Электромагнитные волны в среде с винтовыми дислокациями

Н. Э. Смирнов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: smirnov@phys.msu.ru

Статья поступила 13.12.2016, подписана в печать 20.01.2017.

Показано, что в сплошной среде с винтовыми дислокациями, ориентированными преимущественно вдоль одной оси, скорость вращения плоскости поляризации электромагнитной волны при ее распространении в направлении, перпендикулярном этой оси, во много раз превышает скорость ее вращения при распространении вдоль оси. Определены условия, при которых для заданного тензора плотности дислокаций скорость вращения плоскости поляризации электромагнитной волны максимальна.

Ключевые слова: твердое тело, дислокации, электродинамика, геометрическая оптика.

УДК: 537.877, 537.867, 537.9, 535.131, 538.911, 514.83, 514.754.7, 53.01, 53.043. PACS: 61.72.–y, 61.72.Bb, 61.72.Lk, 41.20.–q, 42.15.–i, 78.90.+t.

В рамках калибровочного описания структурных дефектов в твердом теле [1–8] было показано, что в качестве модели сплошной среды с дефектами можно использовать пространство Римана–Картана $\mathcal{U}_4$ с неевклидовой метрикой $g_{\mu\nu}$ и несимметричным объектом связности $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. При этом внутренние напряжения, возникающие в кристаллах вследствие наличия дефектов кристаллической решетки, моделируются как изменение геометрии континуума.

Настоящая работа посвящена изучению влияния распределения винтовых дислокаций на прохождение электромагнитных волн через кристаллы. Эта статья является третьей в серии работ, исследующих влияние структурных дефектов на электромагнитное поле внутри кристаллов [9, 10].

В первом разделе коротко напомним основные положения [9] приближения геометрической оптики для электромагнитной волны в кристаллах с дефектами. Во втором разделе получим зависимость угла поворота плоскости поляризации электромагнитной волны от произвольного симметричного тензора плотности дислокаций. В третьем разделе изучим распространение электромагнитной волны в сплошной среде с винтовыми дислокациями, ориентированными преимущественно вдоль одного направления. В заключении кратко обсудим полученные результаты и перспективы дальнейших исследований.

1. Приближение геометрической оптики

В работе [9] было показано, что экспериментально определяемому тензору $\widehat{\rho}$ плотности дислокаций можно сопоставить тензор кручения $\widehat{Q}$, равный

$$Q^i_{kl} = \varkappa \varepsilon_{jkl} \rho^{ij}, \tag{1}$$

где ε_{jkl} — полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты, $\varkappa$ — константа взаимодействия электромагнитного поля с дефектами. В этом случае уравнения для электромагнитного поля в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций будут [9]:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{D} = \varkappa\left((\widehat{\rho})_{ij} - (\widehat{\rho}^\top)_{ij}\right)\varepsilon^{ikj} D_k,\\
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{H} = 2\varkappa\widehat{\rho}^\top\mathbf{H},\\
&\operatorname{div}\mathbf{B} = \varkappa((\widehat{\rho})_{ij} - (\widehat{\rho}^\top)_{ij})\varepsilon^{ikj} B_k,\\
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = -2\varkappa\widehat{\rho}^\top\mathbf{E},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{D}$ — индукция электрического поля, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля, $(\widehat{\rho}^\top)_{ij} = (\widehat{\rho})_{ji}$ — транспонированная матрица тензора плотности дислокаций. Здесь и в дальнейшем $\widehat{\rho}^\top\mathbf{E}$ означает $(\widehat{\rho}^\top\mathbf{E})_i = (\widehat{\rho}^\top)_{ij}E_j$ и т. п.

Опираясь на метод Дебая–Рытова [11, 12], в [9] было показано, что однородная система уравнений для нулевого приближения имеет два линейно независимых решения [9]:

$$\mathbf{E}_0 = F_1\mathbf{n} + F_2\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{B}_0 = -F_2\mathbf{n} + F_1\boldsymbol{\beta}, \tag{3}$$

где $F_i(x, y, z)$ — произвольные функции координат $(i = 1, 2)$, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к кривой, а $\boldsymbol{\beta}$ — вектор бинормали к кривой. Введем угол $\varphi = \operatorname{arctg}(F_2/F_1)$ между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}_0$ и вектором главной нормали $\mathbf{n}$ к лучу (угол «поляризации»). Для того чтобы фиксировать F_1 и F_2, воспользуемся условиями разрешимости системы уравнений для приближения первого порядка [9]:

$$\operatorname{div}\left((F_1^2 + F_1^2)\mathbf{t}\right) = 0, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} + \varkappa(n_i\rho_{ij}n_j + \beta_i\rho_{ij}\beta_j). \tag{4}$$

где $\mathbf{t} = \nabla\Phi$ — единичный вектор, касательный к эйконалу, по которому распространяется электромагнитная волна, $\frac{d}{ds} \equiv (\mathbf{t}, \nabla)$, а s — длина дуги и T — радиус кручения кривой.

