

## Использование асимптотического анализа для разработки одномерной модели переноса в случае пространственной неоднородности

А. А. Квас<sup>1</sup>, Н. Т. Левашова<sup>2,a</sup>, А. К. Сальник<sup>2</sup>

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,

<sup>1</sup>кафедра физики атмосферы; <sup>2</sup>кафедра математики.

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: <sup>a</sup>natasha@npanalytica.ru

Статья поступила 21.11.2016, подписана в печать 08.12.2016.

Исследуется решение с внутренним переходным слоем одномерной краевой задачи для стационарного дифференциального уравнения типа реакция–адвекция–диффузия, возникающего при математическом моделировании явлений переноса в приповерхностном слое атмосферы в случае неоднородной растительности в предположении изотропности пространства вдоль одной из горизонтальных осей при условии нейтральной атмосферной стратификации. В работе приведены параметры модели, при которых краевая задача имеет устойчивое стационарное решение с внутренним переходным слоем, локализованным вблизи границы раздела различных типов растительности; доказано существование, локальная устойчивость по Ляпунову и локальная единственность этого решения. Результаты работы могут быть использованы при разработке многомерных моделей переноса в случае пространственной неоднородности.

*Ключевые слова:* контрастные структуры, внутренний переходный слой, метод дифференциальных неравенств, уравнение переноса.

УДК: 51-72. PACS: 02.30.Hq, 92.60.Fm.

### Введение

В настоящей работе исследуется одномерная краевая задача для дифференциального уравнения типа реакция–адвекция–диффузия, допускающая решение вида контрастной структуры (КС). Контрастной структурой называется функция, внутри области определения которой есть интервал, на котором происходит резкое изменение значений этой функции. Эта область называется внутренним переходным слоем.

Краевые задачи типа реакция–адвекция–диффузия, допускающие решения вида КС, могут быть использованы при математическом моделировании явлений переноса в приповерхностном слое атмосферы в случае неоднородной растительности. В частности, график горизонтальной компоненты скорости ветра на границе лес — открытая местность имеет резкий переходный слой, в области которого величина скорости изменяется от своего значения на открытой местности до значения внутри растительного покрова, поэтому для моделирования скорости ветра в этом случае весьма уместно использование теории КС.

В предположении изотропности пространства вдоль одной из горизонтальных осей при условии нейтральной атмосферной стратификации для моделирования явлений переноса, таких как перенос газовой примеси или воздушного потока, можно использовать одномерное описание. В этом случае уравнение переноса при наличии растительной неод-

нородности записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, x), \quad (1)$$

где  $a(x)$  — усредненная величина горизонтальной компоненты скорости ветра,  $u(x)$  — искомая характеристика среды, например концентрация газовой примеси или какая-либо из компонент скорости ветра,  $F(u, x)$  — функция, описывающая влияние растительности.

В настоящей работе для учета влияния растительной неоднородности используется модель, основанная на теории КС [1, 2]. Согласно этой модели, функция  $F(u, x)$  в уравнении (1) имеет вид кубической зависимости от  $u$ :

$$F(u, x) = -\frac{s(x)}{u_*} (u - u_o)(u - u_f)(u - \varphi(x)).$$

Здесь  $s(x)$  — функция, описывающая плотность растительного покрова. Эта функция принимает значения в диапазоне  $0.2-0.6 \text{ м}^{-1}$  внутри растительного покрова [3] и непрерывно изменяется до нуля при переходе к открытой местности. Величины  $u_o$  и  $u_f$  — значения искомой характеристики среды вдали от границ растительности соответственно на открытой местности и внутри лесного массива; функцию  $\varphi(x)$  мы будем подбирать таким образом, чтобы на границе двух типов растительности образовывался устойчивый стационарный переходный слой; множитель  $u_*$  имеет размерность м/с и добавлен для согласования размерностей в левой и правой частях уравнения (1).

Уравнение (1) рассматривается на отрезке  $x \in [-L, L]$ , где  $L$  выбирается таким образом, чтобы

ширина переходного слоя была существенно меньше  $2L$ , а область переходного слоя находилась на достаточном удалении от краев отрезка. Для проведения аналитического исследования перепишем уравнение (1) в безразмерных переменных, выбрав в качестве масштабов длины и скорости соответственно так называемую «длину Мони́на–Обухова» (около 7 м) [4] и скорость  $u_* \simeq 0.3$  м/с. Затем введем малый параметр  $\varepsilon = 1/L$  и проведем замену переменной  $x$  на  $\varepsilon x$ . Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - s(x)(u - u_o)(u - u_f)(u - \varphi(x)), \quad -1 < x < 1. \quad (2)$$

В работе [5] получены условия существования и устойчивости решения стационарных начально-краевых задач для уравнения (2), имеющие внутренний переходный слой. Однако в этой работе точка локализации переходного слоя является неизвестной. Наша цель — определить условия, которым должна удовлетворять функция  $\varphi(x)$ , для того чтобы стационарный переходный слой был локализован в окрестности заранее заданной точки вблизи границы раздела двух типов растительности.

### 1. Постановка задачи

Стационарное уравнение, отвечающее (2), имеет следующий вид:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = a(x) \frac{du}{dx} + s(x)(u - u_o)(u - u_f)(u - \varphi(x)), \quad -1 < x < 1. \quad (3)$$

В качестве дополнительных условий на краях отрезка  $[-1, 1]$  зададим однородные условия Неймана:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=\mp 1} = 0. \quad (4)$$

Эти условия означают отсутствие внешних факторов, оказывающих влияние на процессы, происходящие внутри рассматриваемой области.

Пусть воздушный поток распространяется в положительном направлении оси  $OX$ . В этом случае выполняется неравенство

$$a(x) > 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (5)$$

Будем для определенности рассматривать подветренную границу леса, за которой расположена открытая местность, и полагать, что  $u_f < u_o$ . Будем считать, что точка локализации переходного слоя нам заранее известна и обозначим ее  $\hat{x}$ . Безразмерная функция  $s(x)$  в уравнении (3) принимает значения в диапазоне 2–4 на части отрезка  $[-1, 1]$ , соответствующей области лесного массива, и непрерывно изменяется до нуля при переходе к открытой местности. Будем считать, что  $s(\hat{x}) = O(1)$ .

