ОБЗОРЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 1. Математические и эмпирические основы

Ю. П. Пытьев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра кафедра математического моделирования и информатики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com

Статья поступила 26.08.2016, подписана в печать 26.09.2016.

В статье представлен математический формализм субъективного моделирования, основанный на моделировании неопределённости, отражающей недостоверность субъективной информации, и нечёткости, характерной для её содержания (см. п. 2.1). Модель субъективных суждений о значениях неизвестного параметра $x \in X$ модели $M(x)$ объекта исследования (ОИ) модельер-исследователь (МИ) *задает* как пространство[a] $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами *правдоподобия* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и *доверия* $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, где $\widetilde{x}$ — *неопределенный элемент* (НОЭ) со значениями в X, *моделирующий* неопределённые высказывания МИ о неизвестном $x \in X$, меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ *моделируют модальности* субъективных суждений МИ об истинности каждого $x \in X$: значение $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ определяет, насколько, по его мнению, *относительно правдоподобно* равенство $\widetilde{x} = x$, а значение $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ определяет, насколько следует *относительно доверять* неравенству $\widetilde{x} \neq x$ (см. п. 1.3). Рассмотрены варианты мер правдоподобия Pl, доверия Bel и pl-, bel-интегралов, наследующих некоторые черты вероятностей, психофизики и учитывающих интересы коллективов МИ.

Показано, что математический формализм субъективного моделирования, в отличие от «стандартного» математического моделирования, позволяет МИ моделировать как точные формализованные знания, так и неформализованные, недостоверные, начиная с «абсолютного незнания» вплоть до «точного знания» модели ОИ, вычислять относительные правдоподобия и доверия истинности любых характеристик ОИ, обусловленных его субъективной моделью $M(\widetilde{x})$, а если МИ доступны данные наблюдений за ОИ, то позволяет ему оценить адекватность субъективной модели цели исследования, корректировать субъективную модель, комбинируя свои субъективные представления и данные наблюдений, проверив их согласованность, наконец, эмпирически восстанавливать модель ОИ.

Ключевые слова: правдоподобие, доверие, неопределенность.

УДК: 517.977.14. PACS: 07.05.Kf.

[a] Пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ формально эквивалентно *нечеткому пространству* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}, \mathrm{N})$ с мерами возможности P и необходимости N, см. замечание 1.1. в [1].

Введение

При построении математической модели объекта исследования (ОИ) модельеру-исследователю (МИ) важно использовать все доступные точные формализованные знания из соответствующей предметной области. Однако гораздо сложнее, но не менее важно, МИ использовать в модели обширные неформализованные знания, научный опыт и интуицию, поскольку, как известно, именно такие знания и интуиция нередко оказываются источником новых изобретений и открытий.

В статье речь пойдет о типичной ситуации, в которой МИ строит математическую модель ОИ. Формализованная ее часть готова, но остаются неопределенными некоторые ее параметры, возможные значения некоторых МИ может охарактеризовать интервально, причем часть из них — достаточно точно, еще часть — лишь вербально, а о возможных значениях остальных не знает ничего. В статье рассмотрен математический формализм субъективного моделирования, позволяющий МИ в такой ситуации полностью «достроить» модель и эмпирически проверить ее адекватность цели исследования, уточнить и т. п., если ему доступны данные наблюдений за ОИ.

В разд. 1 рассмотрены *математические основы* субъективного моделирования. В п. 1.1, 1.2 рассмотрена сформулированная МИ субъективная модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ «неопределенности» модели $M(x)$ ОИ, заданной с точностью до неизвестного $x \in X$. *Неопределенный элемент* (НОЭ) $\widetilde{x}$ со значениями в X моделирует *неопределенные высказывания* (НВ) МИ о значениях $x \in X$ и об их *истинности* относительными значениями мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x)$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x)$.

В п. 1.3 рассмотрены условия, *определяющие меры* Pl и Bel и *шкалы* $L=([0,1],\leqslant,\ +,\times)$ и $\widehat{L}=([0,1],\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})$ их значений. Основными являются условия симметрии L и $\widehat{L}$, согласно которым меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$ *эквивалентны*, если $\exists\gamma(\cdot),\widehat{\gamma}(\cdot)\in\Gamma\ \ \forall E\in\mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E))=\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$, $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E))=\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$, где Γ — *группа* непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon\ [0,1]\to[0,1]$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$, с групповой операцией «$\circ$», $(\gamma\circ\gamma')(a)\overset{\mathrm{def}}{=}\gamma(\gamma'(a))$, $a\in[0,1]$.

Согласно этому условию группа Γ определяет *группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* шкал L и $\widehat{L}$, т. е. преобразований $\gamma\colon L,\widehat{L}\to L,\widehat{L}$, согласно которым: $\forall\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \ \forall a,b\in[0,1]\ \ \gamma[0,1]=[0,1]$, $\gamma(a*b)=$ $=\gamma(a)*\gamma(b)$, где $*$ — символ любой из *бинарных операций* $+$, $\widehat{+}$, $\times$, $\widehat{\times}$; и выполнены эквивалентности $\Leftrightarrow$: $a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\widehat{\leqslant}b\Leftrightarrow\gamma(a)\widehat{\leqslant}\gamma(b)$. Отсюда следуют равенства, *определяющие* бинарные операции $a+b=\max\{a,b\}$, $a\times b=\min\{a,b\}$, $a\widehat{+}b=\min\{a,b\}$, $a\widehat{\times}b=\max\{a,b\}$, $a,b\in[0,1]$, если последние: 1) непрерывны, 2) коммутативны, 3) удовлетворяют следующим условиям на границах $[0,1]^2$: $\forall a\in[0,1]\ \ a+0=a\widehat{\times}0=a\times1=a\widehat{+}1=a$, $a+1=a\widehat{\times}1=1$ и $a\times0=a\widehat{+}0=0$, и $\forall a,b\in[0,1]$ $a\leqslant b\Leftrightarrow b\widehat{\leqslant}a$.

Группа Γ определяет и *группу* $\overline{\overline{\Gamma}}$ *изоморфизмов* $\gamma\colon L\to\gamma L$, $\widehat{\gamma}\colon\widehat{L}\to\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\gamma,\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$, где все шкалы γL, $\gamma\in\overline{\overline{\Gamma}}$, и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$, *изоморфны* как *координатные представления шкал* L и $\widehat{L}$ («координаты» $a,\widehat{a}\in[0,1]$ в $L,\widehat{L}$ представлены «координатами» $\gamma(a),\widehat{\gamma}(\widehat{a})\in[0,1]$ в $\gamma L,\widehat{\gamma}\widehat{L}$), а все меры $\gamma(\mathrm{Pl}(\cdot))$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, и $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}(\cdot))$, $\widehat{\gamma}(\cdot)\in\Gamma$, эквивалентны мерам $\mathrm{Pl}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}(\cdot)$ соответственно.

В п. 1.4 рассмотрены функции и многозначные отображения НОЭ $\widetilde{x}$, позволяющие вычислять распределения относительных правдоподобий и доверий *любых следствий* субъективной модели $M(\widetilde{x})$ ОИ, интересующих МИ, а в п. 1.5 показано, что МИ *может предложить модель* $M(\widetilde{x})$ *в любом случае*, в частности если он не знает ничего о модели ОИ или доподлинно знает все.

В п. 1.6 рассмотрены pl- и bel-интегралы относительно мер Pl и Bel, в п. 1.7 определены и исследованы понятия субъективной независимости, в п. 1.8 рассмотрены условные субъективные распределения и меры.

В п. 1.9 рассмотрены альтернативные варианты мер правдоподобия, доверия и соответствующих интегралов: в п. 1.9.1 — меры, значения которых, отличные от 0 и 1, допускают содержательное толкование коллективом МИ, в п. 1.9.2 — меры, которые наследуют некоторые черты вероятности и психофизики.

В разд. 2 рассмотрены *эмпирические основы* субъективного моделирования: в п. 2.1 — эмпирическое восстановление модели неопределенного нечеткого объекта (НО. НЧ. О.) и эмпирическое построение *нечеткого неопределенного элемента* как эмпирической оценки неизвестного параметра модели НО. НЧ. О. В п. 2.2 предложено решение проблемы *согласованности* субъективных и эмпирических данных и их *комбинирования*. В п. 2.3 определена *мера правдоподобия согласия* субъективной модели НОЭ $\widetilde{x}$ с данными наблюдений за НО. НЧ. О.

В работе «Математические методы субъективного моделирования. 2. Приложения» [36] рассмотрены: субъективное моделирование вероятностной случайности, проблема информативности/неопределенности субъективных суждений МИ как информативности/неопределенности энтропий субъективных распределений НОЭ $\widetilde{x}$, моделирующего суждения МИ, получены и исследованы оптимальные субъективные правила идентификации состояний НО. НЧ. О., основанные на данных наблюдений за объектом, рассмотрены методы экспертного построения моделей нечеткого и неопределенного нечеткого элементов. Другие приложения см. в [40].

