

## Эффект отрицательной скорости частиц в солитонном газе в рамках уравнений типа Кортевега — де Вриза

Е. Г. Шургалина<sup>1,a</sup>, Е. Н. Пелиновский<sup>1,2,b</sup>, К. А. Горшков<sup>1,c</sup>

<sup>1</sup> ФИЦ Институт прикладной физики РАН, Россия, 603095, Н. Новгород, ул. Ульянова, д. 46.

<sup>2</sup> Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева, Россия, 603095, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24.

E-mail: <sup>a</sup>eshurgalina@mail.ru, <sup>b</sup>pelinovsky@gmail.com, <sup>c</sup>gorshkov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 20.10.2016, подписана в печать 17.11.2016.

Исследуется эффект смены направления движения дефекта (солитона малой амплитуды) в солитонных решетках, описываемых интегрируемыми уравнениями типа Кортевега — де Вриза (КдВ и мКдВ). Проявление данного эффекта возможно в результате отрицательного сдвига фаз малых солитонов в момент их нелинейного взаимодействия с большими солитонами, о чем упоминалось еще в статье [1] в рамках уравнения КдВ. В недавней работе [2] было найдено выражение для средней скорости солитона в «холодном» газе КдВ через кинетическую теорию, из которого также следует этот эффект, хотя он и не отмечался. Здесь будет показано, что критерий отрицательной скорости оказывается одинаковым для обоих интегрируемых уравнений (КдВ и мКдВ), причем его можно найти из простых кинематических соображений без использования кинетической теории. Исследована усредненная динамика «наименьшего» солитона в солитонном газе, состоящем из солитонов со случайными амплитудами, и выведен усредненный критерий смены знака его скорости, подтвержденный численным решением в рамках уравнений КдВ и мКдВ.

*Ключевые слова:* солитоны, уравнение Кортевега — де Вриза, модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза, отрицательная скорость солитона, солитонный газ.

УДК: 530.145.6. PACS: 05.45.Yv, 47.35.Fg.

### Введение

Динамика солитонов в рамках уравнений Кортевега — де Вриза (КдВ) и модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза (мКдВ) достаточно хорошо изучена в силу полной интегрируемости этих уравнений. Солитоны представляют собой устойчивые волновые образования, сохраняющие форму после взаимодействия друг с другом и волновыми пакетами. Описание процесса взаимодействия солитонов в рамках мКдВ дается во многих работах [3–8], а для КдВ основные результаты были опубликованы еще в 1970-е гг. [9–11], хотя некоторые эффекты были получены совсем недавно [12].

Отличительной особенностью данных уравнений является то, что солитоны движутся в одну сторону. Однако если мы имеем дело с ансамблем солитонов, взаимодействующих между собой, то, как мы

покажем ниже, солитоны малой амплитуды могут двигаться в любом направлении, в том числе и в обратном. Подчеркнем, что мы говорим о направлениях движения в рамках уравнений КдВ и мКдВ, записанных в системе отсчета, связанной со скоростью линейных длинных волн  $V$ . Поэтому движение в обратную сторону означает, что скорость волны  $C < V$ , а не  $C < 0$ , так что здесь нет необходимости переходить к уравнениям Буссинеска, учитывающим физическое движение волн в обе стороны. Именно поэтому эффект отрицательной скорости может быть рассмотрен в рамках уравнений КдВ и мКдВ.

Интерес к этому явлению возник в связи с проблемой солитонной турбулентности (солитонного газа), когда имеется набор случайных солитонов, взаимодействующих между собой. Проблемы и особенности солитонной турбулентности обсуждаются в работах [13–20]. На рис. 1 показаны траектории

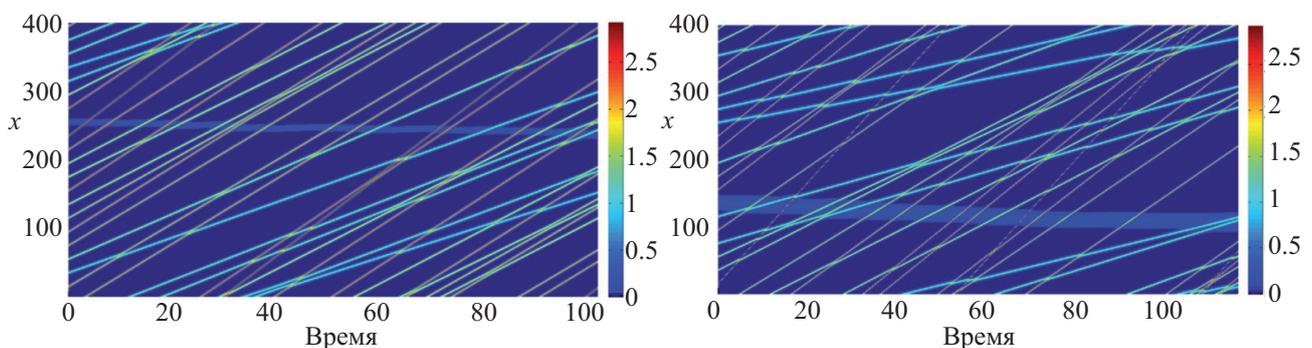


Рис. 1. Пространственно-временные диаграммы солитонных полей: слева — КдВ, справа — мКдВ