В постановке задачи (3), (4) существенным является выбор такой функции  $\varphi(x)$ , чтобы у задачи существовало устойчивое по Ляпунову решение

с внутренним переходным слоем. С этой целью потребуем выполнения следующих условий в точке  $\hat{x}$ .

**Условие А1.** Пусть выполняется неравенство

$$u_f < \varphi(\hat{x}) < u_o.$$

**Условие А2.** Пусть значение функции  $\varphi(x)$  в точке  $\hat{x}$  определяется выражением

$$\varphi(\hat{x}) = \frac{u_o + u_f}{2} - \frac{a(\hat{x})}{\sqrt{2s(\hat{x})}}.$$

Следствием условий А1 и А2 является неравенство, связывающее значение функции  $a(x)$  в точке  $\hat{x}$  с величинами  $u_o$  и  $u_f$ , которое будем считать еще одним условием применимости рассматриваемой модели.

**Условие А3.** Пусть выполняется неравенство

$$a(\hat{x}) < \sqrt{0.5s} (u_o - u_f). \quad (6)$$

Следует отметить, что для физических объектов, в целях описания которых разрабатывалась настоящая модель, условие А3, как правило, реализуется.

### 2. Исследование присоединенной системы

Рассмотрим систему уравнений первого порядка относительно функций  $\tilde{u}(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  при  $-\infty < \xi < +\infty$ :

$$\Phi = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, \quad (7)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = a(\hat{x})\Phi + s(\hat{x})(\tilde{u} - u_o)(\tilde{u} - u_f)(\tilde{u} - \varphi(\hat{x})).$$

Эта система уравнений называется «присоединенной системой» для уравнения (3).

Точки  $(u_f; 0)$ ,  $(\varphi(\hat{x}); 0)$  и  $(u_o; 0)$  фазовой плоскости  $(\tilde{u}; \Phi)$  являются точками покоя присоединенной системы (7). Для определения типа каждой из точек покоя рассмотрим линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{d\xi} &= \Phi, \\ \frac{d\Phi}{d\xi} &= a(\hat{x})\Phi + s(\hat{x})F_u(u^*)\tilde{u}, \end{aligned} \quad (8)$$

где через  $F_u$  обозначено значение производной функции

$$F(\tilde{u}) = s(\hat{x})(\tilde{u} - u_o)(\tilde{u} - u_f)(\tilde{u} - \varphi(\hat{x})),$$

$u^*$  — значение переменной  $\tilde{u}$  в какой-либо точке покоя.

Характеристические числа системы (8) для каждой из точек покоя определяются выражениями

$$\lambda_{1,2} = 0.5a(\hat{x}) \pm 0.5\sqrt{a^2(\hat{x}) + 4s(\hat{x})F_u(u^*)}. \quad (9)$$

Запишем выражения для производной  $F_u(u^*)$  при  $u^* = u_f$ ,  $u^* = u_o$  и  $u^* = \varphi(\hat{x})$ :

$$F_u(u_f) = (u_f - \varphi(\hat{x}))(u_f - u_o),$$

$$F_u(u_o) = (u_o - \varphi(\hat{x}))(u_o - u_f)$$

$$F_u(\varphi(\hat{x})) = (\varphi(\hat{x}) - u_o)(\varphi(\hat{x}) - u_f).$$

В силу условия А1 выполняются неравенства

$$F_u(u_f) > 0, \quad F_u(u_o) > 0, \quad F_u(\varphi(\hat{x})) < 0,$$

поэтому характеристические числа системы (8), вычисленные согласно (9) при  $u^* = u_f$  и  $u^* = u_o$ , вещественные и имеют разные знаки. Отсюда следует, что точки покоя  $(u_f; 0)$  и  $(u_o; 0)$  являются седлами на фазовой плоскости  $(\bar{u}; \Phi)$ . Точка  $(\varphi(\hat{x}); 0)$  — неустойчивая и в зависимости от знака подкоренного выражения в (9) может быть либо неустойчивым узлом, либо неустойчивым фокусом.

### 3. Построение асимптотического приближения решения

В настоящей работе мы будем строить функцию  $U_1$  — асимптотическое приближение первого порядка по параметру  $\varepsilon$  решения задачи (3), (4).

Точка  $\hat{x}$  делит отрезок  $[-1, 1]$  на две части. Согласно стандартному алгоритму [5, 6], для построения асимптотических приближений решений краевых задач с внутренними переходными слоями используются два пространственных масштаба: один связан с переменной  $x$ , а другой — с растянутой переменной  $\xi = \frac{x - \hat{x}}{\varepsilon}$ , которую вводят для детального описания поведения решения в области переходного слоя.

Асимптотические приближения будем строить отдельно слева и справа от точки  $\hat{x}$ :

$$U_1 = \begin{cases} U^f = \bar{u}_0^f(x) + \varepsilon \bar{u}_1^f(x) + Q_0^f(\xi) + \varepsilon Q_1^f(\xi), \\ \quad x \in [-1, \hat{x}], \quad \xi \leq 0; \\ U^o = \bar{u}_0^o(x) + \varepsilon \bar{u}_1^o(x) + Q_0^o(\xi) + \varepsilon Q_1^o(\xi), \\ \quad x \in [\hat{x}, 1], \quad \xi \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Верхним индексом « $f$ » отмечены функции, определенные при значениях  $x$  и  $\xi$ , отвечающих области расположения лесного массива, а верхним индексом « $o$ » — функции, определенные при значениях  $x$  и  $\xi$ , отвечающих открытой местности. Суммы  $\bar{u}_0^{f,o}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{f,o}(x)$  называются регулярной частью разложения, они описывают поведение решения вдали от точки локализации переходного слоя. Суммы  $Q_0^{f,o}(\xi) + \varepsilon Q_1^{f,o}(\xi)$  описывают решение в окрестности переходного слоя.

