Перемежаемость векторных полей и генераторы случайных чисел

А. О. Калинин[1], Д. Д. Соколов[1,3,a], В. Н. Тутубалин[2]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
[1] физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2;
[2] механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 1.
[3] Институт механики сплошных сред, Уральское отд. РАН.
Россия, 614000, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1.
E-mail: [a] sokoloff.dd@gmail.com

Статья поступила 25.10.2016, подписана в печать 26.01.2017.

Исследуется, насколько естественные генераторы случайных чисел могут вопроизвести явление перемежаемости при переносе векторных полей в случайных средах. В качестве наиболее перспективного генератора предлагается генератор, основанный на анализе финансовых индексов. Показано, что даже он, однако, не воспроизводит реализацию, достаточно длинную для того, чтобы уверенно зарегистрировать это явление, в то время как искусственный генератор C++ справляется с этой задачей. Обсуждается перспектива использования каскадных моделей турбулентности как искомого генератора.

Ключевые слова: случайные числа, перемежаемость, перенос в случайных средах.
УДК: 537.84, 524.822, 519.257. PACS: 02.50.Cw, 98.80.Es.

Введение

Представление о случайном поле широко применяется в физике, например, при описании турбулентных потоков [1]. При этом часто используются тонкие результаты теории вероятностей, основанные на далеко не очевидных свойствах этого математического объекта. Вопрос о том, как эти свойства абстрактного математического объекта соотносятся со свойствами реальной турбулентности, еще недостаточно исследован. Очевидно, что при таком сопоставлении нужно фиксировать, какими именно свойствами турбулентности мы интересуемся.

В рамках настоящей работы мы ограничиваемся вопросом об описании явления перемежаемости, которое возникает при переносе векторных полей в случайных средах (напр., [2]). Явление перемежаемости состоит в том, что почти каждая реализация случайного векторного поля растет экспоненциально, среднее значение модуля поля тоже растет экспоненциально, однако скорость роста среднего больше, чем скорость роста реализаций. Еще быстрее растет стандартное уклонение векторного поля, а скорость роста более высоких моментов растет с ростом номера момента. Такое необычное поведение статистических моментов объясняется появлением очень редких пространственных областей и/или реализаций, в которых магнитное поле некоторое достаточно долгое время растет аномально быстро по сравнению с типичной скоростью роста.

Явление перемежаемости, обнаруженное в вычислительных экспериментах магнитной гидродинамики и подтвержденное астрономическими наблюдениями, возникает при переносе различных векторных полей, но его изучение удобно проводить на конкретном примере. Здесь мы исследуем перемежаемость в рамках простой, но физически интересной задачи о распространении света во Вселенной с неоднородностями, указанной Я. Б. Зельдовичем [3]. С формальной точки зрения эта задача сводится к решению уравнения Якоби

$$y'' + K(t)y = 0, \tag{1}$$

где $y(t)$ — поле Якоби, т. е. коэффициент пропорциональности между расстоянием от двух геодезических на плоскости, расходящихся под малым углом θ друг от друга на расстоянии t от начала и углом θ, кривизна $K(t)$ рассматривается как случайных процесс. Естественные начальные условия для задачи Зельдовича имеют вид $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Суть указанного Зельдовичем эффекта состоит в том, что даже если в среднем величина K равна нулю, то за счет флуктуаций поле Якоби y растет экспоненциально с увеличением расстояния от наблюдателя (оно выражается через время распространения света t). Другими словами, кажется, что Вселенная имеет отрицательную кривизну [3].

Изучение эффекта Зельдовича проводилось как методами теории вероятностей [4], так и методами прямого численного моделирования (напр., [5–7]). В обоих подходах подтверждается представление о перемежаемом росте поля Якоби: растут как его реализации, так и статистические моменты, причем моменты растут быстрее реализаций, а скорость роста моментов увеличивается с номером момента. В работах по прямому численному моделированию этой задачи в качестве генератора случайных чисел использовался один из стандартных генераторов, например генератор C++.

Однако в работе [8] обнаружено, что если в качестве набора случайных чисел при таком моделировании использовать для этого последовательность десятичных знаков, скажем, в числе π, то реализации решения уравнения Якоби по-прежнему экспоненциально растут, однако прогрессивный рост моментов обнаружить не удается. Напомним, что обычно принято считать, что последовательность десятичных знаков иррациональных чисел и, в частности, числа π можно рассматривать как случайную последовательность. Другими словами, генератор C++ дает более совершенную случайную последовательность, чем генератор, основанный на свойствах числа π.