Замечание. Поскольку меры правдоподобия Pl, доверия Bel и pl-, bel-интегралы формально эквивалентны рассмотренным в [1] мерам возможности P, необходимости N и соответственно p-, n-интегралам, все результаты, относящиеся к мерам P, N и p-, n-интегралам, полученные в [1, 38], использованы в настоящей статье и в [36].

1. Математические основы

1.1. Меры правдоподобия Pl и доверия Bel. Неопределенный элемент $\widetilde{x}$

Рассмотрим пространство $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором $\mathcal{P}(X)$ — класс *всех* подмножеств X, меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon\ \mathcal{P}(X)\to L$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon\mathcal{P}(X)\to\widehat{L}$, где $L=([0,1],\leqslant,+,\times)=([0,1],\leqslant,\max,\min)$ и $\widehat{L}=$ $=(\widehat{[0,1]},\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})=([0,1],\geqslant,\min,\max)$ суть *шкалы их значений* (см. [1, п. 1.3]), а меры *заданы* МИ следующими равенствами $\forall E\in\mathcal{P}(X)$:

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)=\mathop{+}_{x\in E}t^{\widetilde{x}}(x)=\sup_{x\in E}t^{\widetilde{x}}(x),$$
$$E\neq\varnothing,\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing)\overset{\mathrm{def}}{=}0,\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X)\overset{\mathrm{def}}{=}1,$$
$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)=\mathop{\widehat{+}}_{x\in X\setminus E}\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)=\inf_{x\in X\setminus E}\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x),$$
$$E\neq X,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X)\overset{\mathrm{def}}{=}1,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing)\overset{\mathrm{def}}{=}0,\tag{1}$$

в которых $E=\bigcup\limits_{x\in E}\{x\}=\bigcap\limits_{x\in X\setminus E}(X\setminus\{x\})$,

$$t^{\widetilde{x}}(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x),\ x\in X,\ \mathop{+}_{x\in X}t^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X)\overset{\mathrm{def}}{=}1,$$
$$\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x),\ x\in X,\ \mathop{\widehat{+}}_{x\in X}\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing)\overset{\mathrm{def}}{=}0.\tag{2}$$

Согласно (2) функции $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X\to L$ и $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X\to\widehat{L}$ *определены* мерами $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и называются *рас-*

пределениями правдоподобий и доверий значений неопределенного элемента (НОЭ) $\widetilde{x}$. С другой стороны, НОЭ $\widetilde{x}$, будучи *заданным МИ распределениями* (2), *определяет* равенствами (1) *меры* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и поэтому называется *каноническим* для пространства $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, а последнее называется его моделью.

1.2. Неопределенный элемент как неопределенная высказывательная переменная

В рассматриваемом контексте НОЭ $\widetilde{x}$ моделирует субъективные суждения МИ как его *неопределенные высказывания* (НВ) о значениях $x\in X$ и их *модальности*, характеризующие его субъективные представления об их *истинности*. Такая интерпретация НОЭ $\widetilde{x}$ основана на *теоретико-множественном представлении логики высказываний*, согласно которому в $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$: X — множество элементарных высказываний (эл. в.), $\mathcal{P}(X)$ — класс всех высказываний, в котором любое высказывание a взаимно однозначно *представлено* множеством $A\in\mathcal{P}(X)$ тех эл. в. $x\in X$, каждое из которых влечет a: $a\leftrightarrow A=\bigcup\limits_{x\in X,\ x\to a}\{x\}$, где $\leftrightarrow$ и $\to$ суть взаимно однозначное соответствие и логическая импликация. Каждое эл. в. x *представлено* в X множеством $\{x\}$, $x\leftrightarrow\{x\}$, и *выделено* условием, согласно которому любое эл. в. $x\in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного $\mathbf{0}$.

Если $a\leftrightarrow A$, $b\leftrightarrow B$, то $a\,\&\,b\leftrightarrow A\cap B$, $a\vee b\leftrightarrow A\cup\cup B$, $\neg a\leftrightarrow X\setminus A$, $a\to b\equiv(\neg a)\vee b\leftrightarrow(X\setminus A)\cup B$, $\mathbf{1}\leftrightarrow X$, $\mathbf{0}\leftrightarrow\varnothing$.

Интерпретация: $t^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x)$ $(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in A))$ — *относительное правдоподобие истинности* НВ (субъективного суждения), согласно которому $\widetilde{x}=x$ $(\widetilde{x}\in A)$, где $x\leftrightarrow\{x\}$ $(a\leftrightarrow A)$; $\widetilde{t}^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x)$ $(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in A))$ есть *относительное доверие истинности* НВ, согласно которому $\widetilde{x}\in X\setminus\{x\}$ $(\widetilde{x}\in A)$, где $\neg x\leftrightarrow X\setminus\{x\}$ $(a\leftrightarrow A)$, $x\in X$.

1.3. Группа $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал L и $\widehat{L}$ и группа $\overline{\overline{\Gamma}}$ изоморфизмов. Принцип относительности

Сформулируем условия, *определяющие* меры правдоподобия Pl, доверия Bel (1) и шкалы L, $\widehat{L}$ их значений:

- МИ *всегда может предложить модель* $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ НОЭ[1] $\widetilde{x}$, выразив в (2), насколько, по его мнению, *относительно правдоподобны* равенства (высказывания) $\widetilde{x}=x$, $x\in X$, и насколько *следует относительно доверять* неравенствам $\widetilde{x}\neq x$ (их отрицаниям), $x\in X$. «Относительно» означает, что в $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$;
- *численные значения* мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E\in\mathcal{P}(X)$, в (1), *отличные от* 0 *и* 1, *не могут быть содержательно истолкованы. Существенна лишь их упорядоченность*;
- меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$ *эквивалентны*, если $\exists\gamma(\cdot),\widehat{\gamma}(\cdot)\in\Gamma$ $\forall E\in\mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E))=\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$, $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E))=\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$, где Γ — *группа* непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot)$: $[0,1]\to[0,1]$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$, с групповой операцией «$\circ$», определенной равенствами $(\gamma\circ\gamma')(a)\overset{\mathrm{def}}{=}\gamma(\gamma'(a))$, $a\in[0,1]$. Согласно этим условиям:

① группа Γ определяет *группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* $\gamma\colon L\to L$, $\widehat{\gamma}\colon\widehat{L}\to\widehat{L}$, $\gamma,\widehat{\gamma}\in\overline{\Gamma}$, *шкал* $L=([0,1],\leqslant,+,\times)$, $\widehat{L}=([0,1],\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})$ значений Pl, Bel. Это означает, что

$\forall\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \forall a,b\in[0,1]$
$$\gamma[0,1]=[0,1],\quad \gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b),\tag{3}$$
где $*$ — символ любой из *бинарных операций* $+$, $\widehat{+}$, $\times$, $\widehat{\times}$, и выполнены *эквивалентности* $\Leftrightarrow$
$$a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b),\quad a\,\widehat{\leqslant}\,b\Leftrightarrow\gamma(a)\,\widehat{\leqslant}\,\gamma(b);\tag{4}$$
в свою очередь равенства, *определяющие бинарные операции в шкалах* L и $\widehat{L}$,
$$a+b=\max\{a,b\},\quad a\times b=\min\{a,b\},\tag{5}$$
$$a\,\widehat{+}\,b=\min\{a,b\},\quad a\,\widehat{\times}\,b=\max\{a,b\},\quad a,b\in[0,1],$$
следуют из условий (3), (4), *непрерывности* и коммутативности операций $*\colon[0,1]^2\to[0,1]$, требований $\forall a,b\in[0,1]$ $a\leqslant b\Leftrightarrow b\,\widehat{\leqslant}\,a$ и следующих *свойств* 0 и 1: $\forall a\in[0,1]$ $a+0=a\,\widehat{\times}\,0=a\times1==a\,\widehat{+}\,1=a$, $a+1=a\,\widehat{\times}\,1=1$ и $a\times0=a\,\widehat{+}\,0=0$; согласно этим условиям $L=([0,1],\leqslant,+,\times)$, $\widehat{L}=([0,1],\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})=(\widehat{[}\widehat{0},\widehat{1}\widehat{]},\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})$, где $\widehat{0}=1$, $\widehat{1}=0$, $\widehat{\leqslant}\sim\geqslant$ и $\widehat{[}\widehat{0},\widehat{1}\widehat{]}=[0,1]$, см. п. 1.3 в [1].

② Группа Γ определяет и *группу* $\overline{\overline{\Gamma}}$ *изоморфизмов* $\gamma\colon L\to\gamma L$, $\widehat{\gamma}\colon\widehat{L}\to\widehat{\gamma}\widehat{L}$, где шкалы γL, $\gamma\in\overline{\overline{\Gamma}}$ и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$, *изоморфны*.

