), кроме матричного элемента (1, 3), который несколько меньше, чем в $|U_{\text{best fit}}|$ (ср. (30)). Факторизация (33) с разделением действительной и мнимой частей в A_0 и в A_1 дает абсолютные значения элементов матрицы смешивания, которые очень близки к значениям в (40) и в (37) соответственно. Для краткости мы не повторяем эти формулы, отличающиеся в третьем порядке.

Таким образом, мы продемонстрировали несколько экспоненциальных параметризаций матрицы смешивания нейтрино с учетом сколь угодно большого CP-нарушения, которые обеспечивают хорошее и даже полное согласие с экспериментом.

Выводы

Экспоненциальная параметризация матрицы смешивания используется для анализа последних данных по смешиванию нейтрино (май 2016 г.) с учетом CP-нарушения. С помощью теоремы Кэли–Гамильтона экспоненциальная матрица $U = \exp(A)$ смешивания записывается как матричный полином A второй степени. Рассматривая матрицу смешивания как элемент группы $SU(3)$, мы решили обратную задачу, что позволило получить выражение для логарифма матрицы смешивания U . Это дает точные значения показателя A матричной экспоненты для данной унитарной PMNS-матрицы с CP-нарушением и решает задачу о нахождении экспоненциальной матрицы смешивания, точно воспроизводящей смешивание нейтрино с произвольным CP-нарушением.

С помощью экспоненциальной параметризации проанализированы данные о смешивании нейтрино из Particle Data Group 2014 и последние данные на май 2016 г. Без учета CP-нарушения смешивание представляет собой поворот в действительном трехмерном пространстве вокруг фиксированной оси. Элементы экспоненциальной матрицы являются координатами вектора \mathbf{n} этого вращения, факторизованные углом поворота Φ . Получены соответствующие векторы и углы поворота для трибимаксимальной параметризации и для данных PDG 2014, май 2016 г.: $\mathbf{n}_{\text{TBM}} = (0.7858, 0.2235, 0.5777)$, $\Phi_{\text{TBM}} \cong 56.6^\circ$, $\mathbf{n}_{\nu 2014} = (0.7021, 0.3936, 0.5934)$, $\Phi_{\nu 2014} \cong 49.8^\circ$, $\mathbf{n}_{\nu 2016} = (0.8142, 0.110, 0.5701)$, $\Phi_{\nu 2016} \cong 61.7^\circ$. Несмотря на значительный разброс величин углов поворота: от 50 до 62° и координат (например, $n_y \in [0.11, 0.39]$), направления векторов вращения \mathbf{n}_ν для нейтрино и \mathbf{n}_q для кварков во всех случаях составляют угол, очень близкий к 45° , и это подтверждает гипотезу дополненности кварков и нейтрино [42, 43].

Получены значения элементов экспоненциальной матрицы смешивания для нейтрино, точно описывающие экспериментальные данные с учетом CP-нарушения. Эта экспоненциальная матрица смешивания

$e^{A_{\text{rot}} + A_{\text{CP1}} + A_{\text{diag Im}}}$ обобщает ранее использовавшуюся (см. [20, 39]) матрицу $e^{A_{\text{rot}} + \tilde{A}_{\text{CP0}}}$ на случай произвольного CP-нарушения. Проведено разделение действительной и мнимой компонент матрицы, которые в матричной экспоненте представляют вращение в действительном и мнимом пространстве, и выделен малый вклад мнимой диагонали $A_{\text{diag Im}}$ матрицы A . Таким образом, экспоненциальная параметризация позволила выделить вклад смешивания без CP-нарушения в виде действительного вращения и основной вклад CP-нарушения в виде чисто мнимого вращения, а также диагональные мнимые составляющие как малые поправки за счет CP-нарушения.

Получено соответствие между экспериментально определенной CP-нарушающей фазой $\delta_{\text{CP}} = 272^\circ$ в стандартной параметризации и CP-нарушающей фазой в A_0 в экспоненциальной параметризации матрицы смешивания: $\delta = 151^\circ$; A_0 является основным вкладом CP-нарушения. Учет CP-нарушения посредством A_0 дает матрицу U_{PMNS} , хорошо соответствующую экспериментальным данным, кроме элемента (1, 3), который оказывается несколько занижен. Учет CP-нарушения матрицей A_{CP1} очень хорошо описывает CP-нарушение и представляет вращение в чисто мнимом пространстве. Мнимые диагональные элементы матрицы A : $A_{\text{diag Im}} = i \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = -0.0253632$, $\alpha_2 = 0.0502214$, $\alpha_3 = -0.0248583$, напоминают вклад от майорановских частиц, но происходят из-за CP-нарушения. Интересно, что $\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2$. Учет всех слагаемых в экспоненте: $A_{\text{rot}} + A_{\text{CP1}} + A_{\text{diag Im}}$ дает полное согласие с экспериментальными данными. Ранее использованный анзац \tilde{A}_{CP0} является лишь первым приближением и не годится при сильном CP-нарушении. Новый анзац A_{CP1} и соответствующая экспоненциальная матрица $U = \exp(A_1)$ пригодны для любого значения CP-нарушающей фазы.

Анализ экспериментальных данных с помощью экспоненциальной матрицы смешивания, его результаты и интерпретации могут быть полезны при обработке экспериментальных данных по осцилляциям нейтрино, а также при планировании новых экспериментов в будущем.

Автор благодарит профессора А.В. Борисова за полезное обсуждение полученных результатов и за предложенный способ вычисления логарифма матрицы.

