

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Показатель автомодельности сильных сходящихся цилиндрических ударных волн в газе с однородной плотностьюЮсупалиев У., Н. Н. Сысоев¹, С. А. Шутеев^{1,a}, С. Т. Белякин^{2,b}*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,*¹*Центр гидрофизических исследований; ²кафедра общей физики.**Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^ashuteev@phys.msu.ru, ^bnesu@phys.msu.ru*

Статья поступила 05.10.2016, подписана в печать 14.10.2016.

Предложена модель схождения сильных цилиндрических ударных волн (УВ) в газе с однородной плотностью. Дифференциальные уравнения с частными производными этой модели сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям, из которых определен закон схождения таких УВ и зависимость их показателя автомодельности α от эффективных показателей адиабаты газа перед (γ) и за (γ_{eff}) фронтами УВ: $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}})$. Показано, что эта зависимость для цилиндрических УВ в пределах ошибки измерений согласуется с опытными данными.

Ключевые слова: сходящиеся сильные цилиндрические ударные волны в газе, показатель автомодельности, дифференциальное уравнение.

УДК: 537.523. PACS: 52.35.Tc.

Введение

Исследования УВ интересны как с точки зрения фундаментальной науки, так и с точки зрения практических задач, связанных, например, с термоядерным синтезом или медицинскими приложениями (раздробление почечных камней и др.). Впервые УВ исследовал Гудерлей [1] (в 1942 г.), а затем Ландау и Станюкович [2, 3] (в 1945 г.). Закон схождения УВ Гудерлеем был задан в виде

$$R(t) = R_0(1 - t/t_0)^\alpha, \quad (1)$$

а Ландау и Станюковичем — в виде

$$R(t) = A_{\text{sw}}(-t)^\alpha, \quad (2)$$

где α — показатель автомодельности, R_0 — начальный радиус, A_{sw} — размерный параметр, в (1) и в (2) моменты кумуляции волн равны t_0 и 0 соответственно. Система уравнений задачи состояла из уравнений непрерывности, Эйлера и адиабатичности, решения которых Ландау и Станюкович искали в виде

$$v = \frac{\alpha r}{t} V(\xi), \quad \rho = \rho_0 G(\xi), \quad c^2 = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 Z(\xi), \quad (3)$$

где $\xi = r/R(t)$ — автомодельная переменная, r — координата в цилиндрической системе координат, v — радиальная скорость газа относительно системы координат, связанной с неподвижным газом, находящимся в объеме цилиндра с радиусом R , ρ — плотность газа, c — скорость звука в газе, ρ_0 — плотность газа перед фронтом УВ. Искомые величины v , ρ и c относятся к области $r \sim R$ за фронтом УВ вблизи оси цилиндра.

В указанных работах численным методом были определены значения величины α лишь для некоторых значений показателя адиабаты для невозмущенного газа γ , а именно 1.4 [1–3], 1, 1.67, 3 и ∞ [2] (таблица). Начиная с этих работ определение значений величины α является одной из основных задач теоретического и экспериментального исследований закономерностей распространения УВ в газе с однородной плотностью.

Впоследствии задача Гудерлея–Ландау–Станюковича была исследована различными приближенными аналитическими и численными методами авторами работ [4–14]. Основные результаты указанных работ состояли в определении значения величины α для широкого диапазона величины γ (см. таблицу).

Задача о сильных сходящихся УВ была также рассмотрена приближенными методами [15–17]. На основе анализа большого числа частных и предельных случаев для величины α сходящихся УВ предложено следующее приближенное выражение [18]:

$$\alpha = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (4)$$

Экспериментальному определению величины α для сходящихся цилиндрических УВ посвящены работы [19–24]. В них было показано, что для такой УВ значение α в пределах ошибки измерений совпадает с предсказываемой авторами работ [1–3] величиной.