Это означает, что $\forall\gamma(\cdot)\in\Gamma$ $\forall a\in L,\widehat{L}\Leftrightarrow\gamma(a)\in\in\gamma L,\gamma\widehat{L}$, а бинарные операции $*$ и отношения $\leqslant,\widehat{\leqslant}$ в *шкалах* γL и $\gamma\widehat{L}$ *определены* равенствами (3) и эквивалентностями (4), а именно: $a*b\in L,\widehat{L}\to\gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b)\in\gamma L,\gamma\widehat{L}$, $a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\widehat{\leqslant}b\Leftrightarrow\gamma(a)\widehat{\leqslant}\gamma(b)$, $a,b\in L,\widehat{L}$.

Следствием ② является *принцип относительности*, подобный принципу относительности в физике, согласно которому шкалы γL, $\gamma\in\overline{\overline{\Gamma}}$, и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$ как *координатные представления*[2] *шкал* L и $\widehat{L}$,

- *изоморфны*, и МИ могут формулировать субъективные модели в шкалах γL, $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, выбрав $\gamma,\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$. Заметим, что для любых значений мер $\mathrm{Pl}(A)\in(0,1)$, $\mathrm{Bel}(B)\in(0,1)$ МИ могут выбрать преобразования $\gamma(\cdot)$ и $\widehat{\gamma}(\cdot)$ так, чтобы значения *эквивалентных* им мер $\gamma(\mathrm{Pl}(\cdot))$ и $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}(\cdot))$ оказались сколь угодно близки к нулю или к единице «почти всюду» в L и $\widehat{L}$;

---

[1] Это условие гарантирует эффективность субъективного моделирования, его *безусловную* применимость, см. п. 1.5.

[2] «Координаты» $a,\widehat{a}\in[0,1]$ в $L,\widehat{L}$ заданы «координатами» $\gamma(a),\widehat{\gamma}(\widehat{a})\in[0,1]$ в $\gamma L,\widehat{\gamma}\widehat{L}$

• сформулированные в парах шкал L', $\widehat{L}'$ и L'', $\widehat{L}''$ модели считаются *эквивалентными*, если *существует* пара шкал $L = \gamma' L' = \gamma'' L''$ и $\widehat{L} = \widehat{\gamma}'\widehat{L}' = \widehat{\gamma}''\widehat{L}''$, $\gamma', \gamma'', \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}'' \in \overline{\overline{\Gamma}}$, в которых их формулировки совпадают;

• *содержательно истолкованы* могут быть только те модели, формулировки которых *не зависят* от выбора шкал γL, $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, т. е. одинаковы для всех исследователей. Например, равенства значений правдоподобия и доверия нулю или единице не зависят от выбора шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, в отличие от равенств $\mathrm{Pl}(A) = a$ или $\mathrm{Bel}(B) = b$, которые при любых $a, b \in (0, 1)$ могут быть нарушены выбором шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$ значений Pl и Bel.

1.4. Правдоподобия и доверия истинности характеристик ОИ, обусловленных его субъективной моделью

Любая функция $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$ задает НОЭ $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$ со значениями в Y и пространство $(Y, \mathcal{P}(Y),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$, в котором $\forall A \in \mathcal{P}(Y)$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \sup_{y \in A} t^{\widetilde{y}}(y),$$
$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \inf_{y \in Y \setminus A} \widehat{t}^{\,\widetilde{y}}(y), \quad (6)$$

где $\forall y \in Y$ $t^{\widetilde{y}}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) = y) = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \varphi(x) = y}} t^{\widetilde{x}}(x)$, $\widehat{t}^{\,\widetilde{y}}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \neq y) = \inf\limits_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x)$ — *правдоподобие и доверие истинности НВ, согласно которым* $\varphi(\widetilde{x}) = y$ и $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$.

Если $A^{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ и $A_{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — взаимно обратные (многозначные) отображения: $\forall x \in X$ $A^x = \{y \in Y,\ x \in A_y\}$, $\forall y \in Y$ $A_y = \{x \in X,\ y \in A^x\}$, то образ $A^{\widetilde{x}}$ НОЭ $\widetilde{x}$ есть *неопределенное множество* (но. м.), заданное на $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$. *Индикаторные функции одноточечного покрытия* $A^{\widetilde{x}}$ суть:

$$t^{A^{\widetilde{x}}}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y),\ y \in Y,$$
$$\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y),\ y \in Y; \quad (6^*)$$

$t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ — *правдоподобие и доверие истинности НВ, согласно которому* $\widetilde{x} \in A_y$ или, что эквивалентно, $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$.

Исходя из своей модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ НОЭ $\widetilde{x}$, МИ может *вычислять* относительные правдоподобия и доверия истинности *любых* своих субъективных суждений о значениях *любых* характеристик ОИ как функций НОЭ $\widetilde{x}$. Если $M(\widetilde{x})$ — *субъективная модель* ОИ, предложенная МИ вместо семейства $M(x)$, $x \in X$, то для любой неопределенной характеристики $\varphi(\widetilde{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(M(\widetilde{x}))$ или $A^{\widetilde{x}} = \mathrm{F}(M(\widetilde{x}))$ ОИ, *обусловленной его моделью* $M(\widetilde{x})$, правдоподобие и доверие истинности НВ, согласно которому: $\varphi(\widetilde{x}) = y$, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$ или $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$, определены в (6), (6*). При этом пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ можно использовать как *математическую основу компьютерного интерфейса*, обеспечивающего «интеллектуальный диалог» МИ с моделью ОИ, позволяющего МИ *вычислять* значения мер правдоподобия и доверия истинности *любых свойств* ОИ, обусловленных его субъективной моделью $M(\widetilde{x})$.

Замечание 1.1. Первая публикация по пунктам 1.1–1.4 — [2]. Методы субъективного моделирования, предложенные в работах [5–9, 11–14, 16, 17, 37], существенно отличаются от опубликованных в [2]. Альтернативные методы математического моделирования неопределенности и определения мер правдоподобия и доверия рассмотрены в [13, 17].

1.5. Субъективные модели «абсолютного незнания» и «точного знания»

МИ *всегда может* предложить модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ НОЭ $\widetilde{x}$, ибо когда он «ничего не знает» об ОИ и о его модели или «доподлинно знает все», ему следует воспользоваться инвариантными относительно выбора шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, моделями:

• «*абсолютного незнания*» модели ОИ, задав $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ распределениями:
$t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, $x \in X$, все значения НОЭ $\widetilde{x}$ равноправдоподобны, $\sup\limits_{x \in X} t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, $\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) = 0$, $x \in X$, любому неравенству $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, доверять нельзя, $\inf\limits_{x \in X} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) = 0$.

В этом случае $\forall \varphi(\cdot)\colon X \to Y$, в (6) для $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$: $t^{\widetilde{y}}(y) = 1$, $\widehat{t}^{\,\widetilde{y}}(y) = 0$, $y \in Y$, т. е. *«абсолютное незнание» модели влечет «абсолютное незнание» любого ее следствия*;

• «*точного знания*» модели ОИ, задав $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ распределениями: $t^{\widetilde{x}}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases}$ $x \in X$, x_0 — единственное правдоподобное значение $\widetilde{x}$, $\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = \begin{cases} 1, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases}$ $x \in X$, x_0 — единственное значение, при котором неравенству $\widetilde{x} \neq x_0$ доверять нельзя; при этом в (6) для любого следствия модели $\forall \varphi(\cdot)\colon X \to Y$ $t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & y \neq y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, $\widehat{t}^{\,\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y \neq y_0, \\ 0, & y = y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, *т. е. «точное знание» модели влечет «точное знание» любого ее следствия.*

Замечание 1.2. В связи с пунктом 1.5 отметим метод субъективного моделирования, известный как байесовский [5, 12], в котором субъект задает вероятность $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}$, значение плотности $\mathrm{pr}^{\widetilde{x}}(x)$ которой интерпретирует как *степень его уверенности в истинности равенства* $\widetilde{x} = x$, $x \in X$.

Вероятность $\Pr^{\widetilde{x}}$ «уточняется» путем байесовского пересчета, учитывающего данные наблюдений за моделируемым объектом (подробнее см. в [27]). Основной недостаток: *невозможно моделировать «абсолютное незнание»* модели, ибо любой выбор $\Pr^{\widetilde{x}}$, например, по принципу недостаточного основания Лапласа (равномерное распределение), максимальной энтропии [18], распределения Джеффриса [28] и др., моделирующие в байесовском методе «априорное незнание», на самом деле *есть априорное знание модели*, что, естественно, не влечет «незнания» свойств ОИ, обусловленных его моделью; вероятностная модель «абсолютного незнания» как вероятностное пространство, очевидно, не существует. Альтернативные модели «абсолютного незнания» предложены в [6, 7, 11, 13, 14, 16] (см. замечание 2.6).