Функции  $U^f$  и  $U^o$  будем гладко сшивать в точке  $\hat{x}$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}_0^f(\hat{x}) + \varepsilon \bar{u}_1^f(\hat{x}) + Q_0^f(0) + \varepsilon Q_1^f(0) = \\ = \bar{u}_0^o(\hat{x}) + \varepsilon \bar{u}_1^o(\hat{x}) + Q_0^o(0) + \varepsilon Q_1^o(0). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_0^f}{dx}(\hat{x}) + \varepsilon \frac{d\bar{u}_1^f}{dx}(\hat{x}) + \frac{dQ_0^f}{d\xi}(0) + \varepsilon \frac{dQ_1^f}{d\xi}(0) = \\ = \frac{d\bar{u}_0^o}{dx}(\hat{x}) + \varepsilon \frac{d\bar{u}_1^o}{dx}(\hat{x}) + \frac{dQ_0^o}{d\xi}(0) + \varepsilon \frac{dQ_1^o}{d\xi}(0). \end{aligned} \quad (12)$$

#### 3.1. Регулярные члены асимптотического представления

Уравнения для функций  $\bar{u}_{0,1}^{f,o}(x)$  получим, приравняв слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в разложении по формуле Тейлора функций в левой и правой частях равенств

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} (\bar{u}_0^{f,o} + \varepsilon \bar{u}_1^{f,o}) = \varepsilon a(x) \frac{d}{dx} (\bar{u}_0^{f,o} + \varepsilon \bar{u}_1^{f,o}) + \\ + s(x) \left( (\bar{u}_0^{f,o} + \varepsilon \bar{u}_1^{f,o}) - u_o \right) \left( (\bar{u}_0^{f,o} + \varepsilon \bar{u}_1^{f,o}) - u_f \right) \times \\ \times \left( (\bar{u}_0^{f,o} + \varepsilon \bar{u}_1^{f,o}) - \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

Выделяя в этом равенстве отдельно слагаемые при  $\varepsilon^0$ , получим уравнение для определения коэффициентов  $\bar{u}_0^{f,o}$ :

$$s(x) (\bar{u}_0^{f,o} - u_o) (\bar{u}_0^{f,o} - u_f) (\bar{u}_0^{f,o} - \varphi(x)) = 0.$$

Положим

$$\bar{u}_0^f = u_f, \quad \bar{u}_0^o = u_o.$$

Для определения коэффициентов  $\bar{u}_1^{f,o}(x)$  получим уравнения

$$\begin{aligned} s(x)(u_f - u_o)(u_f - \varphi(x))\bar{u}_1^f = 0, \\ s(x)(u_o - u_f)(u_o - \varphi(x))\bar{u}_1^o = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\bar{u}_1^{f,o}(x) = 0$ .

#### 3.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций  $Q_{0,1}^f(\xi)$  при  $\xi \leq 0$  и для функций  $Q_{0,1}^o(\xi)$  при  $\xi \geq 0$  получим, приравнявая слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в левой и правой частях равенств

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} (Q_0^{f,o} + \varepsilon Q_1^{f,o}) = a(\hat{x} + \varepsilon\xi) \frac{d}{d\xi} (Q_0^{f,o} + \varepsilon Q_1^{f,o}) + \\ + s(\hat{x} + \varepsilon\xi) \left( (u_{f,o} + Q_0^{f,o} + \varepsilon Q_1^{f,o}) - u_o \right) \times \\ \times \left( (u_{f,o} + Q_0^{f,o} + \varepsilon Q_1^{f,o}) - u_f \right) \times \\ \times \left( (u_{f,o} + Q_0^{f,o} + \varepsilon Q_1^{f,o}) - \varphi(\hat{x} + \varepsilon\xi) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

предварительно разложив входящие в них функции по формуле Тейлора по степеням  $\varepsilon$ .

Дополнительные условия при  $\xi = 0$  для каждой из этих функций будем получать из условий непрерывного сшивания (11). Кроме того, потребуем выполнения условий убывания на бесконечности:  $|Q_{0,1}^{f,o}(\mp\infty)| = 0$ .

#### Функции переходного слоя нулевого порядка

Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} u_f + Q_0^f(\xi), & \xi \leq 0, \\ u_o + Q_0^o(\xi), & \xi \geq 0, \end{cases} \quad \Phi(\xi) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}. \quad (14)$$

Приравняем коэффициенты при  $\varepsilon^0$  в равенстве (13), затем используем обозначения (14) и тогда получим уравнение для функций  $\tilde{u}(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = a(\hat{x}) \frac{d\tilde{u}}{d\xi} + s(\hat{x}) (\tilde{u} - u_o) (\tilde{u} - u_f) (\tilde{u} - \varphi(\hat{x})), \\ -\infty < \xi < +\infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы будем искать такое решение уравнения (15), для которого выполняются следующие граничные условия:

$$\tilde{u}(-\infty) = u_f, \quad \tilde{u}(+\infty) = u_o. \quad (16)$$

Доказательство теоремы о существовании и единственности решений краевых задач типа (15), (16) приведено, например, в [7].

Уравнению (15) эквивалентна присоединенная система (7), для которой точки  $(u_o; 0)$  и  $(u_f; 0)$  являются точками покоя типа седла на фазовой плоскости  $(\tilde{u}; \Phi)$ . Существование решения этой системы, для которой выполнено условие (16), означает, что на фазовой плоскости  $(\tilde{u}; \Phi)$  существует непрерывная кривая, соединяющая седла. Эта кривая называется соединительной сепаратрисой.