Существует ряд практических задач, в которых представляет интерес только вопрос о распространении электромагнитных волн в сплошной среде с линейными дефектами. В соответствии с геометрической точкой зрения решение этих задач сводится к нахождению уравнений для экстремалей в пространстве Римана–Картана $\mathcal{U}_4$ [13]. Для случая стационарного распределения дислокаций, используя соотношение $\Gamma^i_{jk} = Q^i_{jk} + Q^i_{jk} + Q^i_{kj}$, получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2X^0}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2X^i}{ds^2} + \varkappa\{\varepsilon_{lim}\rho_{km} + \varepsilon_{kin}\rho_{ln}\}\frac{dX^k}{ds}\frac{dX^l}{ds} = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения: $v^k = \frac{dX^k}{ds}$ — групповая скорость и $v'^k = \frac{d^2X^k}{ds^2}$ — ускорение, где s — натуральный параметр кривой. Второе, третье и четвертое уравнения (5) запишутся следующим образом:

$$v'_i + \varkappa\{\varepsilon_{lim}\rho_{km} + \varepsilon_{kin}\rho_{ln}\}v_k v_l = 0. \tag{6}$$

Исследуем теперь, чему равно $\frac{d}{ds}(\mathbf{v}^2) = 2v_i v'_i = -2\varkappa\{\varepsilon_{lim}\rho_{km} + \varepsilon_{kin}\rho_{ln}\}v_i v_k v_l$. Так как в выражении $\{\varepsilon_{lim}\rho_{km} + \varepsilon_{kin}\rho_{ln}\}v_k v_l v_i$ все индексы немые, то $\frac{d}{ds}(\mathbf{v}^2) = 0$. Следовательно, $\mathbf{v}' \perp \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^2 = 1$, так как s — натуральный параметр. После несложных преобразований уравнения (6) запишем в векторной форме:

$$\mathbf{v}' = 2\varkappa[\mathbf{v}, \widehat{\rho}^{\top}\mathbf{v}]. \tag{7}$$

Это замкнутая система дифференциальных уравнений, позволяющая при заданном во всей области тензоре $\widehat{\rho}$ плотности дислокаций и заданном в начальной точке векторе групповой скорости $\mathbf{v}$ определить эволюцию последнего в этой области и кривую, по которой распространяется электромагнитная волна в сплошной среде.

Электромагнитная волна характеризуется не только направлением распространения, но и направлениями векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Для определения их ориентации в каждой точке необходимо ввести три взаимно ортогональных вектора, однозначно определяемых кривой, по которой распространяется электромагнитная волна в сплошной среде. Таким набором векторов является трехгранник Френе $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}\}$: вектор $\mathbf{t}$, касательный к кривой (совпадает с вектором групповой скорости $\mathbf{v}$), вектор направления главной нормали $\mathbf{n}$ и вектор направления бинормали $\boldsymbol{\beta}$.

Для того чтобы найти вращение трехгранника Френе, воспользуемся следующими соотношениями [14]:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{t}}{R} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{T}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{T}, \tag{8}$$

где R — радиус кривизны кривой, а T — радиус кручения кривой.

Далее, используя эквивалентность $\mathbf{t}$ и $\mathbf{v}$, из формул Френе получим

$$\frac{1}{R} = |\,[\mathbf{v}, \mathbf{v}']\,| \quad \text{и} \quad \frac{1}{T} = \frac{(\mathbf{v}''[\mathbf{v}', \mathbf{v}])}{(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}, \tag{9}$$

где $\mathbf{v}'' = \frac{d^2\mathbf{v}}{ds^2}$.

Предположим, что тензор плотности дислокаций симметричен, что соответствует, например, наличию только винтовых дислокаций [5], тогда, учитывая, что $\mathbf{v}^2 = 1$, находим

$$\frac{1}{R} = 2\varkappa\sqrt{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}. \tag{10}$$

Вычислим теперь $\frac{1}{T}$ при той же параметризации луча. После громоздких, но несложных расчетов получим:

$$\frac{1}{T} = -\frac{(\rho_{mk,l}v_l v_k)[\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v}]_m}{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2} + 2\varkappa(\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v}) - 2\varkappa(\operatorname{tr}\widehat{\rho}) + 2\varkappa\frac{(\widehat{\rho}\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v})) - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})(\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v}))}{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}, \tag{11}$$

где $\rho_{km,q} = \frac{\partial\rho_{km}}{\partial X_q}$ — частные производные от компонент тензора $\widehat{\rho}$ по координатам, $\operatorname{tr}\widehat{\rho} = \rho_{ii}$. Из (8) и (9) следует зависимость векторов $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\beta}$ от $\mathbf{v}(s)$ и $\widehat{\rho}$:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v}]}{\sqrt{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{-(\widehat{\rho}\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})(\mathbf{v})}{\sqrt{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}}. \tag{12}$$

2. Вращение плоскости поляризации электромагнитной волны

С учетом зависимости $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и характеристик эйконала R и T от параметра s получаем полное выражение для скорости вращения плоскости поляризации электромагнитной волны в сплошной среде с линейными дефектами в сопутствующей системе координат:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{(\rho_{mk,l}v_l v_k)[\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v}]_m}{-(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2} - \varkappa(\operatorname{tr}\widehat{\rho} - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})) + 2\varkappa\frac{(\widehat{\rho}\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v})) - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})(\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v}))}{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}. \tag{13}$$

В общем подходе можно выделить два принципиально различных случая. Первый — когда электромагнитная волна распространяется по прямой, т. е. $\mathbf{v}' = 0$, второй — когда $\mathbf{v}' \neq 0$.