1.6. Интегрирование относительно мер правдоподобия и доверия; pl- и bel-интегралы

Обозначим $L(X)$ $(\widehat{L}(X))$ класс функций $g(\cdot)\colon X \to L$ $(\widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{L})$ с операциями $(g_1 * g_2)(x) \overset{\text{def}}{=} g_1(x) * g_2(x)$, $x \in X$, $((\widehat{g}_1 \widehat{*} \widehat{g}_2)(x) \overset{\text{def}}{=} \widehat{g}_1(x) \widehat{*} \widehat{g}_2(x)$, $x \in X)$, где $*$ $(\widehat{*})$ — любая из операций $+$, $\times$ $(\widehat{+}, \widehat{\times})$. Далее $L(X)$ $(\widehat{L}(X))$ суть *классы всех функций с бинарными операциями* $+$, $\times$ $(\widehat{+}, \widehat{\times})$, *отношениями* $\leqslant$ $(\widehat{\leqslant})$ и со значениями в L $(\widehat{L})$ соответственно.

Определение 1.1. Назовем pl- (bel-) интегралом функцию $\mathrm{pl}(\cdot)\colon L(X) \to L$ $(\mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{L}(X) \to \widehat{L})$,

- *однородную*: $\forall a \in [0,1]$ $\forall g(\cdot)\colon X \to L$ $\mathrm{pl}((a \times g)(\cdot)) \equiv \mathrm{pl}(a \times g(\cdot)) = a \times \mathrm{pl}(g(\cdot))$, где в левой части равенства $(a \times g)(x) \overset{\text{def}}{=} a \times g(x)$, $x \in X$, $(\forall a \in [0,1]$ $\forall \widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ $\mathrm{bel}((\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{g})(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}(\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{g}(\cdot)) = \widehat{a} \widehat{\times} \mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)))$, и
- *вполне аддитивную*: $\forall g_j(\cdot)\colon X \to L$, $j \in J$, $\mathrm{pl}((\underset{j\in J}{+} g_j)(\cdot)) = \underset{j\in J}{+} \mathrm{pl}(g_j(\cdot))$ $(\forall \widehat{g}_j(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$, $j \in J$, $\mathrm{bel}((\underset{j\in J}{\widehat{+}} \widehat{g}_j)(\cdot)) = \underset{j\in J}{\widehat{+}} \mathrm{bel}(\widehat{g}_j(\cdot)))$, где J — произвольное множество индексов.

Определим меры $\mathrm{Pl}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to L$ и $\mathrm{Bel}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{L}$, *согласованные* соответственно с pl- и bel-интегралами, равенствами: $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}(E) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pl}(\chi_E(\cdot))$ и $\mathrm{Bel}(E) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{bel}(\widehat{\chi}_E(\cdot))$, где $\chi_E(x) = 1$, $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$, $x \in X \setminus E$, — индикаторная функция E, $\widehat{\chi}_E(\cdot) = \theta \circ \chi_{X\setminus E}(\cdot) = \chi_E(\cdot)$, $\theta(\cdot) \in \Theta$; Θ — здесь и далее класс непрерывных строго монотонных функций $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$.

Теорема 1.1. $\forall \mathrm{pl}(\cdot)\colon L(X) \to L$ $\exists t(\cdot)\colon X \to L$ $\forall g(\cdot)\colon X \to L$

$$\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\{t(x), g(x)\} \equiv$$
$$\equiv \underset{x\in X}{+} (t(x) \times g(x)) \overset{def}{=} \mathrm{pl}_t(g(\cdot)); \quad (7)$$

$\forall \mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{L}(X) \to \widehat{L}$ $\exists \widehat{t}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ $\forall \widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$

$$\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \inf_{x\in X} \max\{\widehat{t}(x), \widehat{g}(x)\} \equiv$$
$$\equiv \underset{x\in X}{\widehat{+}} (\widehat{t}(x) \widehat{\times} \widehat{g}(x)) \overset{def}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot)). \quad (8)$$

Действительно, для любых функций $g(\cdot)\colon X \to L$, $\widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ имеют место «интегральные представления» [1, 3]: $g(x) = \sup_{y\in X} \min\{g(y), \chi_{\{y\}}(x)\} \equiv \underset{y\in X}{+} (g(y) \times \chi_{\{y\}}(x))$, $\widehat{g}(x) = \inf_{y\in X} \max\{\widehat{g}(y), \widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(x)\} \equiv \underset{y\in X}{\widehat{+}} (\widehat{g}(y) \widehat{\times} \widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(x))$, $x \in X$. Поэтому, в силу однородности и полной аддитивности pl- и bel-интегралов, $\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \underset{y\in X}{+} (g(y) \times \mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot))) \equiv \underset{y\in X}{+} (g(y) \times t(y)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pl}_t(g(\cdot))$, где $t(y) = \mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot)) = \mathrm{pl}_t(\chi_{\{y\}}(\cdot)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}_t(\{y\})$, $y \in X$; $\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \underset{y\in X}{\widehat{+}} (\widehat{g}(y) \widehat{\times} \mathrm{bel}(\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(\cdot))) \equiv \underset{y\in X}{\widehat{+}} (\widehat{g}(y) \widehat{\times} \widehat{t}(y)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot))$, где $\widehat{t}(y) = \mathrm{bel}(\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(\cdot)) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(\cdot)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(X \setminus \{y\})$, $y \in X$.

Следствия. Из определения 1.1 и теоремы 1.1 следуют:

- *равенства* (1) для мер Pl и Bel: $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}(E) = \mathrm{pl}_t(\chi_E(\cdot)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}_t(E) = \underset{x\in E}{+} t(x)$, $\mathrm{Bel}(E) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{\chi}_E(\cdot)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E) = \underset{x\in X\setminus E}{\widehat{+}} \widehat{t}(x)$;
- *полная аддитивность* мер Pl_t и $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}$: $\mathrm{Pl}_t(\bigcup_{j\in J} E_j) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pl}_t(\chi_{\bigcup_{j\in J} E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{pl}_t((\underset{j\in J}{+} \chi_{E_j})(\cdot)) = \underset{j\in J}{+} \mathrm{Pl}_t(E_j)$, $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(\bigcap_{j\in J} E_j) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{\chi}_{\bigcap_{j\in J} E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}_{\widehat{t}}((\underset{j\in J}{\widehat{+}} \widehat{\chi}_{E_j})(\cdot)) = \underset{j\in J}{\widehat{+}} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E_j)$, и тот факт, что
- $\mathrm{pl}_t(g(\cdot))$ и $\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot))$ *суть интегралы от функций* $g(\cdot) \in L(X)$ *и* $\widehat{g}(\cdot) \in \widehat{L}(X)$ *относительно мер* $\mathrm{Pl}_t(E) = \underset{x\in E}{+} t(x)$ *и* $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E) = \underset{x\in X\setminus E}{\widehat{+}} \widehat{t}(x)$.

1.7. Субъективная независимость

Переформулируем в терминах мер Pl и Bel определения независимости в терминах мер возможности P и необходимости N [1]. Пусть $\widetilde{y}$ — НОЭ, канонический для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}_Y, \mathrm{Bel}_Y) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$, т. е. $\forall B \in \mathcal{P}(Y)$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in B) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}_Y(B)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in B) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}_Y(B)$, и $q_i(\cdot)\colon Y \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции.

Определение 1.2.[1] НОЭ $\widetilde{x}_i = q_i(\widetilde{y})$, $i = 1, \ldots, n$, со значениями в X_i, $i = 1, \ldots, n$, взаимно $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$-независимы, если правдоподобие события: $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $\widetilde{x}_i = x_i$

[1] Определение формально эквивалентно определению независимости нечетких элементов в [1].

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}\big((\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)=(x_1,\dots,x_n)\big)=t^{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n}(x_1,\dots,x_n)= \\ =\min_{1\leqslant i\leqslant n} t^{\widetilde{x}_i}(x_i)=\mathop{\times}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} t^{\widetilde{x}_i}(x_i), \quad (9)$$

взаимно $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$-независимы, если доверие события: $\exists\, i\in\{1,\dots,n\}$ $\widetilde{x}_i\neq x_i$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}\big((\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)\neq(x_1,\dots,x_n)\big)=\widehat{t}^{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n}(x_1,\dots,x_n)= \\ =\max_{1\leqslant i\leqslant n} \widehat{t}^{\widetilde{x}_i}(x_i)=\mathop{\widehat{\times}}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \widehat{t}^{\widetilde{x}_i}(x_i), \quad (10)$$

где $t^{\widetilde{x}_i}(x_i)=\sup\{t^{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n}(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_1\in X_1,\dots,x_{i-1}\in X_{i-1},x_{i+1}\in X_{i+1},\dots,x_n\in X_n\}$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}_i}(x_i)=\inf\{\widehat{t}^{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n}(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_1\in X_1,\dots,x_{i-1}\in X_{i-1},x_{i+1}\in X_{i+1},\dots,x_n\in X_n\}$, $x_i\in X_i$, $i=1,\dots,n$.