движения солитонов со случайными амплитудами в рамках уравнений КдВ и мКдВ, рассчитанные в [21]. Светлая полоса соответствует траектории солитона, движущегося в обратную сторону.

Для начала рассмотрим периодическую последовательность кноидальных волн или решетку солитонов, тем самым решая периодическую задачу для уравнений КдВ и мКдВ, которая хорошо обоснована математически [3, 11, 22]. Такая задача в рамках уравнения КдВ исследовалась еще в работе [1], где получено выражение для скорости «дефекта» в поле кноидальных волн через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Отмечается, что «дефект» с большей амплитудой (по сравнению со средней) движется вправо, а с меньшей — влево. Количественные оценки усредненной скорости солитона для газа КдВ были приведены в [2] из кинетической теории, где уравнение КдВ рассматривалось на всей числовой оси. В настоящей работе мы покажем, что выражение для нулевой скорости малого солитона в решетке больших солитонов одинаково для уравнений КдВ и мКдВ. Оно может быть получено из простых кинематических соображений.

### Движение дефекта в солитонной решетке

Каноническое уравнение Кортевега — де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

и модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

хорошо известны. В случае когда эти уравнения решаются на всей числовой оси, важную роль в нелинейной динамике играют солитоны [3, 11, 22]. Для нас удобным параметром, характеризующим солитон (или дискретный спектр ассоциированной обратной задачи), является скорость солитона.

И хотя сами солитонные решения различаются между собой:

$$u_{\text{КдВ}}(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right),$$

$$u_{\text{мКдВ}}(x, t) = \sqrt{c} \operatorname{sech} (\sqrt{c} (x - ct)),$$

модуль сдвига фаз при взаимодействии двух солитонов в обоих уравнениях записывается одинаково:

$$\Delta x_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{c_{1,2}}} \ln \left( \frac{\sqrt{c_2} + \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2} - \sqrt{c_1}} \right), \quad (1)$$

причем сдвиг фаз положительный для большего солитона и отрицательный для меньшего.

Кинетическое уравнение для плотности газа солитонов КдВ в силу его интегрируемости имеет вид [2, 13, 18, 19]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [s(c)f] = 0 \quad (2)$$

и определяется только сдвигом фаз взаимодействующих солитонов

$$s(c) = c + \frac{2}{\sqrt{c}} \int \ln \left| \frac{\sqrt{c} + \sqrt{v}}{\sqrt{c} - \sqrt{v}} \right| f(v) [s(c) - s(v)] dv. \quad (3)$$

Переменная  $s(c)$  имеет очевидный смысл: это скорость солитона с учетом парных солитонных взаимодействий.

Как известно, кинетическое уравнение КдВ основано на трех фактах: 1) солитоны сохраняются в процессе взаимодействия (нет интеграла столкновений солитонов), 2) взаимодействие солитонов носит попарный характер, 3) упругое соударение солитонов приводит к изменению их фаз. Очевидно, что эти факты выполняются для всех интегрируемых систем, так что вид кинетического уравнения (2) одинаков для всех интегрируемых систем и конкретная специфика определяется конкретным видом разности фаз в (3). Поскольку выражения для разности фаз в терминах скорости солитонов одинаковы для уравнений КдВ и мКдВ, (2) и (3) применимы для обоих уравнений.

Если солитонный газ однокомпонентный и состоит из одинаковых частиц, движущихся со скоростью  $c_l$ , то средняя скорость пробного солитона (дефекта), движущегося со скоростью  $c_d$ ,

$$s_d = \frac{c_d - \Delta x_d f(x, t) c_l}{1 - \Delta x_d f(x, t)}, \quad (4)$$

где функция  $f(x, t)$  ответственна за распределение солитонов в пространстве. Эта формула получена в [2] для уравнения КдВ и, очевидно, годится и для уравнения мКдВ.