Рассмотрим случай $\mathbf{v}' = 0$. Из $[\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v}] = 0$ следует, что $\widehat{\rho}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$, где $\alpha \neq 0$, и так как $\frac{1}{T} = 0$, то угол поворота плоскости поляризации Ψ равен изменению угла φ:

$$\Psi = \Delta\varphi = \varkappa\int_{s_1}^{s_2}(\operatorname{tr}\widehat{\rho} - \alpha)\,ds = \varkappa(\operatorname{tr}\widehat{\rho} - \alpha)\Delta s. \tag{14}$$

Исследуем второй, более сложный случай, когда $\mathbf{v}' \neq 0$. Вращение плоскости поляризации определяется не только изменением угла между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ в сопутствующей системе координат, но и изменением ориентации осей сопутствующей системы координат относительно некоторой фиксированной системы координат. Формально интегрируя (13) и учитывая, что $\rho_{mk}(\mathbf{r})$ — функция координат, получим

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \int_{s_1}^{s_2}\frac{(\rho_{mk,l}v_l v_k)[\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v}]_m}{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}\,ds - \varkappa\int_{s_1}^{s_2}(\operatorname{tr}\widehat{\rho} - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v}))\,ds +$$

$$+2\varkappa\int_{s_1}^{s_2}\frac{(\mathbf{v}\widehat{\rho}(\widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v})))-(\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})(\mathbf{v}\widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v}))}{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2-(\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}ds, \quad (15)$$

где φ_1, φ_2 — углы между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$, а s_1 и s_2 — значения s в начальной и конечной точках соответственно.

Таким образом, для вычисления направления $\mathbf{E}$ в конечной точке необходимо знать φ_1 и ориентации реперов Френе в начальной и конечной точках. Выберем для единичного вектора $\mathbf{e}$, направление которого совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, представление $\mathbf{e}=\mathbf{n}\cos\varphi+\boldsymbol{\beta}\sin\varphi$. Тогда после подстановки в соотношения (12) решения системы уравнений (7) можно однозначно определить состояние поляризации в конечной точке при заданном состоянии поляризации в начальной точке.

Понятно, что конкретные измерения в поляризационных экспериментах существенным образом зависят от геометрии экспериментальной установки. В связи с этим в свое время обсуждался вопрос о правомерности введения понятия «плоскость поляризации» [15]. Но, с другой стороны, для линейно поляризованного света это понятие широко используется при решении ряда практических задач.

Поэтому рассмотрим вопрос о вращении плоскости поляризации. Плоскость поляризации — это плоскость, образованная векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{v}$ [15]. Следовательно, угол поворота плоскости поляризации Ψ равен углу между плоскостями, задаваемыми векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{v}$, в начальной и конечной точках. Воспользовавшись соотношением между векторами $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\beta}$, получим

$$\cos\Psi=\big((\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)\cos\varphi_1-(\boldsymbol{\beta}_2,\mathbf{n}_1)\sin\varphi_1\big)\cos\varphi_2-\\-\big((\mathbf{n}_2,\boldsymbol{\beta}_1)\cos\varphi_1+(\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_1)\sin\varphi_1\big)\sin\varphi_2.$$

Выражения для $(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$, $(\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_j)$ и $(\boldsymbol{\beta}_i,\mathbf{n}_j)$, где $i,j=1,2$, нетрудно записать в явном виде, воспользовавшись (12). Для дальнейших расчетов удобно ввести следующие обозначения:

$$G=\sqrt{(\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)^2-(\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)^2}\sqrt{(\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2)^2-(\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2)^2}, \quad (16)$$

$$A=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)G=\\=(\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)+(\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)-\\-(\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)-(\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1), \quad (17)$$

$$B=(\boldsymbol{\beta}_2,\mathbf{n}_1)G=\\=(\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2,[\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1])-(\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_2,[\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1]), \quad (18)$$

$$C=(\mathbf{n}_2,\boldsymbol{\beta}_1)G=\\=(\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1,[\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2])-(\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1,[\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2]), \quad (19)$$

$$D=(\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_1)G=\\=(\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)-(\mathbf{v}_2,\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1,\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2). \quad (20)$$

Тогда получим следующее выражение для угла Ψ поворота плоскости поляризации:

$$\Psi=\arccos\bigg(\frac{A}{G}\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\frac{B}{G}\cos\varphi_2\sin\varphi_1+\\+\frac{C}{G}\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\frac{D}{G}\sin\varphi_2\sin\varphi_1\bigg), \quad (21)$$

где φ_2 задается формулой (15). Здесь конечная точка принадлежит эйконалу, определяемому уравнением изотропной геодезической (7), и начальные условия в начальной точке также задаются на этой кривой. Таким образом, угол Ψ полностью определен, так как система уравнений (7) разрешима ввиду ее замкнутости.