Соединительная сепаратриса седел  $(u_o; 0)$  и  $(u_f; 0)$  на фазовой плоскости  $(\tilde{u}; \Phi)$  системы (7) имеет вид параболы [8]

$$\Phi(\tilde{u}) = C(\tilde{u} - u_o)(\tilde{u} - u_f). \quad (17)$$

Разделим второе уравнение системы (7) на первое, затем домножим левую и правую части на  $\Phi(\tilde{u})$  и получим уравнение первого порядка относительно функции  $\Phi(\tilde{u})$

$$\Phi \frac{d\Phi}{d\tilde{u}} = a(\hat{x})\Phi + s(\hat{x})(\tilde{u} - u_o)(\tilde{u} - u_f)(\tilde{u} - \varphi(\hat{x})).$$

Подставим в это уравнение функцию  $\Phi(\tilde{u})$  в виде (17) и после сокращения на произведение  $(\tilde{u} - u_o)(\tilde{u} - u_f)$  получим равенство

$$C^2(2\tilde{u} - u_o(\hat{x}) - u_f(\hat{x})) = a(\hat{x})C + s(\hat{x})(\tilde{u} - \varphi(\hat{x})).$$

Приравняв коэффициенты при  $\tilde{u}^1$  и  $\tilde{u}^0$  в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$2C^2 = s(\hat{x}), \quad \varphi(\hat{x}) = 0.5(u_o + u_f) + Ca(\hat{x})/s(\hat{x}).$$

Квадратное уравнение относительно неизвестной константы  $C$  имеет два корня, один из которых положительный, другой — отрицательный. Для того чтобы выполнялось условие А2, следует выбрать  $C = -\sqrt{0.5s(\hat{x})}$ . В этом случае функция  $\Phi(\tilde{u})$ , определенная выражением (17), будет принимать положительные значения, а решение системы (7) с условием (16) — возрастать от значения  $u_f$  до значения  $u_o$ .

Учитывая, что  $\Phi = d\tilde{u}/d\xi$ , из выражения (17) получим дифференциальное уравнение первого порядка для определения функций  $\tilde{u}(\xi)$ . Выпишем решение этого уравнения с условием  $\tilde{u}(0) = \varphi(\hat{x})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u} = & \left( u_o(\hat{x})(\varphi(\hat{x}) - u_f(\hat{x})) + \right. \\ & \left. + u_f(\hat{x})(u_o(\hat{x}) - \varphi(\hat{x})) \exp(C(u_o(\hat{x}) - u_f(\hat{x}))\xi) \right) \times \\ & \times \left( \varphi(\hat{x}) - u_f(\hat{x}) + (u_o(\hat{x}) - \varphi(\hat{x})) \exp(C(u_o(\hat{x}) - u_f(\hat{x}))\xi) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C = -\sqrt{0.5s(\hat{x})}$ .

#### Функции переходного слоя первого порядка

Будем считать, что функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на отрезке  $[-1, 1]$ .

Функции переходного слоя первого порядка определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1^{f,o}}{d\xi^2} = & a(\hat{x}) \frac{dQ_1^{f,o}}{d\xi} + s(\hat{x}) \tilde{f}_u(\xi) Q_1^{f,o} + \frac{da}{dx}(\hat{x}) \Phi(\xi) \xi + \\ & + \frac{ds}{dx}(\hat{x}) \tilde{f}(\xi) \xi - s(\hat{x})(\tilde{u}(\xi) - u_o)(\tilde{u}(\xi) - u_f) \frac{d\varphi}{dx}(\hat{x}) \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi) = & (\tilde{u}(\xi) - u_o(\hat{x}))(\tilde{u}(\xi) - \varphi(\hat{x}))(\tilde{u}(\xi) - u_f(\hat{x})), \\ \tilde{f}_u(\xi) = & (\tilde{u}(\xi) - \varphi(\hat{x}))(\tilde{u}(\xi) - u_f(\hat{x})) + \\ & + (\tilde{u}(\xi) - u_o(\hat{x}))(\tilde{u}(\xi) - u_f(\hat{x})) + \\ & + (\tilde{u}(\xi) - u_o(\hat{x}))(\tilde{u}(\xi) - \varphi(\hat{x})). \end{aligned} \quad (20)$$

Задача для функции  $Q_1^f$  рассматривается при  $\xi < 0$ , а для функции  $Q_1^o$  — при  $\xi > 0$ . Для каждого из уравнений (19) поставим следующие дополнительные условия:

$$Q_1^{f,o}(0) = 0, \quad Q_1^{f,o}(\mp\infty) = 0. \quad (21)$$

Для каждого из уравнений (19) функция  $\Phi(\xi) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}(\xi)$  является решением соответствующего однородного уравнения. Это можно заметить, если проинтегрировать по  $\xi$  уравнение (15). Зная одно из решений однородного уравнения, можно, применяя стандартные способы понижения порядка дифференциального уравнения, получить решения задач (19), (21) в явном виде:

$$\begin{aligned} Q_1^{f,o}(\xi) = & -s(\hat{x}) \frac{d\varphi}{dx}(\hat{x}) \Phi(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\Phi^2(\xi')} \times \\ & \times \int_{\mp\infty}^{\xi'} e^{a(\hat{x})(\xi' - \eta)} \Phi(\eta) (\tilde{u}(\eta) - u_o)(\tilde{u}(\eta) - u_f) \eta d\eta d\xi' + \\ & + \Phi(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\Phi^2(\xi')} \int_{\mp\infty}^{\xi'} e^{a(\hat{x})(\xi' - \eta)} \Phi(\eta) \times \\ & \times \left( \frac{da}{dx}(\hat{x}) \Phi(\eta) + \frac{ds}{dx}(\hat{x}) \tilde{f}(\eta) \right) \eta d\eta d\xi'. \end{aligned} \quad (22)$$

## 4. Существование и устойчивость решения вида контрастной структуры

### 4.1. Верхнее и нижнее решения

Доказательство существования решения задачи (3), (4) опирается на метод дифференциальных неравенств для эллиптических краевых задач, развитый в [9]. Согласно этому методу, существование решения краевой задачи вытекает из существования так называемых верхнего и нижнего решений этой задачи, т. е. непрерывных функций, для которых выполняется следующая система дифференциальных неравенств.

1°. Упорядоченность верхнего и нижнего решений:

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon),$$

при всех  $x \in [-1, 1]$ .

2°. Действие дифференциального оператора в уравнении (3) на верхнее и нижнее решения:

$$L[\beta] := \varepsilon^2 \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \varepsilon a(x) \frac{d\beta}{dx} - s(x)(\beta - u_o(x))(\beta - u_f(x))(\beta - \varphi(x)) \leq 0 \leq L[\alpha],$$

при всех  $x \in [-1, \hat{x}] \cup [\hat{x}, 1]$ .