Несмотря на давнюю историю исследований сходящихся УВ в газе, до сих пор не определена аналитическая зависимость $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}})$. Понятно,

Значения коэффициента автомодельности α для сильных сходящихся цилиндрических ударных волн в газе с однородной плотностью

	$\gamma \rightarrow 1$	$\gamma = 1.4$	$\gamma = 1.67$		$\gamma = 3.0$	$\gamma \rightarrow \infty$
Guderley (1942) [1]		0.835				
Landau, Stanyukovich (1955) [2, 3]	1.0	0.834	0.83		0.81	0.5
Butler (1954) [4]		0.835				
Lazarus, Richtmyer (1977) [10]		$\gamma = 1.1-6.0$ 0.885-0.75	$\gamma = 10$ 0.74	$\gamma = 50$ 0.73	$\gamma = 100$ 0.73	0.727
Fujimoto, Mishkin (1978) [5]		0.828				
Chester (1954), Whitham (1957) [15, 16]		0.835	0.815		0.772	0.707
Chisnell (1998) [18]	1.0	0.83	0.815		0.773	0.707
Nakamura (1983) [6]		0.834				
Valiyev, Kraiko (2011) [14]		$\gamma = 1.001-1.91 \Rightarrow 0.980-0.804$ $\gamma = 2.37-3.0 \Rightarrow 0.789-0.776$				
По формуле (25)	1.0	0.857-0.87	0.80-0.82		0.67-0.70	0.5

что иметь дело с такой зависимостью, согласующейся с опытными данными, всегда предпочтительнее, так как она может помочь установить новые, ранее неизвестные закономерности исследуемого явления. В связи с этим данное сообщение посвящено установлению именно такой зависимости и сравнению ее с опытными данными для сходящихся цилиндрических УВ.

1. Экспериментальное определение значений величины α для сходящейся цилиндрической УВ

УВ генерировалась с помощью электрического взрыва проводников — импульсного электрического разряда. В качестве проводников использовалась металлизированная лавсановая пленка толщиной 5 мкм и шириной 0.15 м. Эта пленка закреплялась на внутренней поверхности текстолитовой трубы (толщиной 0.01 м) с внутренним диаметром $2R_0 = 0.1$ м. Использовался как диаметрально расположенный подвод электрической энергии, так и односторонний, когда оба подводящих электрода расположены с одной стороны кольца на расстоянии 2 мм. Второй вариант расположения электродов оказался предпочтительным, так как позволял генерировать ударную волну необходимой формы. Такое разрядное устройство помещалось в цилиндрическую камеру из прозрачного оргстекла диаметром 0.2 м, имеющую систему откачки и напуска газа (Ar, CO₂ ($\gamma = 1.3$), воздух при давлении $p_0 = 10^5$ Па). С помощью такого устройства удалось генерировать УВ с числом Маха $M = 6-15$.

Генератор УВ в качестве полезной нагрузки входил в состав разрядного контура, который имел батарею конденсаторов емкости $C = 30$ мкФ (с зарядным напряжением $U_0 = 5-25$ кВ) и управляющий воздушный разрядник. Для регистрации характер-

истик УВ была использована теневая установка. При этом для достижения необходимого пространственно-временного разрешения УВ (0.5 мм, 10^{-7} с) применялся сверхскоростной фоторегистратор СФР-2М, работающий как в покадровом режиме, так и в режиме фоторазвертки во времени. Работа разряда и фоторегистратора была синхронизирована между собой с помощью блока управления. Изучалась динамика схождения цилиндрической УВ к ее оси симметрии (Oz). Это достигалось регистрацией теневой картины схождения УВ в перпендикулярном к оси направлении.

Предварительные опыты показали, что эффект кумуляции сходящейся УВ проявляется в относительно малой области (10–20 мм) в окрестности оси Oz . Поэтому для обнаружения усиления сходящейся УВ особое внимание уделялось пространственно-временному разрешению волны именно в этой области.

На рис. 1 приведена последовательность кадров фоторегистрации процесса схождения фронта цилиндрической УВ. Следует подчеркнуть, что процесс схождения фронта УВ сильно зависит от начальных возмущений: наблюдаемое нами симметричное ее схождение имеет место не во всех случаях.

Из рисунка определялась зависимость фронта УВ $R(t)$ для различных режимов ее генератора: начальное число Маха M изменялось путем варьирования напряжения U_0 . Для вычисления значений показателя α из зависимости $R(t)$ для различных чисел M за начало отсчета времени $t = 0$ (следуя [1–3]) был принят момент кумуляции УВ.

Экспериментальная зависимость $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}})$ приведена на рис. 2, где приведены также опытные данные работ [21, 22, 24].