3. Электромагнитные волны в среде со стационарным однородным распределением винтовых дислокаций

На основе анализа данных о распределении дислокаций, полученных в ряде работ [16–19], можно сделать вывод, что винтовые дислокации преимущественно ориентированы вдоль одной оси (примем ее за OX) и тензор плотности дислокаций $\widehat{\rho}$ диагонален и имеет следующие компоненты: $\rho_{11}=\rho_{\parallel}$, $\rho_{22}=\rho_{33}=\rho_{\perp}$ и $\rho_{\parallel}\gg\rho_{\perp}$.

Пусть волна распространяется по прямой. Рассмотрим две ситуации: распространение волны в направлении, параллельном вектору Бюргерса $\mathbf{b}$, и в направлении, перпендикулярном ему. Пусть $\mathbf{v}\parallel\mathbf{b}$, тогда из сделанных предположений и (14) следует

$$\Psi=\Delta\varphi=2\varkappa\rho_{\perp}\Delta s. \quad (22)$$

В случае когда $\mathbf{v}\perp\mathbf{b}$, получим следующее выражение для Ψ:

$$\Psi=\Delta\varphi=\varkappa(\rho_{\perp}+\rho_{\parallel})\Delta s\cong\varkappa\rho_{\parallel}\Delta s. \quad (23)$$

Таким образом, очевидно, что в силу $|\rho_{\parallel}|\gg|\rho_{\perp}|$ угол поворота плоскости поляризации волны при ее распространении в области, занятой дислокациями, перпендикулярно суммарному вектору Бюргерса всех дислокаций много больше, чем при ее распространении в той же области, но в направлении, параллельном вектору Бюргерса.

Обозначим проекцию вектора групповой скорости $\mathbf{v}$ волны на ось OX через $v_{\parallel}$, а его проекцию на плоскость (YOZ) через $v_{\perp}$. Тогда вектор $\mathbf{v}$ групповой скорости можно записать в виде

$$\mathbf{v}=v_{\parallel}\mathbf{i}+v_{\perp}(\mathbf{j}\cos\gamma+\mathbf{k}\sin\gamma), \quad (24)$$

где γ — угол между проекцией вектора групповой скорости $\mathbf{v}$ на плоскость (YOZ) и осью OY. Тогда для $\widehat{\rho}\mathbf{v}$ получим следующее выражение:

$$\widehat{\rho}\mathbf{v}=\rho_{\parallel}v_{\parallel}\mathbf{i}+\rho_{\perp}v_{\perp}(\mathbf{j}\cos\gamma+\mathbf{k}\sin\gamma). \quad (25)$$

Напомним, что в уравнения (8) для определения вектора групповой скорости $\mathbf{v}$ входит векторное произведение $[\mathbf{v},\widehat{\rho}\mathbf{v}]$. Найдем $[\mathbf{v},\widehat{\rho}\mathbf{v}]$, используя (24), (25):

$$[\mathbf{v},\widehat{\rho}\mathbf{v}]=\big(\rho_{\parallel}-\rho_{\perp}\big)\cdot v_{\parallel}v_{\perp}\cdot(\mathbf{j}\sin\gamma-\mathbf{k}\cos\gamma). \quad (26)$$

Тогда уравнения для определения вектора групповой скорости примут следующий вид:

$$v'_x = 0, \quad v'_y = 2\varkappa \cdot (\rho_\parallel - \rho_\perp) \cdot v_\parallel v_z = \eta v_z, \\ v'_z = -2\varkappa \cdot (\rho_\parallel - \rho_\perp) \cdot v_\parallel v_y = -\eta v_y. \tag{27}$$

где

$$\eta = 2\varkappa \cdot (\rho_\parallel - \rho_\perp) \cdot v_\parallel. \tag{28}$$

Из уравнения $v'_x = 0$ следует $v_x = \mathrm{const} = v_\parallel$. Учитывая, что $\mathbf{v}^2 = 1$, получим соотношение для определения $v_\perp = \sqrt{1 - v_\parallel^2} = \mathrm{const}$. Решая систему уравнений (27) для вектора групповой скорости в точке, характеризуемой параметром s, получим соотношение

$$\mathbf{v} = \big(v_\parallel, v_\perp \cos(\gamma - \eta s), v_\perp \sin(\gamma - \eta s)\big). \tag{29}$$

Воспользовавшись тем, что $v_i = dx_i/ds$, и проинтегрировав эти соотношения при нулевых начальных условиях, придем к следующему выражению для координат точки:

$$(x, y, z) = \left(v_\parallel \cdot s, \ -\frac{v_\perp}{\eta} \cdot \sin(\gamma - \eta s), \ \frac{v_\perp}{\eta} \cdot \cos(\gamma - \eta s)\right). \tag{30}$$