3°. Условия на краях отрезка:

$$\frac{d\beta}{dx}(-1) \leq 0 \leq \frac{d\alpha}{dx}(-1), \quad \frac{d\alpha}{dx}(1) \leq 0 \leq \frac{d\beta}{dx}(1).$$

4°. Условия на производные в точке  $\hat{x}$ :

$$\frac{d\alpha}{dx}(\hat{x} - 0) \leq \frac{d\alpha}{dx}(\hat{x} + 0), \quad \frac{d\beta}{dx}(\hat{x} - 0) \geq \frac{d\beta}{dx}(\hat{x} + 0).$$

Для того чтобы доказать, что для решения задачи (3), (4) построенная функция  $U_1$  (см. (10)) является асимптотическим приближением, используем методику, развитую в работах [10, 11], и будем строить верхнее и нижнее решения этих задач как модификацию их асимптотических приближений:

$$\beta(x, \varepsilon) = \begin{cases} u_f + Q_0^f(\xi) + \varepsilon Q_1^f(\xi) + \\ + \varepsilon(\mu + q^f(\xi)) + \varepsilon^2 \exp\left(-\gamma \frac{x+1}{\varepsilon}\right), \\ -1 \leq x \leq \hat{x}, \quad \xi \leq 0, \\ u_o + Q_0^o(\xi) + \varepsilon Q_1^o(\xi) + \\ + \varepsilon(\mu + q^o(\xi)) + \varepsilon^2 \exp\left(\gamma \frac{x-1}{\varepsilon}\right), \\ \hat{x} \leq x \leq 1, \quad \xi \geq 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\alpha(x, \varepsilon) = \begin{cases} u_f + Q_0^f(\xi) + \varepsilon Q_1^f(\xi) - \\ - \varepsilon(\mu + q^f(\xi)) - \varepsilon^2 \exp\left(-\gamma \frac{x+1}{\varepsilon}\right), \\ -1 \leq x \leq \hat{x}, \quad \xi \leq 0, \\ u_o + Q_0^o(\xi) + \varepsilon Q_1^o(\xi) - \\ - \varepsilon(\mu + q^o(\xi)) - \varepsilon^2 \exp\left(\gamma \frac{x-1}{\varepsilon}\right), \\ \hat{x} \leq x \leq 1, \quad \xi \geq 0. \end{cases}$$

В последнем выражении константы  $\mu > 0$  и  $\gamma > 0$  выбираются достаточно большими, чтобы выполнялись условия 1°–3°.

Функции  $q^{f,o}(\xi)$  устраняют невязки, возникающие в неравенстве 2° в результате модификации регулярной части за счет слагаемого  $\varepsilon\mu$  в верхнем решении или  $-\varepsilon\mu$  в нижнем решении. Они определяются как решения следующих уравнений:

$$\frac{d^2 q^{f,o}}{d\xi^2} - a(\hat{x}) \frac{dq^{f,o}}{d\xi} - s(\hat{x}) \tilde{f}_u(\xi) q^{f,o} - s(\hat{x}) \left( \tilde{f}_u(\xi) - \bar{f}_u^{f,o}(\hat{x}) \right) \mu = 0. \quad (24)$$

Здесь использованы обозначения (20), а также введены новые:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_u^f(\hat{x}) &= (u_f - \varphi(\hat{x})) (u_f - u_o), \\ \bar{f}_u^o(\hat{x}) &= (u_o - \varphi(\hat{x})) (u_o - u_f). \end{aligned}$$

Зададим дополнительные условия для уравнений (24) следующим образом:

$$q^{f,o}(0) = \delta - \mu - \omega^{f,o}, \quad q^{f,o}(\mp\infty) = 0, \quad (25)$$

где  $\delta > 0$ ,  $\omega^{f,o} = \varepsilon \exp\left(\mp\gamma \frac{\hat{x} \pm 1}{\varepsilon}\right)$ . Заметим, что величины  $\omega^{f,o}$  имеют порядок  $o(\varepsilon^n)$  для любого  $n > 0$ .

Будем решать задачу для функции  $q^f$  при  $\xi < 0$ , а задачу для функции  $q^o$  — при  $\xi > 0$ .

Решения задач (24), (25) выпишем в явном виде:

$$\begin{aligned} q^{f,o}(\xi) &= (\delta - \mu - \omega^{f,o}) \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(0)} + \\ &+ \Phi(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\Phi^2(\xi')} \int_{\mp\infty}^{\xi'} e^{a(\hat{x})(\xi' - \eta)} \Phi(\eta) s(\hat{x}) \times \\ &\times \left( \tilde{f}_u(\eta) - \bar{f}_u^{f,o}(\hat{x}) \right) \mu d\eta d\xi', \quad (26) \end{aligned}$$

#### 4.2. Проверка дифференциальных неравенств

Для проверки неравенства 1° запишем разность верхнего и нижнего решений:

$$\begin{aligned} \beta^{f,o}(x, \varepsilon) - \alpha^{f,o}(x, \varepsilon) &= 2\varepsilon \left( 1 + (\delta - \mu) \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(0)} + \right. \\ &+ \Phi(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\Phi^2(\xi')} \int_{\mp\infty}^{\xi'} e^{a(\hat{x})(\xi' - \eta)} \Phi(\eta) s(\hat{x}) \times \\ &\times \left. \left( \tilde{f}_u(\eta) - \bar{f}_u^{f,o}(\hat{x}) \right) \mu d\eta d\xi' \right) + O(\varepsilon^2). \quad (27) \end{aligned}$$

При выборе достаточно большой величины  $\delta$  в выражениях (26) для функций  $q^{f,o}(\xi)$  правая часть последнего равенства окажется положительной при  $-\infty < \xi < +\infty$ . Действительно, исходя из явного вида функций  $\tilde{u}$  (см. (18)) и  $\Phi = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}$  можно прийти к неравенствам

$$\begin{aligned} A_2 \exp\left(-\sqrt{0.5s(\hat{x})}(u_o - u_f)|\xi|\right) < \\ < \Phi(\xi) < \bar{A}_2 \exp\left(-\sqrt{0.5s(\hat{x})}(u_o - u_f)|\xi|\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \Phi(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\Phi^2(\xi')} \int_{\mp\infty}^{\xi'} e^{a(\hat{x})(\xi' - \eta)} \Phi(\eta) s(\hat{x}) \times \right. \\ \left. \times \left( \tilde{f}_u(\eta) - \bar{f}_u^o(\hat{x}) \right) \mu d\eta d\xi' \right| < \\ < A_1 \exp\left(-\sqrt{0.5s(\hat{x})}(u_o - u_f)|\xi|\right), \end{aligned}$$

где  $A_1, A_2, \bar{A}_2$  — положительные константы ( $A_2 < \bar{A}_2$ ).