Список литературы

1. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett, 1967. **19**. P. 1264.
2. Salam A. Elementary Particle Theory / Ed. by N. Svartholm. Almqvist Forlag AB, 1968.
3. Glashow S.L. // Nucl. Phys. 1961. **22**. P. 579.
4. Smy M.B. et al. (Super-Kamiokande Collaboration) // Phys. Rev. D. 2004. **69**. P. 011104.
5. Ataki T. et al. (KamLAND Collaboration) // Phys. Rev. Lett. 2005. **94**. P. 081801.

6. Ashie Y. et al. (Super-Kamiokande Collaboration) // Phys. Rev. D. 2005. **71**. P. 112005.
7. Apollonio M. et al. (CHOOZ Collaboration) // Eur. Phys. J. C. 2003. **27**. P. 331.
8. Понтекорво Б. // ЖЭТФ. 1957. **33**. С. 549.
9. Понтекорво Б. // УФН. 1968. **95**, № 7. С. 517.
10. Maki Z., Nakagawa M., Sakata S. // Prog. Theor. Phys. 1962. **28**. P. 870.
11. Murayama H., Yanagida T. // Phys. Lett. B. 2001. **520**. P. 263.
12. Barenboim G, Lykken J. // Phys. Lett. B. 2003. **554**, N 1. P. 73.
13. Gonzalez-Garcia M.C., Maltoni M., Schwetz T. // Phys. Rev. D. 2003. **68**. P. 053007.
14. Olive K.A. et al. (Particle Data Group) // Chin. Phys. C. 2014. **38**. P. 090001.
15. Chau L.-L., Keung W.-Y. // Phys. Rev. Lett. 1984. **53**. P. 1802.
16. Harari H., Leurer M. // Phys. Lett. B. 1986. **181**. P. 123.
17. Fritzsche H., Plankl J. // Phys. Rev. D. 1987. **35**. P. 1732.
18. Botella F.J., Chao L.-L. // Phys. Lett. B. 1986. **168**. P. 97.
19. Wolfenstein L. // Phys. Rev. Lett. 1983. **51**. P. 1945.
20. Datoli G., Zhukovsky K.V. // Eur. Phys. J. C. 2008. **55**. P. 547.
21. Datoli G., Zhukovsky K.V. // Eur. Phys. J. 2007. **50**. P. 817.
22. Datoli G., Zhukovsky K.V. // Eur. Phys. J. 2007. **52**, N 3. P. 591.
23. Жуковский К.В., Даттоли Д. // ЯФ. 2008. **71**, № 10. С. 1838. (Datoli G., Zhukovsky K.V. // Phys. Atom. Nucl. 2008. **71**, N10. P. 1807.)
24. Ayres F., Jr. Theory and Problems of Matrices. — Schaum's Outline Series. N. Y.: Schaum Publishing Co., 1962.
25. Curtright T.L., Zachos C.K. // Rep. Math. Anal. Appl. 2015. **76**, N 3. P. 401.
26. Zhukovsky K. // J. Math. Anal. Appl. 2017. **446**, N 1. P. 628.
27. Жуковский К.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 3. P. 18. (Zhukovsky K.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2016. **71**, N 3. P. 237.)
28. Zhukovsky K.V. // Springer Plus. 2016. **5**. P. 119.
29. Zhukovsky K.V. // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. **96**. P. 132.
30. Zhukovsky K.V., Srivastava H.M. // Appl. Math. Comp. 2017. **293**. P. 423.
31. Жуковский К.В. // Теор. мат. физ. 2017. **190**, № 1. С. 58. (Zhukovsky K.V. // Theor. Math. Phys. 2017. **190**, N 1. P. 52.)
32. Zhukovsky K., Srivastava H. // Axioms. 2016. **5**, N 4. P. 29.
33. Wouk A. // J. Math. Anal. Appl. 1965. **11**. P. 131.
34. Gonzalez-Garcia M., Maltoni M., Schwetz T. Updated fit to three neutrino mixing: status of leptonic CP violation. arXiv: 1409.5439.
35. Gonzalez-Garcia M., Maltoni M., Schwetz T. NuFIT 2.1 (2016). 2016.
36. Strumia A., Vissani F. Neutrino masses and mixings and... 2006. arXiv: hep-ph/0606054.
37. King S.F. // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2015. **42**. P. 123001.
38. Ma E. // Phys. Lett. B. 2016. **752**. P. 198.
39. Zhukovsky K., Melazzini F. // Eur. Phys. J. C. 2016. **76**. P. 462.
40. Dattoli G., Sabia E., Torre A. // Nuovo Cimento A. 1996. **109**, N10. P. 1425.
41. Goldstein H. Classical Mechanics. Cambridge, MA: Addison-Wesley, 1950.
42. Minakata H., Smirnov A.Yu. // Phys. Rev. D. 2004. **70**. P. 073009.
43. Raidal M. // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**. P. 161801.

The exponential parameterization of the neutrino mixing matrix as an $SU(3)$ group element and an account for new experimental data

K. V. Zhukovsky

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

The exponential form of the Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata mixing matrix for neutrinos is considered in the context of the fundamental representation of the $SU(3)$ group. The logarithm of the mixing matrix is obtained. Based on the most recent experimental data on neutrino mixing, the exact values of the entries of the exponential matrix are calculated. The exact values for its real and imaginary parts are determined, respectively, in charge of the mixing without CP violation and of the pure CP violation effect. The hypothesis of complementarity for quarks and neutrinos is confirmed. The factorization of the exponential mixing matrix, which allows the separation of the mixing and of the CP violation itself in the form of the product of rotations around the real and imaginary axes, is demonstrated.

Keywords: neutrino, mixing, PMNS matrix, CP violation, exponential parameterization, group.

PACS: 14.60.Pq, 12.15.Ff, 02.20.–a.

Received 22 September 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 5. Pp. 433–440.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.