Итак, (30) определяет кривую, по которой распространяется электромагнитная волна в сплошной среде со стационарным и однородным распределением винтовых дислокаций при заданных начальных условиях. Перейдем теперь к изучению вопроса о вращении плоскости поляризации электромагнитной волны при ее распространении в сплошной среде с таким распределением дефектов. Вследствие диагональности тензора плотности дислокаций $\widehat{\rho}$ выполняется соотношение $\widehat{\rho}(\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) = \rho_\parallel \mathbf{v}_\parallel + \rho_\perp \mathbf{v}_\perp$, что приводит с учетом ортогональности $(\widehat{\rho}\mathbf{v})_\parallel$ и $(\widehat{\rho}\mathbf{v})_\perp$ к следующим соотношениям:

$$(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 = \rho_\parallel^2 v_\parallel^2 + \rho_\perp^2 v_\perp^2 = \mathrm{const}, \\ (\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v})^2 = (\rho_\parallel v_\parallel^2 + \rho_\perp v_\perp^2)^2 = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Найдем G в (21), преобразовав (16) к виду $G = (\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v})^2$:

$$G = \rho_\parallel^2 v_\parallel^2 + \rho_\perp^2 v_\perp^2 - \rho_\parallel^2 v_\parallel^4 - \rho_\perp^2 v_\perp^4 - \\ - 2\rho_\parallel \rho_\perp v_\parallel^2 v_\perp^2 = (\rho_\parallel - \rho_\perp)^2 \cdot v_\parallel^2 v_\perp^2 = \mathrm{const}. \tag{32}$$

Поэтому G не зависит от натурального параметра s эйконала и полностью определяется тензором $\widehat{\rho}$ плотности однородного распределения винтовых дислокаций и начальными условиями для вектора групповой скорости $\mathbf{v}$ в сплошной среде.

Последовательно вычисляя соотношения, входящие в выражение (17) для определения A, найдем

$$A/G = v_\parallel^2 + v_\perp^2 \cdot \cos(\eta(s_2 - s_1)). \tag{33}$$

Проводя аналогичные вычисления для (18)–(20), находим для коэффициентов B/G, C/G и D/G, входящих в (21), следующие выражения:

$$B/G = -v_\parallel \cdot \sin(\eta(s_2 - s_1)), \tag{34}$$

$$C/G = v_\parallel \cdot \sin(\eta(s_2 - s_1)), \tag{35}$$

$$D/G = \cos(\eta(s_2 - s_1)). \tag{36}$$

Подставляя соотношения (33), (34), (35) и (36) в выражение для косинуса угла поляризации Ψ, получим

$$\cos\Psi = \cos(\eta(s_2 - s_1)) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ + v_\parallel \cdot \sin(\eta(s_2 - s_1)) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ + v_\perp^2 \big(1 - \cos(\eta(s_2 - s_1))\big) \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1. \tag{37}$$

Найдем, чему равна разность углов φ_2 и φ_1 для однородного распределения винтовых дислокаций, ориентированных преимущественно вдоль одной оси, используя выражение (15):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\varkappa \int_{s_1}^{s_2} (\mathrm{tr}\,\widehat{\rho} - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v}))\, ds + \\ + 2\varkappa \int_{s_1}^{s_2} \frac{(\widehat{\rho}\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v})) - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})(\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v}))}{(\widehat{\rho}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})^2}\, ds, \tag{38}$$

где φ_1, φ_2 — углы между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектором $\mathbf{n}$ главной нормали в начальной и конечной точках соответственно, S_1 и S_2 — значения s натурального параметра кривой в начальной и конечной точках.

Покажем, что для данного распределения дислокаций подинтегральные выражения в (38) не зависят от s. Учитывая однородность тензора плотности дислокаций и введенные выше обозначения для его компонент, получим следующее выражение для его следа $\mathrm{tr}\,\widehat{\rho} = \rho_\parallel + 2 \cdot \rho_\perp$, не зависящее от параметра s. Согласно (31), выражение $(\mathbf{v}\widehat{\rho}\mathbf{v})$ не зависит от s. Знаменатель второго подынтегрального выражения, согласно (32), тоже не зависит от s. Исследуем числитель во втором подынтегральном выражении:

$$(\widehat{\rho}\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v})) - (\mathbf{v}, \widehat{\rho}\mathbf{v})(\mathbf{v}, \widehat{\rho}(\widehat{\rho}\mathbf{v})) = \\ = (\rho_\parallel - \rho_\perp)^2 \cdot (\rho_\parallel + \rho_\perp) \cdot v_\parallel^2 \cdot v_\perp^2 = \mathrm{const}. \tag{39}$$

Очевидно, он не зависит от s. Поэтому для разности $\varphi_2 - \varphi_1$ получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varkappa(\rho_\parallel + \rho_\perp)(s_2 - s_1) + \varkappa(\rho_\parallel - \rho_\perp) v_\parallel^2 (s_2 - s_1) = \\ = \omega(s_2 - s_1), \tag{40}$$