Выберем положительные величины  $\delta$  и  $N$  достаточно большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{(\delta - \mu)A_2}{\Phi(0)} > A_1, \quad A_1 \exp\left(-\sqrt{0.5s(\hat{x})}(u_o - u_f)N\right) < \frac{1}{2}.$$

При таком выборе чисел  $\delta$  и  $N$  выражение в правой части равенства (27) принимает положительные значения на отрезке  $-N \leq \xi \leq N$  за счет слагаемого



$2\varepsilon(\delta - \mu)\Phi(\xi)\Phi^{-1}(0)$ , а при  $|\xi| > N$  — за счет слагаемого  $2\varepsilon\mu$ .

Условие упорядоченности выполнено.

В результате действия оператора  $L[\beta]$  на верхнее решение получаем

$$L[\beta] = \varepsilon^2 \frac{d^2 \beta^{f,o}}{dx^2} - \varepsilon a(x) \frac{d\beta^{f,o}}{dx} - s(x)(\beta^{f,o} - u_o(x))(\beta^{f,o} - u_f(x))(\beta^{f,o} - \varphi(x)) = -\varepsilon s(\hat{x}) \bar{f}_u^{f,o}(x) \mu + O(\varepsilon^2). \quad (28)$$

Неравенство 2° для верхнего решения оказывается выполненным при  $\mu > 0$  и достаточно малых значениях  $\varepsilon$ . Аналогично проверяется выполнение этого неравенства для нижнего решения.

Неравенство 3° оказывается выполненным при достаточно большом значении  $\gamma$ :

$$\frac{d\beta}{dx}(\mp 1) = \mp \varepsilon \gamma + O(\varepsilon^2), \quad \frac{d\alpha}{dx}(\mp 1) = \pm \varepsilon \gamma + O(\varepsilon^2).$$

Запишем выражение для разности левой и правой производных верхнего решения в точке  $\hat{x}$ :

$$\frac{d\beta}{dx}(\hat{x} - 0) - \frac{d\beta}{dx}(\hat{x} + 0) = \frac{dQ_1^f}{d\xi}(0) - \frac{dQ_1^o}{d\xi}(0) + \frac{dq^f}{d\xi}(0) - \frac{dq^o}{d\xi}(0).$$

Здесь учтена гладкость функции  $\tilde{u}(\xi)$ .

Подставим сюда явные выражения (22) и (26) для функций  $Q_1^{f,o}(\xi)$  и  $q^{f,o}(\xi)$ . В результате придем к равенству

$$\frac{d\beta}{dx}(\hat{x} - 0) - \frac{d\beta}{dx}(\hat{x} + 0) = D + O(\varepsilon^n),$$

где  $n > 1$ , а величина  $D$  определяется следующим выражением:

$$D := -s(\hat{x}) \frac{d\varphi}{dx}(\hat{x}) \times \times \frac{1}{\Phi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(\hat{x})\xi} \Phi(\xi) (\tilde{u}(\xi) - u_o)(\tilde{u}(\xi) - u_f) \xi d\xi + \frac{1}{\Phi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(\hat{x})\xi} \Phi(\xi) \left( \frac{da}{dx}(\hat{x}) \Phi(\xi) \xi + \frac{ds}{dx}(\hat{x}) \tilde{f}(\xi) \xi \right) d\xi + \mu \frac{s(\hat{x})}{\Phi(0)} \int_{-\infty}^0 e^{-a(\hat{x})\xi} \Phi(\xi) (\tilde{f}_u - \bar{f}_u^f(\hat{x})) d\xi + \mu \frac{s(\hat{x})}{\Phi(0)} \int_0^{+\infty} e^{-a(\hat{x})\xi} \Phi(\xi) (\tilde{f}_u - \bar{f}_u^o(\hat{x})) d\xi. \quad (29)$$

Потребуем выполнения следующего условия.

**Условие А4.** Пусть функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на отрезке  $[-1, 1]$ , а ее производная в точке  $\hat{x}$  такова, что величина  $D$ , заданная выражением (29), положительна.

При выполнении этого условия неравенство 4° для верхнего решения оказывается выполненным.

Аналогично проверяется выполнение этого неравенства для нижнего решения.

Условие А4 играет важную роль в постановке задачи (3), (4), поскольку его выполнение вместе с условиями А1–А3 гарантирует существование у этой задачи устойчивого по Ляпунову решения с внутренним переходным слоем, а именно справедлива следующая теорема.

**Теорема.** При выполнении условий А1–А4 и достаточно малых  $\varepsilon$  существует классическое решение  $u_s(x, \varepsilon)$  задачи (3), (4), для которого функция  $\tilde{u}$  является асимптотическим приближением порядка  $O(\varepsilon)$ , т. е.

$$|u_s(x, \varepsilon) - \tilde{u}| = O(\varepsilon), \quad (30)$$

причем это решение устойчиво по Ляпунову с областью влияния не меньше, чем сегмент  $[\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon)]$  при  $x \in [-1, 1]$  и единственно на этом сегменте.

Согласно методу дифференциальных неравенств [9], существование решения  $u_s(x, \varepsilon)$  задачи (3), (4), для которого справедливы неравенства

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq u_s(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad (31)$$

следует из существования верхнего и нижнего решений вида (23), а из неравенств (31) в свою очередь следует оценка (30).