События $B_i\in\mathcal{P}(Y)$, $i=1,\dots,n$, взаимно Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, если

$$\mathrm{Pl}_Y\Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}B_i\Big)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Pl}_Y(B_i)=\mathop{\times}\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Pl}_Y(B_i) \quad (11)$$
$$\Big(\mathrm{Bel}_Y\Big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}B_i\Big)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Bel}_Y(B_i)=\mathop{\widehat{\times}}\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Bel}_Y(B_i)\Big).$$

Если меры $\mathrm{Pl}_Y(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}_Y(\cdot)$ дуально согласованы, т. е. $\exists\,\theta(\cdot)\in\Theta$ $\mathrm{Bel}_Y(A)=\theta(\mathrm{Pl}_Y(Y\setminus A))$, $A\in\mathcal{P}(Y)$, то *Pl_Y- и Bel_Y-независимости эквивалентны*, а события $B_1,\dots,B_n$ в (11) и НОЭ $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n$ в (9), (10) — *взаимно независимы*.

Независимость НОЭ и но. м. определяется подобно независимости нч. э. и нч. м. в [1]. Заметим, что

- если $z_i(\cdot)\colon X_i\to Z_i$, $i=1,\dots,n$, — любые функции, и НОЭ $\widetilde{x}_i$, $i=1,\dots,n$, взаимно Pl- (Bel-) независимы, то взаимно Pl- (Bel-) независимы и НОЭ $\widetilde{z}_i=z_i(\widetilde{x}_i)$, $i=1,\dots,n$.
- но. э. $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n$, заданные на $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{Pl}_Y,\mathrm{Bel}_Y)$, со значениями в $(X_1,\mathcal{P}(X_1)),\ \dots,(X_n,\mathcal{P}(X_n))$ взаимно Pl- (Bel-) независимы, если и только если $\forall A_j\in\mathcal{P}(X_j)$, $j=1,\dots,n$,

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}\Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i\in A_i\}\Big)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_i\in A_i)$$
$$\Big(\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}\Big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i\in A_i\}\Big)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_i\in A_i)\Big). \quad (12)$$

- если НОЭ $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n$ взаимно $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$- ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$-) независимы, то правдоподобия (доверия) событий $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i\in A_i\}$ и $\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i\in A_i\}$ *определяются* правдоподобиями (довериями) событий $\widetilde{x}_i\in A_i$, $i=1,\dots,n$.
- если события B_i, $i=1,\dots,n$, взаимно Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то правдоподобия (доверия) событий $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}B_i$ и $\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n}B_i$ *определяются* правдоподобиями (довериями) событий B_i, $i=1,\dots,n$.

Согласно последним замечаниям естественны следующие определения *субъективной независимости*, «интуитивно более понятные», чем данные в определении 1.2.

Определение 1.3. События $B_1,\dots,B_n$ ($B_1',\dots,B_n'$) назовем *взаимно субъективно* Pl_Y- (Bel_Y-) *независимыми*, если существует непрерывная функция $f(\cdot)\colon\ [0,1]^n\to[0,1]$ ($f'(\cdot)\colon\ [0,1]^n\to[0,1]$) такая, что

$$\mathrm{Pl}_Y\Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}B_i\Big)=f(\mathrm{Pl}_Y(B_1),\dots,\mathrm{Pl}_Y(B_n))$$
$$\Big(\mathrm{Bel}_Y\Big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}B_i'\Big)=f'(\mathrm{Bel}_Y(B_1'),\dots,\mathrm{Bel}_Y(B_n'))\Big). \quad (13)$$

Проверим, что *взаимная и взаимная субъективная независимости эквивалентны*. Достаточно рассмотреть случай $n=2$. Если B_1 и B_2 (B_1' и B_2') Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то они и субъективно независимы, ибо в (13) $f(\cdot,\cdot)=\min\{\cdot,\cdot\}$ ($f'(\cdot,\cdot)=\max\{\cdot,\cdot\}$). Поскольку события B_1 и $\varnothing$, B_1 и Y (B_1' и $\varnothing$, B_1' и Y) при любом B_1 (B_1') Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то B_1 и $\varnothing$, B_1 и Y (B_1' и $\varnothing$, B_1' и Y) Pl_Y- (Bel_Y-) независимы и субъективно, т. е. в (13) 1. $f(b_1,0)=0$, $f(b_1,1)=b_1$ ($f'(b_1',0)=b_1'$, $f'(b_1',1)=1$). Если же B_1 и B_2 (B_1' и B_2') субъективно Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то в (13) 2. $f(b_1,b_2)=f(b_2,b_1)$ ($f'(b_1',b_2')=f'(b_2',b_1')$), где $b_i=\mathrm{Pl}_Y(B_i)$ ($b_i'=\mathrm{Bel}_Y(B_i')$), $i=1,2$. Наконец, согласно (13) 3. для любых $b_1,b_2\in[0,1]$ ($b_1',b_2'\in[0,1]$) и для любого $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ $\gamma\circ f(b_1,b_2)=f(\gamma(b_1),\gamma(b_2))$ ($\gamma\circ f'(b_1',b_2')=f'(\gamma(b_1'),\gamma(b_2'))$). Согласно 1, 2 и 3, для любых $b_1,b_2,b_1',b_2'\in[0,1]$ выполнены условия теоремы 1.1 в [1], следовательно, $f(\cdot,\cdot)=\min\{\cdot,\cdot\}$, $f'(\cdot,\cdot)=\max\{\cdot,\cdot\}$.

Определение 1.4. Неопределенные элементы $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n$ назовем взаимно субъективно $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$- ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$-) независимыми, если существует непрерывная функция $f(\cdot)\colon[0,1]^n\to[0,1]$ ($f'(\cdot)\colon[0,1]^n\to[0,1]$) такая, что $\forall A_j\in\mathcal{P}(X_j)$, $j=1,\dots,n$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}\Big(\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i\in A_i\}\Big)=f(\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_1\in A_1),\dots,\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_n\in A_n))$ ($\forall A_j'\in\mathcal{P}(X_j)$, $j=1,\dots,n$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}\Big(\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i\in A_i\}\Big)=f'(\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_1\in A_1'),\dots,\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_n\in A_n'))$).

Разумеется, и в этом случае *взаимная и взаимная субъективная независимости эквивалентны*.

1.8. Условные субъективные распределения и меры

Обозначим в определении 1.2 $(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k)\sim\widetilde{z}_1$, $(\widetilde{x}_{k+1},\dots,\widetilde{x}_n)\sim\widetilde{z}_2$, $X_1\times\ldots\times X_k\sim Z_1$, $X_{k+1}\times\ldots\times X_n\sim Z_2$, $(x_1,\dots,x_k)\sim z_1$, $(x_{k+1},\dots,x_n)\sim z_2$.

Определение 1.5. Вариантом условного (*со значениями в шкале* L) распределения правдоподобий равенств $\widetilde{z}_1=z_1$, $z_1\in Z_1$, при условии $\widetilde{z}_2=z_2$ назовем любое решение $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)$ уравнения

$$\min\big\{t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1\mid z_2),t^{\widetilde{z}_2}(z_2)\big\}=t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1,z_2),\quad z_1\in Z_1,\ z_2\in Z_2, \quad (14)$$

где

$$t^{\widetilde{z}_2}(z_2) = \sup\{t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) \mid z_1 \in Z_1\}, \quad z_2 \in Z_2. \tag{15}$$

Вариантом условного (*со значениями в шкале* $\widehat{L}$) распределения доверий неравенств $\widetilde{z}_1 \neq z_1$, $z_1 \in Z_1$, при условии[1] $\widetilde{z}_2 = z_2$ назовем любое решение $\widehat{t}^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)$ уравнения

$$\widehat{t}^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) = \max\left\{\widehat{t}^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1 \mid z_2), \widehat{t}^{\widetilde{z}_2}(z_2)\right\}, \quad z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \tag{16}$$

где $\widehat{t}^{\widetilde{z}_2}(z_2) = \inf\{\widehat{t}^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) \mid z_1 \in Z_1\}$, $z_2 \in Z_2$.

Поскольку в (14), (15) $t^{\widetilde{z}_2}(z_2) \geqslant t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, уравнение (14) разрешимо относительно $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)$. Любой вариант условного, при условии $\widetilde{z}_2 = z_2$, распределения правдоподобий значений $\widetilde{z}_1$ можно определить равенством

$$t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2) = \begin{cases} t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2), \\ \quad \text{если } t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) < t^{\widetilde{z}_2}(z_2), \\ f(t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2)), \\ \quad \text{если } t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) = t^{\widetilde{z}_2}(z_2), \end{cases} \quad z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \tag{17}$$

где $f(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — произвольная функция такая, что $f(a) \geqslant a$, $a \in [0,1]$.