где

$$\omega = \varkappa(\rho_\parallel + \rho_\perp) + \varkappa(\rho_\parallel - \rho_\perp) v_\parallel^2. \tag{41}$$

Используя (40) и (41), получим следующее выражение для косинуса угла Ψ:

$$\cos\Psi = \cos(\eta(s_2 - s_1)) \cdot \cos(\omega(s_2 - s_1)) + \\ + v_\parallel \cdot \sin(\eta(s_2 - s_1)) \cdot \sin(\omega(s_2 - s_1)) + \\ + v_\perp^2 \cdot \big(1 - \cos(\eta(s_2 - s_1))\big) \cdot \cos(\varphi_1 + \omega(s_2 - s_1)) \cdot \cos\varphi_1. \tag{42}$$

Так как $\mathbf{v}(s)^2 = 1$, то можно ввести угол θ такой, что $v_\parallel = \cos\theta$, а $v_\perp = \sin\theta$. Тогда угол поворота плоскости поляризации Ψ равен

$$\Psi = \arccos\Big\{ \Big((1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi_1) \cos(\eta(s_2 - s_1)) +$$

$$+\sin^2\theta\cos^2\varphi_1\Big)\cos(\omega(s_2-s_1))+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\cdot\sin^2\theta\sin(2\varphi_1)\big(\cos(\eta(s_2-s_1))-1\big)+\right.$$
$$\left.+\cos\theta\sin(\eta(s_2-s_1))\right)\sin(\omega(s_2-s_1))\Big\}, \quad (43)$$

где φ_1 — угол между вектором $\mathbf{E}$ и направлением нормали $\mathbf{n}$ к лучу в начальной точке.

Очевидно, что Ψ является однородной функцией от (s_2-s_1). Следовательно, скорость вращения плоскости поляризации $d\Psi/ds$ постоянна и не зависит от выбора точки на луче (т. е. от s), а зависит только от характеристик однородного распределения винтовых дислокаций ($\varkappa\rho_\parallel$ и $\varkappa\rho_\perp$) и начальных условий (θ и φ_1). Поэтому при исследовании (43) можно положить параметр s_1 равным нулю, а параметр s_2 обозначить как s.

Исследуем граничные случаи: когда электромагнитная волна распространяется по оси OX (угол $\theta=0$) и перпендикулярно этой оси ($\theta=\pi/2$).

В первом граничном случае угол θ между вектором групповой скорости и осью OX равен нулю. Следовательно,

$$\Psi=\arccos\{\cos(\eta s)\cdot\cos(\omega s)+\sin(\eta s)\cdot\sin(\omega s)\}=$$
$$=(\omega-\eta)\cdot s. \quad (44)$$

Из выражения (44) следует, что скорость вращения плоскости поляризации $d\Psi/ds$ с учетом (41) и (28) будет равна

$$\frac{d\Psi}{ds}=\omega-\eta=\varkappa(\rho_\parallel+\rho_\perp)+\varkappa(\rho_\parallel-\rho_\perp)-2\varkappa\cdot(\rho_\parallel-\rho_\perp)=$$
$$=2\varkappa\cdot\rho_\perp. \quad (45)$$

Сравнивая выражение (45) для скорости вращения плоскости поляризации $d\Psi/ds$ с выражением (22) для изменения угла φ между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектором главной нормали $\mathbf{n}$ к кривой в сопутствующей системе координат, заметим, что после дифференцирования по s выражения (22), для $d\varphi/ds$ получится соотношение, эквивалентное (45):

$$\frac{d\Psi}{ds}=\frac{d\varphi}{ds}=2\varkappa\cdot\rho_\perp. \quad (46)$$

В втором граничном случае угол θ между вектором групповой скорости и осью OX равен $\pi/2$. Следовательно,

$$\Psi=\arccos\{\cos(\eta s)\cdot\cos(\omega s)\}=\omega\cdot s, \quad (47)$$

так как $\eta=2\varkappa\cdot(\rho_\parallel-\rho_\perp)\cdot\cos\theta=0$.

Из выражения (47) следует, что скорость вращения плоскости поляризации $d\Psi/ds$ с учетом (41) и (28) будет равна

$$\frac{d\Psi}{ds}=\omega=\varkappa\cdot(\rho_\parallel+\rho_\perp). \quad (48)$$

Сравнивая выражение (48) для скорости вращения плоскости поляризации $d\Psi/ds$ с выражением (23) для изменения угла φ между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектором главной нормали $\mathbf{n}$ к кривой в сопутствующей системе координат, видим, что после дифференцирования по s выражения (23) для $d\varphi/ds$ получится соотношение, эквивалентное (48):

$$\frac{d\Psi}{ds}=\frac{d\varphi}{ds}=\varkappa\cdot(\rho_\parallel+\rho_\perp). \quad (49)$$

Полученные выражения (46), (49) для скорости вращения плоскости поляризации электромагнитной волны $d\Psi/ds$ в выбранной системе координат не зависят от натурального параметра s эйконала и угла φ_1 между вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектором главной нормали $\mathbf{n}$ к лучу в начальной точке.