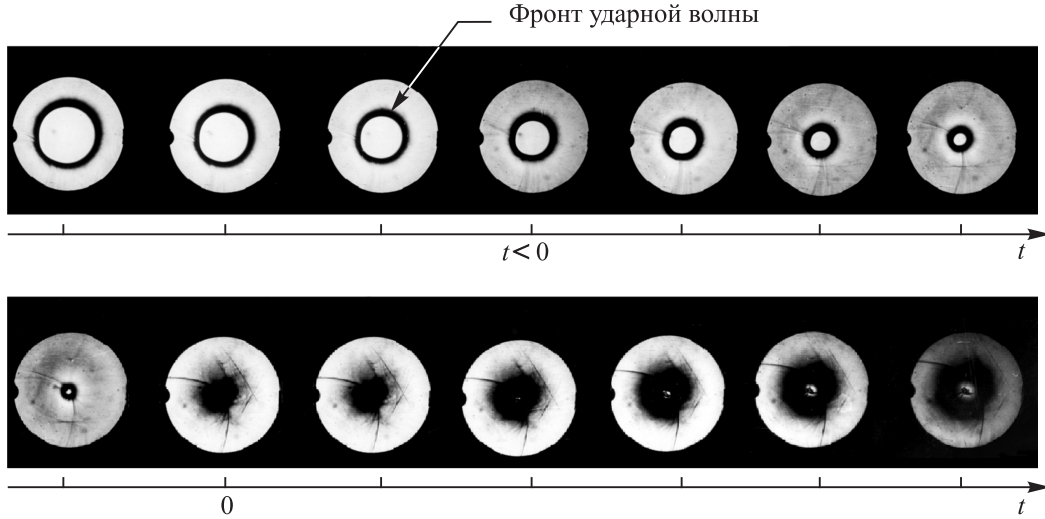


Рис. 1. Процесс схождения цилиндрической ударной волны к оси симметрии Oz и отражения от нее. Момент кумуляции УВ на оси Oz принят за $t=0$. Длительность экспозиции кадра сверхскоростного фоторегистратора равна и время между метками равно 2 мкс. Радиус кольца $R_0 = 5$ см

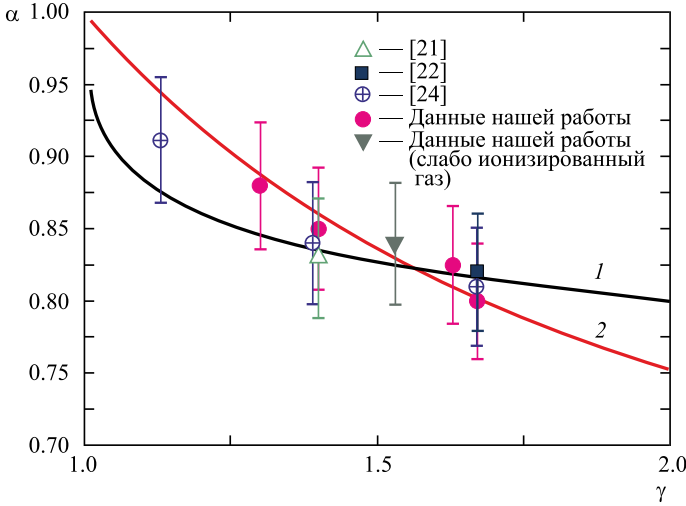


Рис. 2. Экспериментальные и теоретические зависимости коэффициента автомодельности α сильных сходящихся цилиндрических волн от показателя адиабаты γ : 1 — построена по формулам (4), 2 — построена по формуле (25)

2. Модель схождения УВ

Для установления зависимости $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}})$ используем те же уравнения, что и в работах [1–3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\rho \partial r}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho \rho^{-\gamma_{\text{eff}}} + v \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho \rho^{-\gamma_{\text{eff}}} = 0, \quad (7)$$

где p — давление газа. Воспользуемся одним из основных свойств сильных УВ — равенством внутренней энергии и кинетической энергии единицы массы газа за их фронтами [25], откуда для давления получим

$$p = \frac{(\gamma_{\text{eff}} - 1)\rho v^2}{2} = D\rho v^2. \quad (8)$$

Решение системы уравнений (5)–(7) будем искать, в отличие от (3), в виде

$$v = \dot{R}(t)u(\xi), \quad \rho = \rho_0 g(\xi), \quad (9)$$

где в качестве масштаба плотности выбрана плотность газа ρ_0 перед фронтом УВ, а масштаб скорости $\dot{R}(t) = dR(t)/dt$. В отличие от работ [1–3], в данной постановке задачи радиус $R(t)$ фронта УВ является искомой функцией.