В случае периодической решетки солитонов с периодом  $L$  плотность солитонного газа есть  $f = L^{-1}$ , не зависящая от  $x$  и  $t$ . Тогда и скорость дефекта является постоянной в среднем. Из формулы (4) легко может быть получен критерий нулевой скорости малого солитона путем приравнивания числителя в (4) к нулю. Заменив  $c_d/c_l = \omega$ , критерий смены скорости солитона находим в виде

$$\sqrt{c_l} L = \frac{2}{\omega \sqrt{\omega}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\omega}}{1 - \sqrt{\omega}} \right). \quad (5)$$

Если солитон действительно «маленький» ( $c_d \ll c_l$  или  $\omega \ll 1$ ), то логарифм в (5) может быть разложен в ряд Тейлора и условие нулевой скорости дефекта записывается в простой форме

$$\sqrt{c_l} L = \frac{4}{\omega}. \quad (6)$$

Важно отметить, что критерий (5) или (6) справедлив как для уравнения Кортевега — де Вриза, так и для модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза. Полученный критерий, в сущности, дает величину на максимальный пространственный период решетки, выраженный в длинах солитона ( $c_l^{-1/2}$ ), при котором смещение свободного солитона полностью компенсируется сдвигом фаз в результате

однократного нелинейного взаимодействия солитонов. С другой стороны, период решетки не может быть очень маленьким, поскольку плотность газа ограничена ( $L > L_{cr}$ , где  $L_{cr} = \frac{6}{\sqrt{c_l}}$  для КдВ [21] и  $L_{cr} = \pi^2 \frac{1}{2\sqrt{c_l}}$  для мКдВ [20]). Зависимость  $w$  от  $\sqrt{c_l}L$ , построенная согласно формулам (5) и (6), представлена на рис. 2.

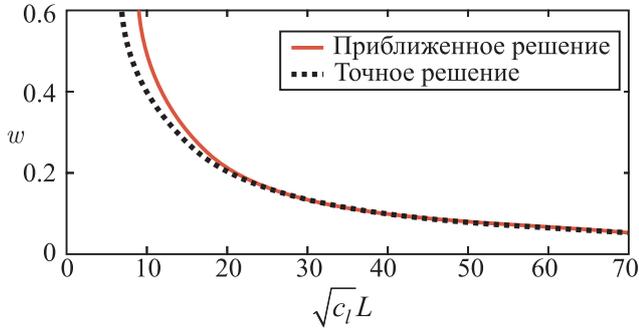


Рис. 2. Зависимость  $w$  от  $\sqrt{c_l}L$  согласно точной (5) и приближенной (6) формулам

Точная и асимптотическая кривые сливаются при значении  $\sqrt{c_l}L > 40$ . Отметим также, что при выполнении данного критерия все солитоны в решетке разнесены в пространстве (по уровню 0.001 от максимальной амплитуды в случае КдВ и по уровню 0.002 в случае мКдВ).

Этот критерий подтвержден прямым численным счетом рассматриваемых уравнений псевдоспектральным методом с использованием периодических граничных условий. Расчеты контролировались сохранением первого и второго моментов с точностью  $10^{-15}$  и  $10^{-7}$  соответственно для уравнения КдВ и с точностью  $10^{-13}$  и  $10^{-3}$  для уравнения мКдВ. На рис. 3 представлена пространственно-временная диаграмма движения дефекта в решетке мКдВ для  $\sqrt{c_l}L = 60$  ( $L = 60$ ) и  $w = 0.07$ , когда, согласно теории, малый солитон должен в среднем не двигаться. Как видим, светлая полоса на рис. 3, соответствующая траектории малого солитона, остается горизонтальной после нескольких взаимодействий. Аналогичные результаты были получены и для других значений  $\sqrt{c_l}L$  и  $w$ , лежащих на кривой на рис. 2, и, естественно, подтверждены и для решетки КдВ.

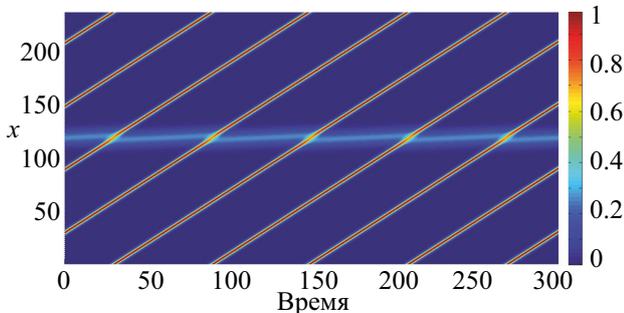


Рис. 3. Пространственно-временная диаграмма движения малого солитона (светлая полоса) в периодической решетке одинаковых «больших» солитонов (случай мКдВ)

Такой же критерий может быть найден из кинематических соображений в случае разреженного солитонного газа. Выделим один цикл взаимодействия дефекта с решеткой, показанный на рис. 4. Для определенности время начала цикла обозначим за  $t = 0$ , хотя, естественно, от выбора этой величины ничего не зависит. Все солитоны, находящиеся впереди дефекта, уже провзаимодействовали с ним, приобретя сдвиг фазы  $\Delta x_l$ , а все солитоны, находящиеся позади дефекта, — нет. Поэтому в «начальный» момент времени  $t = 0$  расстояние между солитонами в решетке в интервале между солитонами, обозначенными как 1 и 2, увеличено по сравнению с  $L$  на величину  $\Delta x_l$ . Тогда координата дефекта в «начальный» момент времени есть  $x_d(0) = L + \frac{1}{2}(L + \Delta x_l)$ . Траектории солитонов в цикле, когда дефект сталкивается с солитоном 2, приведены на рис. 4.