Теперь естественно возникает вопрос о том, насколько свойство перемежаемости для уравнения Якоби воспроизводится с помощью генератора случайных чисел, связанного с каким-нибудь естественным процессом. Подчеркнем, что в литературе высказывается мнение, что спиральный и неспиральный турбулентный потоки вызывают принципиально разные турбулентные каскады: в одном случае каскад перемежаемый, а в другом — неперемежаемый [9]. Проверка этого утверждения представляется непростой (см. ниже), но важной задачей.

Главная возникающая здесь трудность состоит в том, что нам нужен естественный процесс, дающий достаточно большой набор чисел, которые можно было бы считать независимыми и равнораспределенными. В самом деле, опыт моделирования решений уравнения Якоби с помощью генератора C++ показывает, что для воспроизведения явления перемежаемости необходимо провести усреднение по приблизительно $5 \cdot 10^5$ независимых реализаций. Поскольку для построения каждой реализации приходится использовать приблизительно 100 чисел, то всего нам нужно около $5 \cdot 10^7$ равнораспределенных случайных чисел. Это число очень велико, однако заметно меньше, чем то число независимых случайных чисел (10^9), которое должен давать генератор C++ согласно его техническим характеристикам. С другой стороны, число оборотов вихрей, скажем, в конвективной оболочке Солнца за время его существования вполне может быть столь же большим.

Трудно представить себе лабораторный физический эксперимент, который проводится достаточно долго и документируется достаточно подробно для того, чтобы дать столь длинную запись его результатов. В поисках подходящего естественного генератора случайных чисел приходится обратиться к финансовым индексам, получаемым при биржевой торговле различными акциями. В этом случае проведение эксперимента не требует специальных затрат, а его результаты доступны на соответствующих ресурсах, публикующих результаты торгов. Тем не менее формирование достаточно длинного ряда чисел и здесь оказывается непростой задачей, требующей специальных усилий. Отметим, что современные генераторы случайных чисел (например, генератор C++) в штатном режиме справляются с такой задачей.

1. Генератор случайных чисел, основанный на котировках акций

В финансовой математике [10] принято считать, что из последовательности котировок акций a_n в близкие моменты времени $t = n\tau$, где τ — подходящим образом выбранный шаг по времени, можно построить последовательность независимых случайных чисел по правилу

$$K_n = \ln(a_{n+1}/a_n). \tag{2}$$

Мы воспроизвели это построение, использовав данные сайта finam.ru, который публикует котировки акций на торгах на Московской бирже за последние 10 лет. Представляется, что более длинные временны́е ряды брать не следует, поскольку на таких больших временах трудно надеяться на стационарность получаемых данных. В качестве τ мы выбирали 1 минуту, поскольку за меньшее время эти котировки обычно меняются мало. Даже при этом для того, чтобы получить достаточно большой набор случайных чисел, нам приходится комбинировать данные по многим (конкретно 50) различным акциям.

В результате можно собрать $N = 1.2 \cdot 10^7$ чисел. Это несколько меньше, чем удается использовать при работе с генератором C++, однако дальнейшее расширение набора акций кажется опасным.

Поведение кривизны K, построенной с помощью этого генератора, действительно выглядит как поведение реализации некоторого стационарного случайного процесса. Эмпирическая функция распределения (рис. 1) кривизн, полученных с помощью финансового генератора и генератора C++, конечно, не совпадают в точности. Обращает на себя внимание разрыв функции распределения для финансового генератора вблизи нуля. Он означает, что в заметном числе случаев за время τ не происходило изменения котировок, так что уменьшать величину τ действительно не имеет смысла.

Непосредственное использование полученного с помощью финансового генератора набора случайных кривизн для построения поля Якоби показывает, что не растут не только индивидуальная реализация, но и статистические моменты. Это происходит потому, что значения кривизн, полученных с помощью финансового генератора, малы (порядка 10^{-3}) и выход на растущий режим происходит очень медленно. Для того, чтобы получить рост решения, необходимо пронормировать кривизны так, чтобы их типичное значение стало сопоставимым с единицей (мы умножали значения K на 10^3). Описанное явление кажется естественным, но ранее не отмечалось в работах по тестированию генераторов случайных чисел на предмет воспроизведения явления перемежаемости.