Подставляя (8) и (9) в уравнения (5)–(7) и приведя их к безразмерному виду, получим следующую систему:

$$\frac{g'}{g}(u - \xi) + u' + \frac{u}{\xi} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \xi \frac{u'}{u} + \gamma_{\text{eff}} u' + Du \frac{g'}{g} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \xi \frac{u'}{u} + u' + D \frac{g'}{g}(\xi - u) = 0, \quad (12)$$

в которой штрих означает дифференцирование по ξ , а точка — по t .

Используя (10) и разделяя переменные в (11) и (12), получим систему уравнений с константой разделения C :

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = C, \quad (13)$$

$$\xi \frac{u'}{u} - \gamma_{\text{eff}} u' - Du \frac{u' + \frac{u}{\xi}}{\xi - u} = C, \quad (14)$$

$$\xi \frac{u'}{u} - u' - D \left(u' + \frac{u}{\xi} \right) = C. \quad (15)$$

Граничное условие для функции $u(\xi)$ при $\xi = 1$ формулируется следующим образом:

$$u(1) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2} \right), \quad (16)$$

которое определено из формулы, полученной в [3].

Решением уравнения (13) при $C \neq 1$ с начальным условием

$$R(0) = R_0, \quad R(t_0) = 0, \quad (17)$$

будет функция

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{1/(1-C)}. \quad (18)$$

А при $C \neq 1$ с другим начальным условием

$$R(0) = 0, \quad \left(\frac{dR(t)}{dt}\right)_{t=0} = 0, \quad (19)$$

уравнение (11) имеет следующие решения: при $t \leq 0$

$$R(t) = A_{SW} \cdot (-t)^{1/(1-C)}, \quad (20)$$

а при $t \geq 0$

$$R(t) = A_{SW} \cdot t^{1/(1-C)}. \quad (21)$$

Решения (18) и (20) с показателем автомодельности

$$\alpha = \frac{1}{1-C} \quad (22)$$

совпадают с законами (1) (самоподобное решение Гудерлея) и (2) (самоподобное решение Ландау–Станюковича) в газе с однородной плотностью соответственно.

Константу C в (13) можно получить из (15), зная $u(1)$ и $u'(1)$. Последнее найдем из (14) и (15) при $\xi = 1$:

$$u'(1) = \nu \frac{2 \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2}\right) \left(\gamma - 3 + \frac{4\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2}\right)}{(\gamma + 1)^2}. \quad (23)$$

Далее, получив выражение для константы C , с учетом (20) определим искомое выражение для величины α :

$$\alpha = \left\{ 1 - \frac{\nu}{\gamma + 1} \left[\gamma + 1 - 2 \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2}\right) (2 + \gamma_{\text{eff}}) + 4 \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2}\right)^2 \frac{1 + \gamma_{\text{eff}}}{\gamma + 1} \right] \right\}^{-1}. \quad (24)$$

Для сильных сходящихся цилиндрических УВ ($M \gg 1$) из (24) следует, что выражение для $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}})$ имеет следующий вид:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma + 1 + (\gamma_{\text{eff}} + 1)(\gamma - 1)}. \quad (25)$$

3. Сравнение результатов модели с опытными данными

На рис. 2 представлены кривая 1, построенная по формуле (4), и кривая 2, построенная по формуле (25) при $\gamma_{\text{eff}} = 0.9\gamma$ (учет ионизации газа за фронтом сильной УВ). На рисунке, кроме наших

опытных данных, также приведены экспериментальные данные работ [21, 22, 24]. Видно, что кривая 2 согласуется с опытными данными для сходящихся сильных цилиндрических УВ, созданных различными способами, чего нельзя сказать о приближенной формуле (4).

Заключение

Таким образом, на основе предложенной нами модели установлена ранее неизвестная зависимость $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}})$ для сходящихся сильных цилиндрических УВ, согласующаяся с опытными данными.