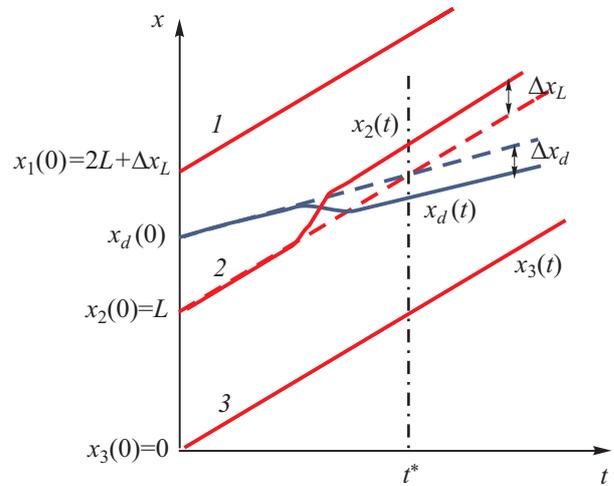


Рис. 4. Траектории солитонов в  $x$ - $t$ -пространстве. Пунктирными линиями показаны траектории солитонов без учета нелинейного взаимодействия

После столкновения траектории всех солитонов представимы линейными функциями от времени:

$$x_1(t) = c_l t + 2L + \Delta x_l,$$

$$x_2(t) = c_l t + L + \Delta x_l,$$

$$x_3(t) = c_l t,$$

$$x_d(t) = c_d t + L + \frac{1}{2}(L + \Delta x_l) - \Delta x_d.$$

Рассмотрим момент времени  $t^*$ , когда дефект снова будет расположен точно посередине, но теперь уже между солитонами 2 и 3. Он находится из условия  $x_2(t^*) - x_d(t^*) = x_d(t^*) - x_3(t^*)$ :

$$t^* = \frac{L - \Delta x_d}{c_l - c_d}.$$

В момент времени  $t^*$  координата дефекта

$$x_d(t^*) = x_d(0) + c_d t^* - \Delta x_d$$

и средняя скорость дефекта вдоль решетки

$$s_d = \frac{x_d(t^*) - x_d(0)}{t^*} = c_d \frac{1 - \frac{c_l}{c_d} \frac{\Delta x_d}{L}}{1 - \frac{\Delta x_d}{L}}. \quad (7)$$

Эта формула совпадает с (4), полученной из кинетической теории, и она справедлива для обоих уравнений: КдВ и мКдВ (зависимости  $\Delta x_d(c_d)$ ,  $\Delta x_d(c_l)$  совпадают). Приравняв числитель в (7) к нулю, получаем критерий (6).

**Движение дефекта в солитонном газе**

В предыдущем разделе мы рассматривали движение малого солитона в периодической решетке солитонов с одинаковыми амплитудами. В этом случае во взаимодействии участвуют только последовательные парные взаимодействия дефекта с каждым из солитонов решетки. В случае же солитонного многокомпонентного газа амплитуды и фазы солитонов случайны и здесь будет происходить взаимодействие многих солитонов между собой с течением времени. Как мы уже показывали на рис. 1, меньший солитон в солитонном газе может двигаться в обратную сторону. Для объяснения этого эффекта необходимо рассматривать большой интервал по времени, собирая все возможные столкновения солитонов, не только с пробным солитоном (дефектом), но и между собой. Тогда скорость дефекта в рамках кинетической теории определяется формулой (3), которую мы перепишем в виде

$$s_d = c_d + \frac{2}{\sqrt{c_d}} \int \ln \left| \frac{\sqrt{c_d} + \sqrt{v}}{\sqrt{c_d} - \sqrt{v}} \right| f(v) [s_d - s(v)] dv.$$

Отсюда получается явная формула для скорости дефекта

$$s_d = \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{c_d}} \int \ln \left| \frac{\sqrt{c_d} + \sqrt{v}}{\sqrt{c_d} - \sqrt{v}} \right| f(v) dv} \times \left\{ c_d - \frac{2}{\sqrt{c_d}} \int \ln \left| \frac{\sqrt{c_d} + \sqrt{v}}{\sqrt{c_d} - \sqrt{v}} \right| f(v) s(v) dv \right\},$$

из которой также очевидна возможность смены знака скорости дефекта. К сожалению, скорость частиц солитонного газа  $s(c)$  неизвестна и должна сама определяться тем же уравнением (3), которое является уравнением Фредгольма второго рода. Также необходимо отметить, что функция распределения  $f$  зависит теперь от  $x$  и  $t$  и должна находиться из (2), где  $c$  определяется из уравнения Фредгольма. Не решая уравнение Фредгольма численно, мы используем кинематические соображения, аналогичные тем, что использовались для анализа взаимодействия дефекта с солитонной решеткой.