Заметим однако, что при некоторых $z_2 \in Z_2$ среди вариантов (17) условного распределения $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|z_2)$ *может и не быть распределения условного правдоподобия*. Действительно, если в (15), например, при $\overline{z}_2 \in Z_2$ точная верхняя грань не достигается, то $t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2) < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, и, следовательно, в (14) (см. (17))

$$\min\left\{t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2), t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)\right\} = t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2). \tag{18}$$

Если при этом $t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, то согласно (15), (18) $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, т. е. $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)\colon Z_1 \to Z_2$ *не есть распределение правдоподобий значений* НОЭ $\widetilde{z}_1$.

Подобное замечание касается и вариантов условного распределения доверий в (16).

Содержательная интерпретация этого факта состоит в том, что в (14) условное распределение $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)\colon Z_1 \to L$ *принимает значения в шкале* L, в которой правдоподобие $\mathrm{Pl}(\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2) = t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, т. е. истинность равенства $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$, при *выполнении* которого получено распределение НОЭ $\widetilde{z}_1$, *не абсолютна*, что *субъективно неприемлемо*. Пусть $0 < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$. Рассмотрим решения $\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)$ уравнения (14) со значениями в *субъективной* шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$, которую МИ *определил* так, чтобы в ней правдоподобие истинности равенства $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$ *стало равным единице*, задав $\gamma_{\overline{z}_2}(\cdot)$ как непрерывную, строго монотонную функцию $[0, t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)] \to [0,1]$, $\gamma_{\overline{z}_2}(0) = 0$, $\gamma_{\overline{z}_2}(t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)) = 1$. В субъективной шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$ уравнение (14) записывается в виде $\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2) = \min\left\{\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2), \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)\right\} = \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, согласно которому при любом $\overline{z}_2 \in Z_2$, при котором $t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) > 0$, *условное субъективное распределение правдоподобия* $\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, для любого решения $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)$ уравнения (14) есть *распределение субъективного правдоподобия* $\gamma_{\overline{z}_2} \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\widetilde{z}_1 = z_1 \mid \widetilde{z}_2 = \overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, *со значениями в субъективной шкале* $\gamma_{\overline{z}_2}L$, *в данном случае — условного*, при условии $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$.

Определение 1.6. Вариантом условного, при условии $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$, $0 < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, субъективного распределения правдоподобий значений $\widetilde{z}_1$ в субъективной шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$ назовем функцию $t_s^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, где $\gamma_{\overline{z}_2}(\cdot)\colon [0, t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)] \to [0,1]$ — любая непрерывная, строго монотонная функция $\gamma_{\overline{z}_2}(0) = 0$, $\gamma_{\overline{z}_2}(t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)) = 1$.

Вариантом условного, при условии $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$, $0 < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, субъективного распределения доверий значений $\widetilde{z}_1$ в субъективной шкале $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}\widehat{L}$ назовем функцию $\widehat{t}_s^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = \widehat{\gamma}_{\overline{z}_2} \circ \widehat{t}^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, где $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}(\cdot)\colon [t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2), 1] \to [0,1]$ — любая непрерывная, строго монотонная функция $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}(t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)) = 0$, $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}(1) = 1$.

Подобная проблема сопутствует определению условного правдоподобия $\mathrm{Pl}(A \mid B)$ как решения уравнения

$$\mathrm{Pl}(A \cap B) = \min\{\mathrm{Pl}(A \mid B), \mathrm{Pl}(B)\}, \tag{$*$}$$

отражающего эквивалентность событий $A \cap B$ и (A, если B) & B, когда $0 < \mathrm{Pl}(B) < 1$. В этом случае любая непрерывная, строго монотонная функция $\gamma_B(\cdot)\colon [0, \mathrm{Pl}(B)] \to [0,1]$, $\gamma_B(0) = 0$, $\gamma_B(\mathrm{Pl}(B)) = 1$, *характеризующая событие* B *в субъективной шкале* $\gamma_B L$ *как достоверное*, определит любой вариант условного правдоподобия $\mathrm{Pl}_s(A \mid B) = \gamma_B \circ \mathrm{Pl}(A \cap B)$ как единственное решение уравнения $\gamma_B \circ \mathrm{Pl}(A \cap B) = \min\{\gamma_B \circ \mathrm{Pl}(A \mid B), \gamma_B \circ \mathrm{Pl}(B)\}$ («спроецированного» на субъективную шкалу уравнения ($*$)), характеризующее событие B в субъективной шкале как достоверное $\mathrm{Pl}_s(B \mid B) = 1$.

Заметим, что в случае $0 < \mathrm{Pr}(B) < 1$ *условная вероятность* $\mathrm{Pr}(A \mid B) = \mathrm{Pr}(A \cap B)/\mathrm{Pr}(B)$ определена в «*субъективной*» шкале, преобразование в которую определяет «нормирующий» множитель $1/\mathrm{Pr}(B)$, как решение уравнения $\mathrm{Pr}(A \cap B) = \mathrm{Pr}(A \mid B)\mathrm{Pr}(B)$, *удовлетворяющее условию* $\mathrm{Pr}(B \mid B) = 1$.

Что касается условного доверия $\mathrm{Bel}(A \mid B)$ как решения уравнения

$$\mathrm{Bel}(A \cup (X \setminus B)) = \max\{\mathrm{Bel}(A \mid B), \mathrm{Bel}(X \setminus B)\}, \tag{$**$}$$

[1] Неравенство $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2) \neq (z_1, z_2)$, доверие которого слева в (16), верно, когда либо $\widetilde{z}_1 \neq z_1$, если $\widetilde{z}_2 = z_2$, либо $\widetilde{z}_2 \neq z_2$.

отражающего эквивалентность событий $A \cup (X \setminus B)$ и $(A$, если $B) \vee X \setminus B$, то в случае $0 < \mathrm{Bel}(X \setminus B) < 1$ следует определить условное доверие $\mathrm{Bel}_s(A \mid B)$ в субъективной шкале $\widehat{\gamma}_B \widehat{L}$, задав любую непрерывную строго монотонную функцию $\widehat{\gamma}_B(\cdot)\colon [\mathrm{Bel}(X \setminus B), 1] \to [0,1]$, $\widehat{\gamma}_B(\mathrm{Bel}(X \setminus B)) = 0$, $\widehat{\gamma}_B(1) = 1$, и определив $\mathrm{Bel}_s(A \mid B) = \widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(A \cup (X \setminus B))$ как единственное решение уравнения $\widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(A \cup (X \setminus B)) = \max\{\widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(A \mid B), \widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(X \setminus B)\}$ («спроецированного» на субъективную шкалу $\widehat{\gamma}_B \widehat{L}$ уравнения (**)), в котором $\widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(X \setminus B) = 0$, ибо в субъективной шкале B — достоверное событие и $\mathrm{Bel}_s(B \mid B) = \widehat{\gamma}_B \mathrm{Bel}(B \cup (X \setminus B)) = 1$.

Замечание 1.3. Автору неизвестны публикации, в которых рассмотрены понятия субъективных шкал значений мер правдоподобия, доверия, субъективной независимости и субъективных условных мер правдоподобия, доверия.

1.9. Другие варианты мер правдоподобия и доверия

1.9.1. Варианты мер правдоподобия и доверия, значения которых, отличные от 0 и 1, могут быть содержательно интерпретированы

Нетрудно привести примеры субъективных моделей, в которых полезна содержательная, независящая от координатных представлений шкал, интерпретация некоторых, *отличных от* 0 *и* 1, значений правдоподобия и доверия, например, — значения $1/2$, отвечающего *индифферентности каждого* МИ. В таком случае для формулировки субъективных моделей коллективу МИ следует *договориться использовать вариант теории*, в котором определены шкалы $L_{\{1/2\}}$ и $\widehat{L}_{\{1/2\}}$ значений правдоподобия и доверия, группа $\overline{\Gamma}_{\{1/2\}}$ автоморфизмов которых определена как подгруппа группы $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал L и $\widehat{L}$, порожденная подгруппой $\Gamma_{\{1/2\}}$ группы Γ преобразований $\gamma_{\{1/2\}}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, *оставляющих неподвижным*[1] *значение* $1/2$: $\Gamma_{\{1/2\}} = \{\gamma(\cdot) \in \Gamma,\ \gamma(1/2) = 1/2\}$. При этом дуальная $L_{\{1/2\}}$ шкала $\widehat{L}_{\{1/2\}}$ будет связана с $L_{\{1/2\}}$ дуальным изоморфизмом $\theta_{\{1/2\}}\colon L_{\{1/2\}} \to \theta_{\{1/2\}} L_{\{1/2\}} = \widehat{L}_{\{1/2\}}$, определенным некоторой функцией $\theta_{\{1/2\}}(\cdot) \in \Theta_{\{1/2\}} = \{\theta \in \Theta,\ \theta(1/2) = 1/2\}$.