Список литературы

1. Guderley G. Luftfahrtforschung. 1942. **19**(9). P. 302.
2. Ландау Л.Д., Станюкович К.П. // ДАН СССР. 1945. **46**. № 9. С. 399.
3. Stanyukovich K. Unsteady Motion of Continuous Media. Oxford: Pergamon, 1960.
4. Butler D. Converging Spherical and Cylindrical Shocks. Report N 54. N. Y.: Burgess Hill, 1954.
5. Fujimoto Y., Mishkin E. // Phys. Fluids. 1978. **21**. P. 1933.
6. Nakamura Y. // Phys. Fluids. 1983. **26**. P. 1234.
7. Hajner P. // J. Appl. Math. 1988. **48**. P. 1244.
8. Van Dyke M., Guttman A. // J. Fluid Mech. 1982. **120**. P. 451.
9. Ponchaut N., Hornung H.G., Mouton D.I. // J. Fluid. Mech. 2006. **560**. P. 103.
10. Lazarus R., Richtmyer R. // Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California. Los Alamos, NM, 1977.
11. Lazarus R. // SIAM J. Numer. Anal. 1981. **18**. P. 316.
12. Ponchaut N., Hornung H.G., Mouton D.I. // J. Fluid. Mech. 2006. **560**. P. 103.
13. Hornung H.G., Pullin D.I., Ponchaut N. // Acta Mech. 2008. **201**. P. 31.
14. Валиев Х.Ф., Крайко А.Н. // ПММ. 2011. **75**(2). С. 314. (Valiyev Kh.F., Kraiko A.N. // J. Appl. Math. Mech. 2011. **75**(2). P. 218.)
15. Chester W. // Philos. Mag. 1954. **45**. P. 1293.
16. Chisnell R. // J. Fluid Mech. 1957. **2**. P. 286.
17. Whitham G. // J. Fluid Mech. 1957. **2**. P. 145.
18. Chisnell R. // J. Fluid Mech. 1998. **354**. P. 357.
19. Matsuo H., Nakamura Y. // J. Appl. Phys. 1980. **51**. P. 3126.
20. Matsuo H., Nakamura Y. // J. Appl. Phys. 1981. **52**. P. 4503.
21. Baronets P. // Fluid Dynam. 1984. **19**. P. 503.
22. Baronets P. // Fluid Dynam. 1994. **29**. P. 129.
23. Takayama K., Kleine H., Gronig H. // Exp. Fluids. 1987. **5**. P. 315.
24. Kjellander M., Tillmark N., Apazidisa N. // Phys. Fluids. 2011. **23**. P. 116103.
25. Чу К., Гросс Р. Ударные волны в физике плазмы // Физика высокотемпературной плазмы. М.: Мир, 1972. С. 262.

The self-similarity index of the convergence of strong cylindrical shock waves in a gas with a uniform density**U. Yusupaliev**, N. N. Sysoev¹, S. A. Shuteev^{1,a}, S. T. Belyakin^{2,b}

¹ *Gydrophysical Research Center*; ² *Department of General Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: ^a *shuteev@phys.msu.ru*, ^b *nesu@phys.msu.ru*.

A model of the convergence of cylindrical shock waves (SWs) in a gas with a uniform density has been considered. The partial differential equations of this model have been reduced to ordinary differential equations, from which the law of convergence of such shock waves and the dependence $\alpha = f(\gamma, \gamma_{\text{eff}}$ of their self-similarity index α on the heat-capacity ratio in front of the shock wave (γ_{eff}) and behind the shock wave front (γ_{eff}) of the gas have been found. This dependence for cylindrical shock waves has been shown to agree with the experimental data within the measurement error.

Keywords: converging strong cylindrical shock waves in gas, self-similarity index, differential equation.

PACS: 52.35.Tc.

Received 5 October 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2017. 72, No. 6. Pp. 539–543.*

Сведения об авторах

1. Юсупалиев Усен — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник.
2. Сысоев Николай Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, директор; тел.: (495) 939-17-97, e-mail: nesu@phys.msu.ru.
3. Шутеев Сергей Александрович — кандидат физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-17-97, e-mail: shuteev@phys.msu.ru.
4. Белякин Сергей Тихонович — инженер, тел.: (495) 939-51-56, e-mail: nesu@phys.msu.ru.