Мы будем считать плотность солитонного газа достаточно малой, так что взаимодействия их редки. В этом случае вклад взаимодействий «больших» солитонов между собой должен нивелироваться (часть солитонов ускоряется, а часть тормозится), в то время как отрицательный набег фазы при взаимодействии наименьшего солитона со всеми остальными солитонами накапливается. Тогда естественно пренебречь сдвигами фаз при взаимодействии больших солитонов в газе и рассмотреть опять элементарный акт соударения дефекта со случайными солитонами.

Рассмотрим схему движения солитонов с произвольными (случайными) амплитудами (скоростями), которые в начальный момент времени находятся на одинаковом расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 5). Синим цветом показана траектория наименьшего солитона.

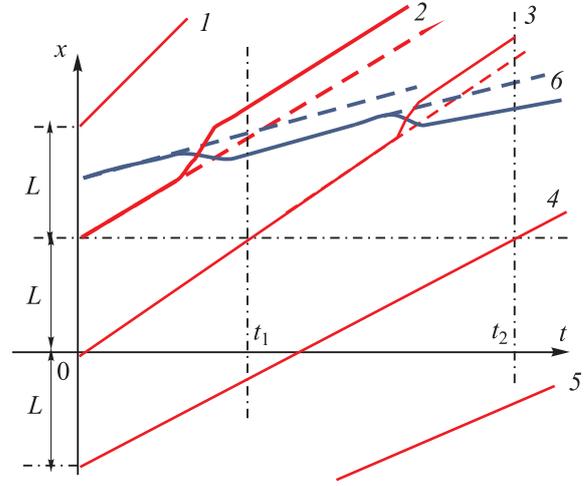


Рис. 5. Траектории солитонов в пространстве  $x-t$  (кривая 6 — наименьший солитон, 1-5 — остальные)

В данном случае все солитоны имеют разные скорости, так что их траектории не параллельны. Для начала рассмотрим движение солитонов до момента  $t_1 = L/c_3$ , когда третий солитон дойдет до начального положения второго. К этому моменту взаимодействие дефекта очень малой амплитуды со вторым уже произойдет в силу наименьшей скорости первого. Мы предполагаем, что все остальные солитоны не будут взаимодействовать между собой до этого момента. Путь, проходимый дефектом за это время, можно записать в виде

$$X_{d1} = \frac{c_1}{c_3} L - \Delta x_{d1},$$

где мы ввели «двойные» обозначения:  $X_{d1}$  означает расстояние, проходимое малым солитоном за первый цикл, и  $\Delta x_{d1}$  означает модуль сдвига фаз при взаимодействии маленького дефекта и большого второго солитона. Аналогичные обозначения появятся после каждого акта взаимодействия, когда второй индекс прибавляется на единицу.

Важно отметить, что по окончании первого акта ( $t_1$ ) расстояние между большими солитонами, которые не участвовали во взаимодействии, меняется и становится случайным (поскольку скорости солитонов случайны), что отличает эту задачу от рассмотренной в предыдущем разделе.

В качестве продолжительности второго цикла выберем момент времени, когда четвертый солитон встанет на место третьего солитона после первого цикла взаимодействия:

$$t_2 = \frac{2L}{c_4}.$$

За это время малый солитон пройдет путь

$$X_{d2} = c_d(t_2 - t_1) - \Delta x_{d2} = c_d L \left( \frac{2}{c_4} - \frac{1}{c_3} \right) - \Delta x_{d2}.$$

После второго цикла будет третий цикл, который уже не отображен на рис. 5. Его продолжительность определим по моменту времени, когда пятый солитон придет на место четвертого после второго цикла, т. е. опять в точку  $L$ :

$$t_3 = \frac{3L}{c_5}.$$

За это время дефект сдвинется на величину

$$X_{d3} = c_d(t_3 - t_2) - \Delta x_{d3} = c_d L \left( \frac{3}{c_5} - \frac{2}{c_4} \right) - \Delta x_{d3}.$$

Отсюда вытекает простая формула для смещения дефекта после  $i$ -го цикла

$$\begin{aligned} X_{di} &= c_d L \left( \frac{i}{c_{i+2}} - \frac{i-1}{c_{i+1}} \right) - \Delta x_{di} = \\ &= \frac{c_d}{c_{i+2}} L + (i-1) c_d L \left( \frac{1}{c_{i+2}} - \frac{1}{c_{i+1}} \right) - \Delta x_{di}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видим, первое и третье слагаемые в (8) являются всегда знакоопределенными, а второе слагаемое меняет знак случайно.