Найдем скорость вращения плоскости поляризации $d\Psi/ds$ при произвольных начальных условиях и характеристиках однородного и стационарного распределения винтовых дислокаций, воспользовавшись однородностью зависимости Ψ от s и ограничиваясь в зависимости $\cos\Psi$ от параметра s членами нулевого, первого и второго порядков малости по s:

$$\frac{d\Psi}{ds}=\sqrt{\{1-\sin^2(\theta)\cdot\cos^2(\varphi_1)\}\cdot\eta^2-2\cdot\eta\omega\cdot\cos\theta+\omega^2}. \quad (50)$$

Учтем соотношения (41) и (28), определяющие величины η и ω через характеристики стационарного и однородного распределений винтовых дислокаций и начальные условия на границе. Так как винтовые дислокации ориентированы преимущественно вдоль одной оси, т. е. $\rho_\parallel\gg\rho_\perp$, то $\rho_\perp/\rho_\parallel\ll 1$. Следовательно, при исследовании зависимости скорости вращения плоскости поляризации электромагнитной волны $d\Psi/ds$ от начальных условий можно пренебречь членами, пропорциональными $\rho_\perp/\rho_\parallel$. Тогда

$$\frac{d\Psi}{ds}=\varkappa\rho_\parallel\times$$
$$\times\sqrt{1+2\cos^2\theta-3\cos^4\theta-4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi_1}. \quad (51)$$

Найдем, при каких углах θ и φ_1 для заданного распределения дислокаций скорость вращения плоскости поляризации будет максимальной. Необходимым условием экстремума функции (51) является равенство нулю ее дифференциала. То есть θ и φ_1 являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d\Psi}{ds}\right)'_\theta=0,\\[2mm] \left(\dfrac{d\Psi}{ds}\right)'_{\varphi_1}=0,\end{cases} \quad (52)$$

или

$$\Big[2\cos\theta\cdot\sin\theta\times$$
$$\times(-1+3\cos^2\theta+2\cos^2\varphi_1-4\cos^2\theta\cos^2\varphi_1)\Big]\times$$
$$\times\sqrt{1+2\cos^2\theta-3\cos^4\theta-4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi_1}^{\,-1}=0 \quad (53)$$

и

$$\frac{4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_1}{\sqrt{1+2\cos^2\theta-3\cos^4\theta-4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi_1}}=0. \tag{54}$$

Проанализируем полученную систему уравнений (53), (54). Второе уравнение эквивалентно следующей совокупности уравнений:

$$\cos\varphi_1=0\quad\text{или}\sin\varphi_1=0\quad\text{или}\cos\theta=0\quad\text{или}\sin\theta=0. \tag{55}$$

При $\cos\theta=0$ или $\sin\theta=0$ выполняется $(d\Psi/ds)'_\theta=0$ и $(d\Psi/ds)'_{\varphi_1}=0$ при любом φ_1. Найдем, чему равно $d\Psi/ds$ при $\cos\theta=0$:

$$\frac{d\Psi}{ds}=\varkappa\rho_{\|}. \tag{56}$$

При $\sin\theta=0$

$$\frac{d\Psi}{ds}=0. \tag{57}$$

Полученное значение $d\Psi/ds$ при $\sin\theta=0$ меньше, чем значение $d\Psi/ds$ при $\cos\theta=0$. Поэтому при нахождении максимума $d\Psi/ds$ можно не учитывать случай $\sin\theta=0$, т. е. будем полагать, что $\sin\theta$ не равен нулю.

Исследуем случай, когда $\cos\varphi_1=0$. Тогда уравнение (53) примет следующий вид:

$$-1+3\cos^2\theta=0. \tag{58}$$

Решая его, получим следующее значение для угла θ:

$$\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi\cdot m\quad\text{или}\quad\theta=-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi\cdot m, \tag{59}$$

где m — любое целое число. Найдем $d\Psi/ds$ из (51) при этих значениях угла θ:

$$d\Psi/ds=2\varkappa\frac{\rho_{\|}}{\sqrt{3}}. \tag{60}$$

Исследуем случай, когда $\sin\varphi_1=0$. Тогда уравнение (53) примет вид

$$1-\cos^2\theta=0, \tag{61}$$

что эквивалентно четвертому случаю в (55).

Следовательно, максимальное значение скорости вращения плоскости поляризации электромагнитной волны будет наблюдаться в том случае, когда угол между вектором $\mathbf{E}$ и вектором $\mathbf{n}$ главной нормали к кривой, по которой распространяется электромагнитная волна в сплошной среде со стационарным и однородным распределением винтовых дислокаций, ориентированных преимущественно вдоль одной оси, составляет $\pi/2$, а угол θ между направлением распространения электромагнитной волны и этой осью равен $3\pi/10$, или $54,7°$. Приведенные экспериментальные данные [20, 21] дают значение $\pi/3<\theta<\pi/2$. В нашем подходе была введена неизвестная константа $\varkappa$, величина которой может быть найдена из данных по изучению магнитопластического эффекта в немагнитных кристаллах [22] и приблизительно равна $1.5\cdot10^{-2}$. В настоящее время неизвестны эксперименты, которые напрямую измеряли бы $\varkappa$. Возможность постановки таких экспериментов будет обсуждена в последующих работах.