Если для содержательной интерпретации коллективом МИ выделены значения a_i, $1 - a_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $0 \leqslant a_1 < \ldots < a_n \leqslant 1/2 \leqslant 1 - a_n < \ldots < 1 - a_1 \leqslant 1$, то подгруппа Γ_S, где $S = \{a_1, \ldots, a_n, 1 - a_n, \ldots, 1 - a_1\}$, группы Γ, определенная функциями $\gamma_S(\cdot) \in \Gamma$, удовлетворяющими условиям $\gamma_S(a_i) = a_i$, $\gamma_S(1 - a_i) = 1 - a_i$, $i = 1, \ldots, n$, определит подгруппу $\overline{\Gamma}_S \subset \overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал $L_{S'}$ и $\widehat{L}_{\widehat{S}'}$, где $S' = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\widehat{S}' = \{1 - a_n, \ldots, 1 - a_1\}$, $S' \cup \widehat{S}' = S$, а класс $\Theta_S \subset \Theta$ функций $\theta_S(\cdot) \in \Theta$, удовлетворяющих условиям $\theta_S(a_i) = 1 - a_i$, $\theta_S(1 - a_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, определит класс $\overline{\Theta}_S$ дуальных изоморфизмов $\theta_S\colon L_{S'} \to \theta_S L_{S'} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L}_{\widehat{S}'}$. В этом случае выделенные значения правдоподобий и доверий будут иметь один и тот же смысл для всех МИ коллектива.

Рассмотрим математический формализм, позволяющий охарактеризовать шкалу $L_{S'}$, $S' = \{a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n < 1 = a_{n+1}\}$ [3]. Определим параметрические классы отображений

$$(\cdot)^{\smile}_a\colon [0,1] \to [0,1],\ (\cdot)^{\frown}_a\colon [0,1] \to [0,1],\ a \in S',:$$
$$(u)^{\smile}_a \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, u\} = a + u, \tag{19}$$
$$(u)^{\frown}_a \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a, u\} = a \times u, \quad u \in [0,1],$$

где параметр $a \in S'$ обозначает неподвижную точку шкалы $L_{S'}$. Заметим, что отображения (19) суть *проекторы*, ибо $((\cdot)^{\smile}_a)^{\smile}_a = (\cdot)^{\smile}_a$ и $((\cdot)^{\frown}_a)^{\frown}_a = (\cdot)^{\frown}_a$, а равенства

$$((u)^{\smile}_{a_i})^{\smile}_{a_j} = (u)^{\smile}_{a_i + a_j},\ ((u)^{\frown}_{a_i})^{\frown}_{a_j} = (u)^{\frown}_{a_i \times a_j},$$
$$u \in [0,1],\ i,j = 0, \ldots, n+1, \tag{20}$$

означают, что классы отображений (19) являются *полугруппами* относительно их композиций (20), ибо в (20) $a_i, a_j, a_i + a_j, a_i \times a_j \in S'$. Более того, и отображения $((u)^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j} = ((u)^{\frown}_{a_j})^{\smile}_{a_i \times a_j}$, $u \in [0,1]$, и $((u)^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j} = ((u)^{\smile}_{a_j})^{\frown}_{a_i + a_j}$, $u \in [0,1]$, являются *проекторами*, ибо

$$((((\cdot)^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j})^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j} = ((\cdot)^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j},\ ((((\cdot)^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j})^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j} = ((\cdot)^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j}.$$

Если $*$ — символ любой из бинарных операций $+$ или $\times$, то $(u * v)^{\smile}_a = (u)^{\smile}_a * (v)^{\smile}_a$, $(u * v)^{\frown}_a = (u)^{\frown}_a * (v)^{\frown}_a$, $u, v \in [0,1]$, поэтому *полугруппа* отображений (19) определяет *полугруппу автоморфизмов* шкалы $L_{S'}$.

Наконец, $\gamma \circ (\cdot)^{\smile}_a = (\gamma(\cdot))^{\smile}_{\gamma(a)}$, $\gamma \circ (\cdot)^{\frown}_a = (\gamma(\cdot))^{\frown}_{\gamma(a)}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\theta \circ (\cdot)^{\smile}_a = (\theta(\cdot))^{\frown}_{\theta(a)}$, $\theta \circ (\cdot)^{\frown}_a = (\theta(\cdot))^{\smile}_{\theta(a)}$, $\theta(\cdot) \in \Theta$.

Для представления pl-интеграла в шкале $L_{S'}$ заметим, что так как $\mathrm{pl}_g(f(\cdot)) = \underset{x \in X}{+}(g(x) \times f(x))$, то

$$(\mathrm{pl}_g(f(\cdot)))^{\frown}_a = \mathrm{pl}_{g^{\frown}_a}(f(\cdot)) = \mathrm{pl}_{g^{\frown}_a}(f^{\frown}_a(\cdot)),$$
$$(\mathrm{pl}_g(f(\cdot)))^{\smile}_a = \mathrm{pl}_{g^{\smile}_a}(f(\cdot)) = \mathrm{pl}_{g^{\smile}_a}(f^{\smile}_a(\cdot)),$$

где $f^{\smile}_a(x) = (f(x))^{\smile}_a$, $f^{\frown}_a(x) = (f(x))^{\frown}_a$, $x \in X$, и соответственно для $a_i < a_{i+1}$

$$((\mathrm{pl}_g(f(\cdot)))^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}} = \mathrm{pl}_{(g^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}}}(f(\cdot)) = \mathrm{pl}_{(g^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}}}((f^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}}(\cdot))$$

— представление (проекция) pl-интеграла со значениями в шкале $L^{(i)} = ([a_i, a_{i+1}], \leqslant, +, \times)$, где a_i, a_{i+1}, $i = 0, \ldots, n$, — неподвижные точки шкалы $L_{S'} = \bigcup\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} L^{(i)}$, $\overline{\Gamma}_{\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}} = \overline{\Gamma}_{\{a_0, a_1\}} \otimes \ldots \otimes \overline{\Gamma}_{\{a_n, a_{n+1}\}}$ — *группа ее автоморфизмов*.

Заметим, что в этом варианте теории мер правдоподобия, доверия МИ из образованного ими

[1] Операции $+ \sim \max$, $\times \sim \min$ в $L_{\{1/2\}}$ сохранятся, если дополнительно к указанным в теореме 1.1 в [1] будут выполнены условия: $x \times (1/2) = x$, $x + (1/2) = 1/2$, $x \in [0, 1/2]$, $(1/2) \times x = 1/2$, $(1/2) + x = x$, $x \in [1/2, 1]$.

коллектива могут содержательно интерпретировать не только значения $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = 1$ pl-интеграла и правдоподобия, но и *факты включения их значений в неподвижные интервалы* $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$.

Для представления bel-интеграла в шкале $\widehat{L}_{\widehat{S}'}$ следует использовать дуальные отображения $(\cdot)_{\widehat{a}}^{\widehat{}} = (\cdot)_{a}^{\smile}$, $(\cdot)_{\widehat{a}}^{\smile} = (\cdot)_{a}^{\frown}$.

1.9.2. Третий вариант теории мер правдоподобия, доверия

Рассмотрим вариант теории мер правдоподобия Pl' и доверия Bel', называемый далее третьим (второй вариант см. в [3, 39]), который наследует некоторые черты теории вероятностей и психофизики. Определим шкалу $L' = ([0,1], \leqslant, +', \times')$ значений Pl', задав (как и во втором варианте) $a +' b \overset{\text{def}}{=} a + b = \max\{a, b\}$, $a \times' b \overset{\text{def}}{=} a \cdot b = a \otimes b$, где $\otimes$ — символ «обычного» умножения и выполнено условие дистрибутивности $c \times' (a +' b) = (c \times' a) +' (c \times' b)$, $a, b, c \in [0,1]$. Группа $\overline{\Gamma}'$ автоморфизмов L' порождается группой преобразований $\gamma'_\alpha(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma'_\alpha(a) = a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, согласно условиям $\forall a, b \in [0,1]$ $\forall \alpha > 0$ $\gamma'_\alpha(a +' b) = \gamma'_\alpha(a) +' \gamma'_\alpha(b)$, $\gamma'_\alpha(a \times' b) = \gamma'_\alpha(a) \times' \gamma'_\alpha(b)$.