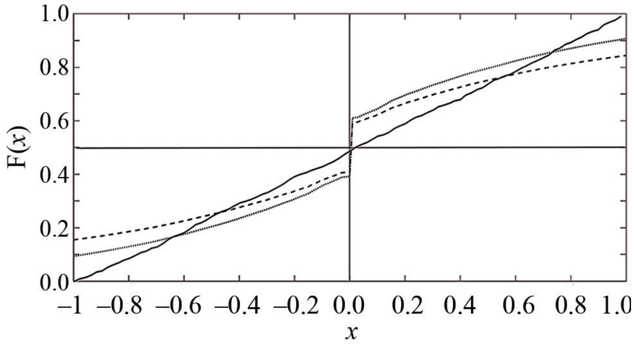

Рис. 1. Эмпирические функции распределения для случайных кривизн, полученных с помощью финансовых индексов (точки), тот же генератор после селекции (штриховая линия) и генератора С++ (сплошная линия). Чтобы поместить графики на одной панели, величины K в первых двух случаях умножены на 10^3

После указанной нормировки индивидуальное решение уравнения Якоби растет экспоненциально, однако первые статистические моменты решения растут с той же скоростью, т. е. явления перемежемости не наблюдается. Это происходит потому, что полученная реализация случайного процесса недостаточно стационарна во времени. Действительно, построим накопленную сумму S_n квадратов значений K_i от $i=0$ до $i=n$ как функцию n (рис. 2). Для стационарного случайного процесса эта функция должна быть линейной, а на рисунке она далека от линейной. Наблюдаемые скачки накопленной суммы, по-видимому, объясняются тем, что время от времени одна акция обменивается на несколько (так называемый сплит), тем, что мы склеивали результаты котировок различных акций, и другими отклонениями от принятой модели. Такие грубые промахи время от времени встречаются в физических экспериментах. При обработке данных их, конечно, нужно селектировать.

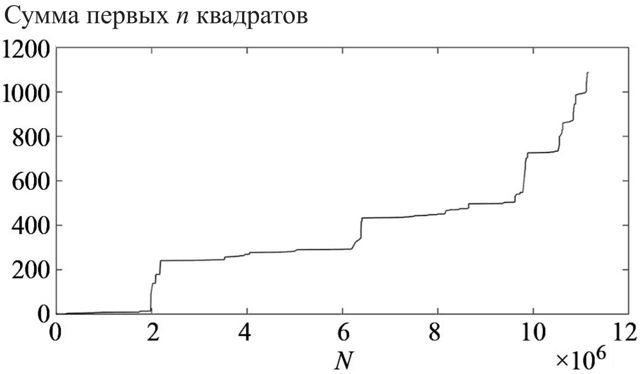

Рис. 2. Накопленная сумма квадратов $K(n)$ как функция n

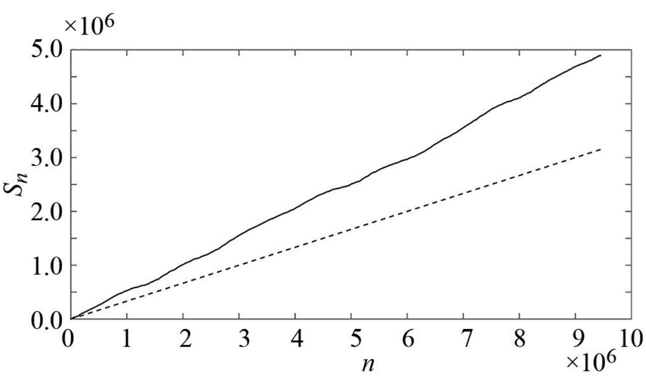

Рис. 3. Накопленная сумма квадратов S_n селектированного ряда $K(n)$ (сплошная линия) как функция n и аналогичная кривая для генератора С++ (штрихи). Для того чтобы сделать графики сравнимыми, первая из сумм домножена на 10^6

Мы тоже провели селекцию и удалили данные, которые давали аномально большие (по модулю) значения по сравнению с медианным K. График накопленной суммы S_n (рис. 3) становится близким к линейному, если отбрасываются значения K, которые в $\sqrt{15}$ раз больше медианного значения. После соответствующего масштабирования этот график практически неотличим от соответствующего графика для генератора С++.