Заключение

С помощью уравнений для экстремалей в пространстве $\mathcal{U}_4$ получена замкнутая система дифференциальных уравнений для определения вектора групповой скорости электромагнитной волны в любой точке сплошной среды с заданным стационарным распределением дислокаций. В локальной системе координат найдены зависимости векторов главной нормали и бинормали по отношению к эйконалу, а также зависимости основных характеристик эйконала (радиуса кручения и кривизны) от тензора плотности дислокаций, натурального параметра кривой, вектора групповой скорости.

Получено выражение для поворота плоскости поляризации электромагнитной волны в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций, описываемым симметричным тензором плотности дислокаций.

Показано, что в сплошной среде со стационарным распределением винтовых дислокаций, ориентированных преимущественно вдоль одного направления, скорость вращения плоскости поляризации электромагнитной волны при ее распространении в направлении, перпендикулярном направлению преимущественной ориентации винтовых дислокаций, будет во много раз больше скорости вращения плоскости поляризации электромагнитной волны при ее распространении в направлении преимущественной ориентации винтовых дислокаций. Определены условия, при которых для заданного тензора плотности дислокаций скорость вращения плоскости поляризации электромагнитной волны будет максимальной.

Автор выражает свою благодарность сотрудникам кафедры теоретической физики за многочисленные дискуссии и участникам семинара кафедры молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества физического факультета МГУ за обсуждение затронутых здесь вопросов.

Список литературы

1. *Kröner E.* Continium Theory of Defects. Series of Lectures Held at the Summer School on the Physics of Defects. Les Houches, 1980.
2. *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М., 1987.
3. *Kupferman R., Moshe M., Solomon J.P.* // Arch. Ration. Mech. Anal. 2015. **216**, N 3. P. 1009.
4. RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry. Vol. 1–4 / Ed. by K. Kondo. Tokyo, 1955, 1958, 1962, 1968.
5. *Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К.* и др. Введение в микромеханику. М., 1987.

6. *Viswanathan K., Chandrasekar S.* // J. Appl. Phys. 2014. **116**. P. 245103.
7. *Hehl F., Lazar M.* // Foundations of Physics. 2010. **40**, N 9. P. 1298.
8. *Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В.* // Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск, 1985.
9. *Пронин П.И., Смирнов Н.Э.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 2. С. 16. (*Pronin P.I., Smirnov N.Ed.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **71**, N 2. P. 155.)
10. *Пронин П.И., Смирнов Н.Э.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 4. С. 13. (*Pronin P.I., Smirnov N.Ed.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **71**, N 4. P. 349.)
11. *Рытов С.М.* // Доклады АН СССР. 1938. **18**, № 4. С. 263.
12. *Рытов С.М.* // Труды ФИАН СССР. 1940. **2**, № 1. С. 41.
13. *Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А.* Калибровочная теория гравитации. М., 1985.
14. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М., 1979.
15. *Аззам Р., Бамара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. М., 1981.
16. *Малыгин Г.А.* // ФТТ. 1989. **31**, № 1. С. 175.
17. *Носкова Н.И., Журавлева А.И., Вильданова Н.Ф.* и др. // ФММ. 1987. **64**, № 3. С. 554.
18. *Владимирова Г.В., Малыгин Г.А., Рывкина Д.Г.* // ФММ. 1989. **67**, № 2. С. 380.
19. *Рыбин В.В., Золотаревский Н.Ю., Жуковский И.М.* // ФММ. 1990. **69**, № 1. С. 5.
20. *Jenkins D.A., Plasket T.S., Chaudhari P.* // Phil. Mag. A. 1979. **39**, N 2. P. 237.
21. *Berezin M., Kazmenetskii E.O., Shavit R.* // J. of Optics. 2012. **14**, N 12. P. 125602.
22. *Альшиц В.И., Даринская Е.В., Морозов В.А.* и др. // ФТТ. 2013. **55**, № 11. С. 2176.

Electromagnetic waves in a medium with screw dislocations

N. Ed. Smirnov

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.
Moscow 119991, Russia.
E-mail: smirnov@phys.msu.ru.

It is shown that in a medium with screw dislocations oriented predominantly along one axis the rotational velocity of the plane of polarization of an electromagnetic wave is much greater when it propagates in the direction perpendicular to this axis than in the parallel direction. For a given dislocation density tensor, the conditions under which the rotational velocity of the plane of polarization of the electromagnetic wave reaches its maximum are found.

Keywords: condensed matter, dislocations, electrodynamics, geometric optics.
PACS: 61.72.–y, 61.72.Bb, 61.72.Lk, 41.20.–q, 42.15.–i, 78.90.+t.
Received 13 December 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 6. Pp. 527–534.

Сведения об авторе

Смирнов Николай Эдуардович — науч. сотрудник; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: smirnov@phys.msu.ru.