Для доказательства устойчивости решения  $u_s(x, \varepsilon)$  рассмотрим следующую начально-краевую задачу для функции  $u(x, t, \varepsilon)$ :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + s(x)(u - u_o(x))(u - u_f(x))(u - \varphi(x)), \quad -1 < x < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\mp 1} = 0, \quad u(x, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x, \varepsilon), \quad \text{при } \alpha(x, \varepsilon) \leq u_{\text{init}}(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad (32)$$

и покажем, что решение задачи (32) существует, единственно и справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon)| = 0. \quad (33)$$

Опираясь на метод дифференциальных неравенств [9], построим функции  $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$  и  $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$  — верхнее и нижнее решения задачи (32), из существования которых будет вытекать существование и единственность решения  $u(x, t, \varepsilon)$  этой задачи, лежащего на сегменте

$$\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, t, \varepsilon) \quad \text{при } x \in [-1, 1], \quad t \geq 0. \quad (34)$$

Согласно определению [9], верхним и нижним решениями задачи (32) называются непрерывные при  $x \in [-1, 1]$ ,  $t \geq 0$  функции, для которых выполняется следующая система неравенств.

1. Упорядоченность верхнего и нижнего решений:

$$\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, t, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \quad t > 0.$$

2. Действие дифференциального оператора в уравнении (32) на верхнее и нижнее решения:

$$L_t[\widehat{\beta}] := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{\beta}}{\partial x^2} - \frac{\partial \widehat{\beta}}{\partial t} - \varepsilon a(x) \frac{\partial \widehat{\beta}}{\partial x} - s(x)(\widehat{\beta} - u_o(x))(\widehat{\beta} - u_f(x))(\widehat{\beta} - \varphi(x)) \leq 0 \leq L_t[\widehat{\alpha}],$$

при  $x \in [-1, \widehat{x}] \cup [\widehat{x}, 1]$ ,  $t \geq 0$ .

3. Условие в начальный момент времени:

$$\widehat{\alpha}(x, 0, \varepsilon) \leq u_{\text{init}}(x, \varepsilon) \leq \widehat{\beta}(x, 0, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1].$$

Кроме того, для верхнего и нижнего решений задачи (32) в каждый момент времени  $t \geq 0$  должны выполняться неравенства на краях отрезка, аналогичные 3°, и неравенства на производные в точке  $\widehat{x}$ , аналогичные 4°.

Опираясь на работы [12, 13], построим верхнее и нижнее решения задачи (32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}(x, t, \varepsilon) &= u_s(x, \varepsilon) + (\beta(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ \widehat{\alpha}(x, t, \varepsilon) &= u_s(x, \varepsilon) + (\alpha(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (35)$$

где функции  $\beta(x, \varepsilon)$  и  $\alpha(x, \varepsilon)$  определены в (23),  $\lambda$  — достаточно малое положительное число.

Для этих функций выполняются условия 1 и 3, а также условия на краях отрезка  $[-1, 1]$  и условия на производные в точке  $\widehat{x}$  в каждый момент времени  $t \geq 0$  в силу неравенств 1°, 3°, 4° и выбора начального условия задачи (32).

Покажем, что выполнено неравенство 2. В результате действия оператора  $L_t$  на верхнее решение (35) приходим к равенству

$$\begin{aligned} L_t[\widehat{\beta}] &= \varepsilon^2 \left( \frac{d^2 u_s}{dx^2} + \left( \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \frac{d^2 u_s}{dx^2} \right) e^{-\lambda t} \right) + \\ &+ \lambda(\beta - u_s)e^{-\lambda t} - \varepsilon a(x) \left( \frac{du_s}{dx} + \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{du_s}{dx} \right) e^{-\lambda t} \right) - \\ &- s(x)f(\widehat{\beta}, x). \end{aligned}$$

Здесь и далее используется обозначение  $f(u, x) = s(x)(u - u_o)(u - u_f)(u - \varphi(x))$ .

К правой части равенства добавим слагаемые  $s(x)f(u_s, x)$ ,  $s(x)f(\beta, x)e^{-\lambda t}$ ,  $-s(x)f(u_s, x)e^{-\lambda t}$ , а затем вычтем эти же слагаемые, чтобы выражение в правой части не изменилось. После группировки получим равенство

$$\begin{aligned} L_t[\widehat{\beta}] &= \varepsilon^2 \frac{d^2 u_s}{dx^2} - \varepsilon a(x) \frac{du_s}{dx} - s(x)f(u_s, x) - \\ &- \left( \varepsilon^2 \frac{d^2 u_s}{dx^2} - \varepsilon a(x) \frac{du_s}{dx} - s(x)f(u_s, x) \right) e^{-\lambda t} + \\ &+ \left( \varepsilon^2 \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \varepsilon a(x) \frac{d\beta}{dx} - s(x)f(\beta, x) \right) e^{-\lambda t} + \\ &+ \lambda(\beta - u_s)e^{-\lambda t} + s(x)(f(\beta, x) - f(u_s, x))e^{-\lambda t} - \\ &- s(x)(f(\widehat{\beta}, x) - f(u_s, x)). \end{aligned}$$

Учтем теперь, что функция  $u_s(x, \varepsilon)$  является решением уравнения (3), а также равенство (28) и оценку

$$\begin{aligned} (f(\beta, x) - f(u_s, x))e^{-\lambda t} - (f(\widehat{\beta}, x) - f(u_s, x)) &= \\ &= f_{uu}^*(\beta - u_s)^2 e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

где

$$f_{uu}^* = f_{uu}(u_s + \theta_1(\beta - u_s) + \theta_3(\theta_1 - \theta_2 e^{-\lambda t})(\beta - u_s)), \quad -1 < \theta_{1,2,3} < 1,$$

тогда приходим к равенству

$$\begin{aligned} L_t[\widehat{\beta}] &= -\varepsilon \mu s(x) \overline{f}_u^{f,0}(x) e^{-\lambda t} + \lambda(\beta - u_s) e^{-\lambda t} + \\ &+ f_{uu}^*(\beta - u_s)^2 e^{-\lambda t} + O(\varepsilon^2) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из неравенств (31) следует оценка  $\beta(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ , поэтому, выбирая константу  $\lambda$  достаточно малой, можно добиться, чтобы выражение в правой части равенства (36) принимало отрицательные значения и тем самым выполнялось неравенство 2 для верхнего решения. Аналогично доказывается, что при том же значении  $\lambda$  будет выполнено и неравенство 2 для нижнего решения.