Увеличивая количество циклов, мы получаем общую формулу на путь, проходимый дефектом

$$\begin{aligned} X_d &= \sum_i X_{di} = \\ &= \sum_i \frac{c_d}{c_{i+2}} L + \sum_i (i-1) L \left( \frac{c_d}{c_{i+2}} - \frac{c_d}{c_{i+1}} \right) - \sum_i \Delta x_{di}. \end{aligned}$$

Проводя статистическое усреднение, мы видим, что вклад второго слагаемого мал и, следовательно,

$$\langle X_d \rangle \approx N \left( \left\langle \frac{1}{c} \right\rangle c_d L - 4 \left\langle \frac{1}{\sqrt{c}} \right\rangle \right),$$

где мы использовали приближенное выражение для сдвига фаз в случае солитона малой амплитуды (дефекта). Отсюда следует условие неподвижности в среднем дефекта в солитонном газе

$$s_d = c_d = \frac{4 \left\langle \frac{1}{\sqrt{c}} \right\rangle}{L \left\langle \frac{1}{c} \right\rangle}. \quad (9)$$

В принципе мы могли бы отказаться от строгой периодичности солитонного газа в начальный момент времени, поскольку со временем расстояние между солитонами все равно становится случайным. Тогда необходимо задавать совместную функцию распределения величин  $c$  и  $L$ , для выбора которой сейчас нет специальных оснований. В эту же сторону играют взаимодействия больших солитонов между собой, «сбивая» расстояния между солитонами. В силу знакопеременности сдвига фаз между большими солитонами их взаимодействие между собой должно давать слабый эффект в (9). Однако

аналитически пока трудно оценить этот эффект и мы здесь используем численное моделирование.

Для оценок выберем равномерное распределение амплитуд солитонов с относительной полушириной функции распределения  $\Delta$ . Тогда критерий (9) преобразуется в

$$s_d = \frac{8\sqrt{\langle c \rangle}}{L} F(\Delta), \quad F(\Delta) = \frac{\sqrt{1+\Delta} - \sqrt{1-\Delta}}{\ln \left( \frac{1+\Delta}{1-\Delta} \right)}. \quad (10)$$

В случае слабого разброса амплитуд солитонов (однокомпонентный газ)  $F(\Delta \rightarrow 0) \rightarrow 1/2$  и выражение (10), естественно, совпадает с (6). При  $\Delta \rightarrow 1$  функция  $F(\Delta) \rightarrow 0$  и критическая скорость дефекта стремится к нулю, поскольку возрастает роль медленных солитонов, которые не могут затормозить дефект. Функция  $F(\Delta)$  показана на рис. 6.

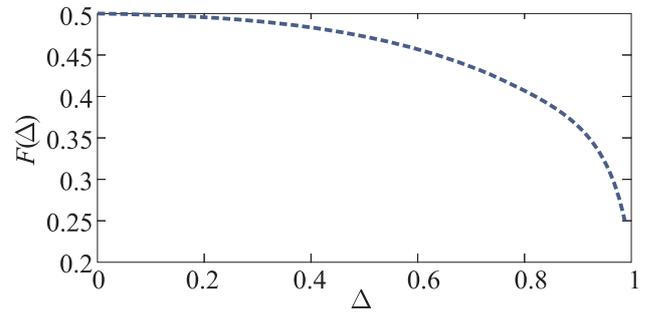


Рис. 6. Зависимость функции  $F(\Delta)$  от относительной полуширины функции распределения  $\Delta$

Проверим численно выполнимость данного критерия в рамках модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза. Зафиксируем  $L = 40$  и выберем  $\langle c \rangle = 4$  (с разбросом  $\Delta = 1.8$ ), тогда  $\langle c^{-1/2} \rangle = 0.52$ ,  $\langle c^{-1} \rangle = 0.27$ . Из (9) получаем  $c_d = 0.19$ . Диаграмма  $x-t$  солитонного газа для этого набора параметров представлена на рис. 7. Как видим, в среднем солитон с амплитудой  $c_d = 0.19$  (светло-голубая яркая линия, выходящая из  $x = 380$ ) имеет нулевую скорость, что подтверждено наложением прямой пунктирной линии на рис. 7. Выполнение критерия (9) проверено и для других параметров задачи: величина  $c$  принимала значения от 1 до 7 в разных реализациях, так что среднее значение скорости лежало в пределах 3–5, а разброс 1–2. Все эти примеры дают одинаковые результаты