2. Рост поля Якоби и его моментов

Мы обнаружили, что при использовании селектированного ряда чисел K для моделирования поля Якоби его индивидуальная реализация растет приблизительно экспоненциально (рис. 4). На этом рисунке видно, что логарифм поля Якоби приблизительно линейно увеличивается со временем, хотя, конечно, видны и существенные флуктуации относительно этой линейной зависимости. В частности, на рисунке видно, что время от времени на графике возникают направленные вниз пики. Это происходит потому, что мы следим за поведением поля Якоби y, тогда как с точки зрения изучения поведения произведения случайных матриц было бы более последовательно следить за поведением двумерного вектора, составленного из поля y и его производной y'. Длина такого вектора растет без отмеченных пиков, однако одна из компонент вектора время от времени обращается в нуль, что и вызывает пик. Подобное же поведение известно для генератора С++. Поскольку наш генератор не вносит в это явление ничего нового, мы не иллюстрируем эту деталь явления более подробно.

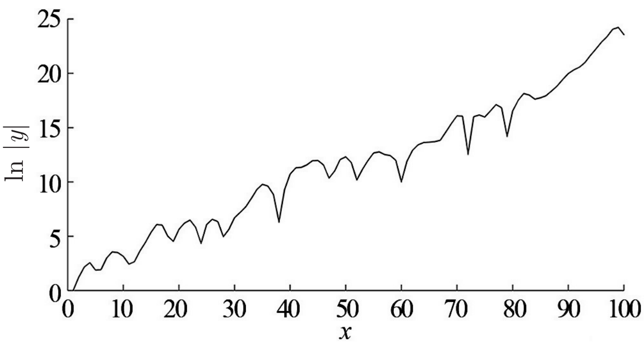

Рис. 4. Рост поля Якоби для селектированного ряда кривизн

Поведение высших статистических моментов показано на рис. 5, где, для того чтобы сделать результаты сопоставимыми, из значений моментов извлечены корни соответствующих порядков. На рисунке видно, что моменты растут с приблизительно одинаковой скоростью (графики следуют параллельным прямым). Возможно, в начале графиков заметен небольшой участок, где высшие моменты опережают первый, однако на имеющемся материале трудно утверждать это с уверенностью.

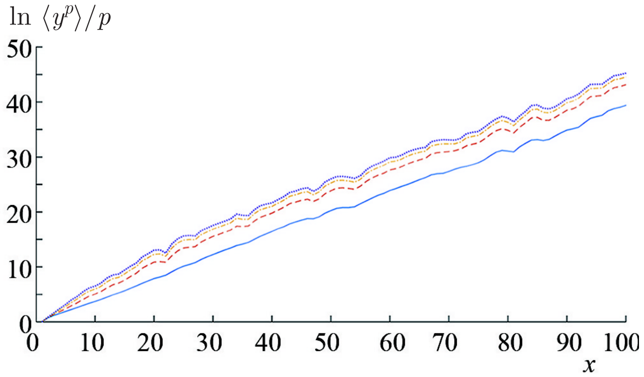

Рис. 5. Моменты поля Якоби для селектированного ряда кривизн: первый момент — сплошная линия, второй — штриховая, третий — штрихпунктирная, четвертый — точки

Для аналогичных кривых, полученных с помощью генератора C++, например в работах [4–6], для первых двух моментов в начале графиков хорошо видны прямолинейные участки, имеющие разные наклоны. При увеличении аргумента эти наклоны становятся одинаковыми потому, что усреднение ведется хотя и по очень большому, но конечному ансамблю реализаций. Теоретические результаты [3], предсказывающие прогрессивный рост моментов и при больших значениях аргумента, рассматривают усреднение по бесконечно большому ансамблю. Чем больше значение аргумента, тем большего размера ансамбль нужен для того, чтобы редкие события, определяющие прогрессивный рост, еще попадали в рассматриваемый ансамбль.

Итак, даже набор случайных кривизн, основанный на финансовых индексах, не позволяет заметить прогрессивный рост статистических моментов.

Мы попытались улучшить результат, произведя рекомендованную [10] замену времени, используя в качестве новой переменной накопленную сумму квадратов селектированного ряда кривизн, изображенную на рис. 4, однако это не привело к заметному улучшению результата.

3. Обсуждение результатов

Мы убедились в том, что последовательность случайных кривизн, основанная на финансовых индексах, даже после проведения селекции не позволяет зафиксировать прогрессивный рост статистических моментов в простейшем примере, приводящий в теоретических работах к явлению перемежаемости. Данные, полученные при изучении других естественных процессов, кажутся еще менее обещающими. Конечно, запись показаний какого-нибудь физического прибора, скажем, на космической станции, может в принципе содержать и больший объем чисел, но трудно рассчитывать на однородность этого набора. В этом смысле естественные процессы проигрывают современным генераторам случайных чисел.