Из существования верхнего и нижнего решений задачи (32) следует существование единственного решения  $u(x, t, \varepsilon)$  этой задачи, для которого справедливы оценки (34), а из вида (35) верхнего и нижнего решений вытекает, что при  $t \rightarrow +\infty$  выполняется предельное равенство (33), означающее асимптотическую устойчивость по Ляпунову решения задачи (3), (4).

### Пример

В качестве примера рассмотрим задачу (3), (4), где

$$\varepsilon = 0.02, \quad a = 1, \quad u_f = 3, \quad u_o = 10,$$

$$s(x) = \begin{cases} 3 \min[\exp(0.6 - 2x) - 1, 1], & x \leq 0.3, \\ 0, & x \geq 0.3. \end{cases}$$

Будем считать, что точка локализации переходного слоя  $\widehat{x} = 0.1$ , и зададим функцию  $\varphi(x)$  следующим образом:

$$\varphi(x) = A \exp(-B(x - \widehat{x})),$$

где  $A = (u_o + u_f)/2 - a/\sqrt{2s(\widehat{x})} \simeq 5.92$ ,  $B = 5$ .

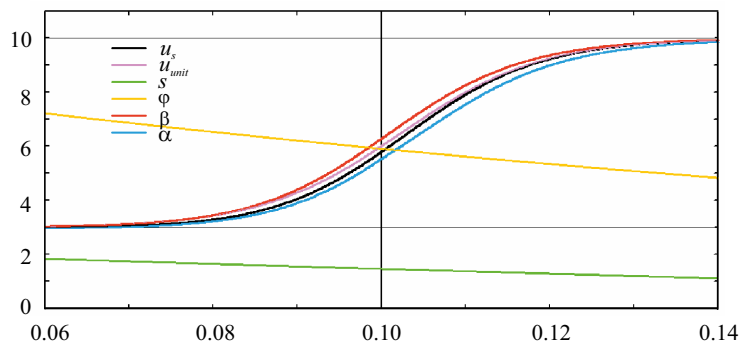
Неравенства 1°–4° окажутся выполненными, если в выражениях (23) для верхнего и нижнего решений положить  $\mu = 0.4$ ,  $\delta = 7$ ,  $\gamma = 0.5$ .

Численная реализация решения проводилась при помощи метода стационарирования решения параболической задачи (32) с начальным условием  $u_{\text{init}}$ , заключенным между верхним,  $\beta(x, \varepsilon)$ , и нижним,  $\alpha(x, \varepsilon)$ , решениями стационарной задачи к решению задачи (3), (4). Результаты проиллюстрированы на рисунке.

Вычисляя интегралы, входящие в выражение (29), по формуле трапеций, получаем  $D \simeq 0.12$ .

### Заключение

Краевые задачи, допускающие решения с устойчивыми переходными слоями, хорошо подходят для моделирования процессов переноса при наличии



Численное решение примера: черная кривая — решение задачи (3), (4), сиреневая — начальное приближение, зеленая — функция  $s(x)$ , оранжевая — функция  $\varphi(x)$ , красная — верхнее решение стационарной задачи, синяя — нижнее решение стационарной задачи

пространственной неоднородности. В ходе разработки моделей для выбора параметров краевых задач весьма эффективным оказывается использование асимптотического метода дифференциальных неравенств. Результаты, полученные в работе для одномерной модели, могут быть использованы при разработке многомерных моделей переноса в случае пространственных неоднородностей.

Исследование выполнено в рамках проекта Российского научного фонда (грант 14-14-00956).

#### Список литературы

1. Левашова Н.Т., Мухартова Ю.В., Давыдова М.А. и др. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2015. № 3. С. 3. (Levashova N.T., Muxartova Yu.V., Davydova M.A. et al. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 70, N 3. P. 167.)
2. Левашова Н.Т., Мухартова Ю.В., Ольчев А.В. // *Компьют. исследования и моделирование.* 2016. 8, № 2. С. 355.
3. Дубов А.С., Быкова Л.П., Марунич С.В. *Турбулентность в растительном покрове.* Ленинград, 1978.
4. Зилитинкевич С.С. *Динамика пограничного слоя атмосферы.* Ленинград, 1970.
5. Нефедов Н.Н., Давыдова М.А. // *Дифференц. уравнения.* 2013. 8, № 6. С. 715.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* М., 1990.
7. Volpert A.I., Volpert Vit.A., Volpert V.I.A. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems.* Rhode Island, 1993.
8. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. *Математическая теория горения и взрыва.* М., 1980.
9. Pao C.V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations.* New York, 1992.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. // *Тр. МИАИ.* 2010. 268. С. 268.
11. Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А. // *Моделир. и анализ информ. систем.* 2016. 23, № 3. С. 283.
12. Нефедов Н.Н. // *Дифференц. уравнения.* 2000. 36, № 2. С. 262.
13. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. 46, № 4. С. 614.

#### Using asymptotic analysis for developing a one-dimensional substance transport model in the case of spatial heterogeneity

A. A. Kvas<sup>1</sup>, N. T. Levashova<sup>2,a</sup>, A. K. Salnik<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics of Atmosphere; <sup>2</sup>Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.

E-mail: <sup>a</sup>natasha@npanalytica.ru.

We study a solution with an internal transition layer of a one-dimensional boundary value problem for the stationary reaction–advection–diffusion differential equation that arises in mathematical modeling of transport phenomena in the surface layer of the atmosphere in the case of non-uniform vegetation on the assumption of space isotropy along one of the horizontal axes and neutral atmospheric stratification. The parameters of the model at which a boundary value problem has a stable stationary solution with an internal transition layer localized near the boundary between different vegetation types are provided. The existence of such a solution and its local Lyapunov stability and uniqueness are proven. The results can be used for developing multidimensional substance transfer models in the case of a spatial heterogeneity.

**Keywords:** contrast structures, internal transition layer, method of differential inequalities, transport equation.

PACS: 02.30.Hq, 92.60.Fm.

Received 21 November 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2017. 72, No. 6. Pp. 518–526.

#### Сведения об авторах

1. Квас Александр Андреевич — магистр, 2-й курс; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: kvalexandr@yandex.ru.
2. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: natasha@npanalytica.ru.
3. Сальник Александра Константиновна — магистр, 2-й курс; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: orangefrog@list.ru.