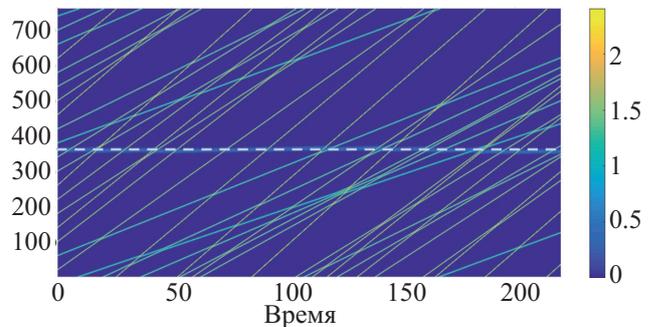


Рис. 7. Пространственно-временная диаграмма случайного солитонного газа, демонстрирующая эффект нулевой скорости дефекта (случай мКДВ)

на критерий остановки дефекта. Аналогичная картина получена и для солитонного газа КдВ. Таким образом, взаимодействие больших солитонов между собой действительно не дает вклад в критерий остановки дефекта.

Из всего вышесказанного можно заключить, что малый солитон в решетке регулярных солитонов будет двигаться с отрицательной скоростью при выполнении критерия (6), а в случайном солитонном газе — при выполнении (9), причем как для уравнения Кортевега — де Вриза, так и для модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза.

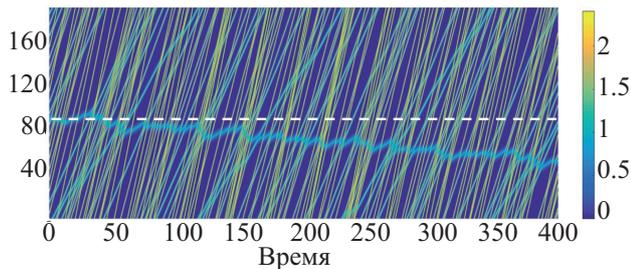


Рис. 8.  $x-t$ -диаграмма солитонного газа с частыми взаимодействиями солитонов (случай мКдВ)

Важно отметить, что солитонный газ должен быть достаточно разреженным, так чтобы солитоны взаимодействовали достаточно редко между собой. Тогда сдвиг фаз совершается полностью до следующего взаимодействия. С возрастанием плотности солитонного газа эффект «торможения» будет усиливаться, поскольку дефект не будет успевать сдвигаться вправо как свободный солитон. Этот эффект проверен численно (рис. 8), где использованы те же параметры, что и в предыдущем примере, представленном на рис. 7, за исключением  $L = 10$  и  $c_d = 0.76$ . Как видим, дефект двигается назад, в то время как, согласно критерию (9), он должен стоять на месте.

### Заключение

В рамках уравнения Кортевега — де Вриза и модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза аналитически выведен с помощью кинематических соображений критерий отрицательной скорости малого дефекта в периодической решетке больших солитонов. Он совпадает с получаемыми из кинетического уравнения для однокомпонентного газа солитонов и в результате численного интегрирования. Этот эффект обусловлен отрицательным сдвигом фаз при взаимодействии малого солитона (дефекта) с большими солитонами.

Аналогичный критерий получен приближенно для движения дефекта в солитонном газе со случайными скоростями с использованием кинематического подхода, причем точность критерия, как показали численные расчеты, оказалась поразительно хорошей, если плотность солитонного газа достаточно мала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-32-60012, 16-35-00175, 16-55-52019, 15-05-02430, 15-42-02357), программы РАН "Нелинейная динамика в математических и физических науках а также Volkswagen Foundation и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6637.2016.5).