Еще более проблематичным выглядит задача тестирования данных о, скажем, турбулентных потоках на предмет того, насколько в этих потоках возникает явление перемежаемости. Эта задача представляет очевидный теоретический и практический интерес. В то же время перспективы того, что люди потратят огромные усилия и средства для получения в физическом эксперименте огромного набора однородных случайных чисел, кажутся сомнительными. Такой набор случайных чисел может реализовываться в небесных телах за счет их огромных, несопоставимых с лабораторными размеров. Этот набор, однако, нереально (как по техническим, так и по экономическим причинам) получить и в ходе астрономических наблюдений. Не лучше выглядят и перспектива получить нужный набор случайных чисел при численном моделировании гидродинамической турбулентности. Не говоря даже об огромных вычислительных трудностях, даже постпроцессинг гипотетической компьютерной симуляции нужного масштаба представил бы трудноразрешимую проблему.

Представляется, что разумный компромисс в изучении этой проблемы мог бы состоять в использовании в качестве генератора нужного набора (псевдо)случайных чисел каскадных моделей турбулентности (напр., [11]). Эти модели хорошо воспроизводят свойства реальной турбулентности, но описываются с помощью систем сравнительно небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Получение на их основе необходимого набора (псевдо)случайных чисел представляется хотя и сложной, но посильной задачей. В рамках этого подхода выглядит реальным, скажем, сравнение свойств спиральной и неспиральной турбулентности на предмет поиска явления перемежаемости при росте магнитного поля в потоке проводящей жидкости (задача динамо) и, в частности, верификация представлений работы [9] о принципиальном различии переноса в задачах о спиральной и неспиральной турбулентностях. Конечно, такие задачи далеко выходят за рамки этой статьи.

Еще раз подчеркнем, что анализ финансовых рынков не входил в наши задачи. Однако полученный результат, как нам кажется, означает, что к предсказательной способности результатов финансовой математики нужно относиться с определенной осторожностью. Еще одной очевидной возможностью развития этой тематики в плане приложений к изучению финансовых рынков было бы сравнение с данными котировок, полученных на других биржах, например на Нью-Йоркской бирже. Мы не видим в наших результатах прямых указаний на возможность того, что это могло бы повлиять на результат, но, конечно, это трудно исключить заранее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант16-41-02012).

Список литературы

1. *Фрик П.Г.* // Турбулентность: подходы и модели. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
2. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А.* и др. // УФН. 1987. **152**, № 2. С. 3.
3. *Зельдович Я.Б.* Астрономический журнал. 1964. **19**, № 1. С. 19.
4. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* // Матем. заметки. 2003. **74**, № 3. С. 416.
5. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* // Вычислит. методы и программирование. 2004. **5**, № 2. С. 172.
6. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* // Астрон. журн. 2005. **82**, № 7. С. 584.
7. *Artyshkova M.E., Sokoloff D.D.* // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, № 1. С. 3.
8. *Калинин А.О., Соколов Д.Д.* // Вычислит. методы и программирование. 2016. **17**, № 1. С. 1.
9. *Mininni P.D., Pouquet A.* // Phys. Fluids. 2010. **22**. ID 035106.
10. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М., Фазис, 1998.
11. *Plunian F., Stepanov R., Frick P.* // Phys. Rep. 2013. **523**, № 1. С. 1.

The intermittency of vector fields and random-number generators

A. O. Kalinin[1], **D. D. Sokoloff**[1,3,a], **V. N. Tutubalin**[2]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[2] *Department of Probability Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[3] *Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Division of Russian Academy of Sciences. Perm 614000, Russia. E-mail: [a] sokoloff.dd@gmail.com.*

We examine how well natural random-number generators can reproduce the intermittency phenomena that arise in the transfer of vector fields in random media. A generator based on the analysis of financial indices is suggested as the most promising random-number generator. Is it shown that even this generator, however, fails to reproduce the phenomenon long enough to confidently detect intermittency, while the C++ generator successfully solves this problem. We discuss the prospects of using shell models of turbulence as the desired generator.

Keywords: random numbers, intermittency, transfer in random media.
PACS: 02.50.Cw, 98.80.Es.
Received 25 October 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 5. Pp. 449–453.

Сведения об авторах

1. Калинин Антон Олегович — студент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: kalinanton@me.com.
2. Соколов Дмитрий Дмитриевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: sokoloff.dd@gmail.com.
3. Тутубалин Валерий Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-14-03, e-mail: vntutubalin@yandex.ru.