### Список литературы

1. Кузнецов Е.А., Михайлов А.В. // ЖЭТФ. 1974. **67**, № 5. С. 1717. (Kuznetsov E.A., Mikhailov A.V. // Sov. Phys. JETP. 1975. **40**, N 5. P. 855.)
2. Carbone F., Dutykh D., El G.A. // EPL. 2016. **113**, N 3. P. 30003.
3. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М.: Наука, 1983. (Lamb J.L. Elements of Soliton Theory. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1980.)
4. Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н. // ЖЭТФ. 1999. **116**. С. 318. (Slyunyaev A.V., Pelinovsky E.N. // J. Exp. Theor. Phys. 1999. **89**. P. 173.)
5. Слюняев А.В. // ЖЭТФ. 2001. **19**. С. 606. (Slyunyaev A.V. // J. Exp. Theor. Phys. 2001. **92**. P. 529.)
6. Anco S.C., Ngatat N.T., Willoughby M. // Physica D. 2011. **240**. P. 1378.
7. Пелиновский Е.Н., Шургалкина Е.Г. // Известия вузов. Радиофизика. 2014. **57**, № 10. С. 825. (Pelinovsky E.N., Shurgalina E.G. // Radiophys. Quantum Electr. 2015. **57**, P. 737.)
8. Grimshaw R.H.J., Hunt J.C.R., Chow K.W. // J. Ocean Eng. Mar. Energy. 2015. **1**. P. 145.
9. Lax P.D. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. **21**. P. 467.
10. Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. (Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskij L.P., Zakharov V.E. Theory of Solitons. The inverse scattering methods. Contemporary Soviet Mathematics. N.Y.; L.: Plenum Publishing Corporation, 1984.)
11. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1985. (Newell A.C. Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia, PA: SIAM, 1985.)
12. Pelinovsky E.N., Shurgalina E.G., Sergeeva A.V., Talipova T.G. et al. // Phys. Letters A, 2013, **377**, N 3–4. P. 272.
13. Захаров В.Е. // ЖЭТФ. 1971. **60**, № 3. С. 993. (Zakharov V.E. // Sov. Phys. JETP. 1971. **33**, N 3. P. 538.)
14. Горшков К.А., Островский Л.А., Панко В.В. // ДАН СССР. 1977. **235**, № 1. С. 70.
15. Dutykh D., Pelinovsky E. // Phys. Lett. A. 2014. **378**, N 4. P. 3102.
16. Costa A., Osborne A.R., Resio D.T. et al. // Phys. Rev. Lett. 2014. **113**. P. 108501.
17. Agafontsev D.S., Zakharov V.E. // Nonlinearity. 2015. **28**. P. 2791.
18. El G.A., Kamchatnov A.M. // Phys. Rev. Lett. 2005. **95**. P. 204101.
19. El G.A. // Chaos. 2016. **26**. P. 023105.
20. Shurgalina E.G., Pelinovsky E.N. // Phys. Lett. A. 2016. **380**. P. 2049.
21. Шургалкина Е.Г., Пелиновский Е.Н. Динамика ансамбля нерегулярных волн в прибрежной зоне. Нижний Новгород: НГТУ, 2015. (Shurgalina E.G., Pelinovsky E.N. Dynamics of Irregular Wave Ensembles in the Coastal Zone. Nizhny Novgorod: NSTU. 2015.)

22. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

**The effect of the negative particle velocity in a soliton gas within Korteweg—de Vries-type equations**

**E. G. Shurgalina<sup>1,a</sup>, E. N. Pelinovsky<sup>1,2,b</sup>, K. A. Gorshkov<sup>1,c</sup>**

<sup>1</sup> *Federal Research Center The Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences. Nizhny Novgorod 603950, Russia.*

<sup>2</sup> *Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R. E. Alekseev. Nizhny Novgorod 603950, Russia.*  
E-mail: <sup>a</sup> *eshurgalina@mail.ru*, <sup>b</sup> *pelinovsky@gmail.com*, <sup>c</sup> *gorshkov@hydro.appl.sci-nnov.ru*.

The effect of changing the direction of motion of a defect (a soliton of small amplitude) in soliton lattices described by the Korteweg—de Vries and modified Korteweg—de Vries integrable equations (KdV and mKdV) was studied. Manifestation of this effect is possible as a result of the negative phase shift of a small soliton at the moment of nonlinear interaction with large solitons, as noted in [1], within the KdV equation. In the recent paper [2], an expression for the mean soliton velocity in a “cold” KdV-soliton gas has been found using kinetic theory, from which this effect also follows, but this fact has not been mentioned. In the present paper, we will show that the criterion of negative velocity is the same for both the KdV and mKdV equations and it can be obtained using simple kinematic considerations without applying kinetic theory. The averaged dynamics of the “smallest” soliton (defect) in a soliton gas consisting of solitons with random amplitudes has been investigated and the average criterion of changing the sign of the velocity has been derived and confirmed by numerical solutions of the KdV and mKdV equations.

*Keywords:* solitons, Korteweg—de Vries equation, modified Korteweg—de Vries equation, negative soliton velocity, soliton gas.

PACS: 05.45.Yv, 47.35.Fg.

*Received 20 October 2016.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2017. 72, No. 5. Pp. 441–448.*

**Сведения об авторах**

1. Шургалина Екатерина Геннадьевна — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; e-mail: *eshurgalina@mail.ru*.
2. Пелиновский Ефим Наумович — доктор физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник; тел.: (831) 436-48-39, e-mail: *pelinovsky@gmail.com*.
3. Горшков Константин Александрович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (831) 436-47-09, e-mail: *gorshkov@hydro.appl.sci-nnov.ru*.