Заметим, что в третьем (и во втором) варианте шкала L' *имеет* Γ'*-инвариант*, а именно *отношение логарифмов* $\pi = \log\gamma'_\alpha(\mathrm{Pl}'(A))/\log\gamma'_\alpha(\mathrm{Pl}'(B)) = \log \mathrm{Pl}'(A)/\log \mathrm{Pl}'(B)$ *не зависит от выбора шкалы* $\gamma'_\alpha L'$, $\gamma'_\alpha \in \overline{\Gamma}'$, и может быть содержательно истолковано [39]. Дело в том, что класс преобразований $a \to a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, содержит класс так называемых *психофизических функций*, связывающих шкалы значений реальных интенсивностей стимулов со шкалами их оценок испытуемыми [15]. В таком контексте рассматриваемые далее меры Pl' и Bel' можно интерпретировать как *оценки исследователя* (в его шкалах L' и $\widehat{L}'$) *модальных операторов правдоподобия и доверия* в его субъективной формулировке модели объекта исследования.

Шкалу $\widehat{L}' = ([0,\infty], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}', \widehat{\times}')$ значений Bel' определим (в отличие от второго варианта) как дуально изоморфную L', задав семейство дуальных изоморфизмов $\theta'_\beta\colon L' \to \theta'_\beta L' = \widehat{L}'$, порожденное семейством отображений $\theta'_\beta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,\infty]$, $\beta > 1$,
$$\theta'_\beta(u) = \begin{cases} \log_\beta u^{-1}, & 0 < u \leqslant 1, \\ \infty, & u = 0, \end{cases}$$
а *бинарные операции* $\widehat{+}'$ *и* $\widehat{\times}'$ *в* $\widehat{L}'$ определим *как дуальные операциям* $+'$ *и* $\times'$ *в* L', *условиями*
$$\theta'_\beta(u_1 +' u_2) = \log_\beta(\max\{u_1, u_2\})^{-1} = \\ = \min\{\log_\beta u_1^{-1}, \log_\beta u_2^{-1}\} \overset{\text{def}}{=} \theta'_\beta(u_1) \widehat{+}' \theta'_\beta(u_2) \quad (21)$$
$$\theta'_\beta(u_1 \times' u_2) = \log_\beta(u_1 \times' u_2)^{-1} = \log_\beta u_1^{-1} \oplus \log_\beta u_2^{-1} \overset{\text{def}}{=} \\ \overset{\text{def}}{=} \theta'_\beta(u_1) \widehat{\times}' \theta'_\beta(u_2), \ u_1, u_2 \in [0,1], \ \beta > 1,$$
согласно которым $v_1 \widehat{+}' v_2 \overset{\text{def}}{=} \min\{v_1, v_2\}$, $v_1 \widehat{\times}' v_2 \overset{\text{def}}{=} v_1 \oplus v_2$, где $\oplus$ — символ «обычного» сложения и выполнено условие дистрибутивности: $v \widehat{\times}' (v_1 \widehat{+}' v_2) = (v \widehat{\times}' v_1) \widehat{+}' (v \widehat{\times}' v_2)$, $v, v_1, v_2 \in [0,\infty]$.

Группа $\widehat{\overline{\Gamma}}$ автоморфизмов шкалы $\widehat{L}'$ порождается группой $\widehat{\Gamma}'$ преобразований $\widehat{\gamma}'_\alpha(\cdot)\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$, $\alpha > 0$, $\widehat{\gamma}'_\alpha(v) = \alpha v$, $v \in [0,\infty]$, при этом для любых $v_1, v_2 \in [0,\infty]$ и любого $\alpha > 0$ $\widehat{\gamma}'_\alpha(v_1 \widehat{*} v_2) = \widehat{\gamma}'_\alpha(v_1) \widehat{*} \widehat{\gamma}'_\alpha(v_2)$, где $\widehat{*}$ — символ любой из операций $\widehat{+}'$ или $\widehat{\times}'$.

Наконец, pl'-, bel'-интегралы в третьем варианте определим равенствами
$$\mathrm{pl}'(\cdot)\colon \ L'(X) \to L', \ \mathrm{pl}'_g(f(\cdot)) = \underset{x \in X}{+'}(g(x) \times' f(x)) = \\ = \max_{x \in X}(g(x) \otimes f(x)), \quad (22)$$
$$\mathrm{bel}'(\cdot)\colon \widehat{L}'(X) \to \widehat{L}', \ \mathrm{bel}'_{g'}(\widehat{f}(\cdot)) = \theta'_\beta(\mathrm{pl}'_g(\theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{f}(\cdot))) = \\ = \underset{x \in X}{\widehat{+}'}(\theta'_\beta \circ g(x) \widehat{\times}' \widehat{f}(x)) = \min_{x \in X}(\widehat{g}(x) \oplus \widehat{f}(x)),$$
где $\widehat{g}(\cdot) = \theta'_\beta \circ g(\cdot)$, $\theta^{-1}_\beta(\cdot)\colon [0,\infty] \to [0,1]$, $\beta > 1$, — семейство обратных отображений, $\theta'^{-1}_\beta(v) = \begin{cases} \beta^{-v}, & 0 \leqslant v < \infty, \\ 0, & v = \infty, \end{cases}$ порождающих семейство дуальных изоморфизмов $\theta'^{-1}_\beta\colon \widehat{L} \to \theta'^{-1}_\beta \widehat{L}' = L'$. Меры Pl'- и Bel' суть соответственно
$$\mathrm{Pl}'_g(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pl}'_g(\chi_A(\cdot)) = \underset{x \in X}{+'}(g(x) \times' \chi_A(x)) = \max_{x \in A} g(x),$$
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$
$$\mathrm{Bel}'_{\widehat{g}}(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{bel}'_{\widehat{g}}(\widehat{\chi}_A(\cdot)) = \theta'_\beta(\mathrm{pl}'_g(\theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{\chi}_A(\cdot))) = \\ = \underset{x \in X}{\widehat{+}'}(\widehat{g}(x) \widehat{\times}' \widehat{\chi}_A(x)) = \min_{x \in X \setminus A} \widehat{g}(x),$$
где $\widehat{g}(\cdot) = \theta'_\beta \circ g(\cdot)$, $\widehat{\chi}_A(x) = \theta'_\beta \circ \chi_{X \setminus A}(x) = \begin{cases} \widehat{0} = \infty, & x \in A, \\ \widehat{1} = 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$

З а м е ч а н и е 1.4. Автору неизвестны публикации, в которых рассмотрен данный вариант теории мер правдоподобия и доверия.

2. Эмпирические основы

2.1. Эмпирическое восстановление модели НО. НЧ. О. Построение нечеткого неопределенного элемента (НЧ. НОЭ) как эмпирической оценки неизвестного параметра НО. НЧ. О.

Разумеется, субъективное моделирование может существенно повышать эффективность научных исследований лишь при условии, что при доступности данных наблюдений за ОИ может быть проверена адекватность его субъективной модели цели исследования, а субъективная модель — скорректирована, если требуется.

Пусть $M(x) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta(\cdot; x), \mathrm{N}^\eta(\cdot; x))$ — неопределённая (заданная с точностью до значения параметра[1] $x \in X$) нечеткая модель НО. НЧ. О. (см. [1, п. 1.3]), и МИ предложил модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ НОЭ $\widetilde{x}$, охарактеризовав свои субъективные представления об истинности каждого $x \in X$ относительными значениями мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$. Это означает, что МИ предложил *субъективную нечеткую модель* $M(\widetilde{x}) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}, \mathrm{N}^{\widetilde{\eta}})$ НО. НЧ. О., *в которой но. нч. э.* $\widetilde{\eta}$ *задан субъективными мерами возможности* $\widetilde{\mathrm{P}}(A) = \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta} \in A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P}^{\eta}(A; \widetilde{x})$ *и необходимости* $\widetilde{\mathrm{N}}(A) = \mathrm{N}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta} \in A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{N}^{\eta}(A; \widetilde{x})$, $A \in \mathcal{P}(Y)$. В данном случае $\mathrm{P}^{\eta}(\cdot; x)$ и $\mathrm{N}^{\eta}(\cdot; x)$ суть *модальные операторы нечеткости*, заданные на $\mathcal{P}(Y)$ и для каждого $x \in X$ определяющие модель ОИ, а $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ суть *модальные операторы неопределенности*, заданные МИ на множестве $\mathcal{P}(X)$ всех НВ и представляющие его субъективное суждение об истинности предложенной им модели $M(\widetilde{x})$. Подобная субъективная модель исследована в п. 3 в [36], а в данном случае речь пойдет об *эмпирическом оценивании неизвестного* $x \in X$.

Если МИ доступны данные наблюдений за НО. НЧ. О., моделью которого является семейство $M(X) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}(\cdot; x), \mathrm{N}^{\eta}(\cdot; x))$, $x \in X$, он *может построить эмпирическую (нечеткую) модель* НОЭ $\widetilde{x}$, *оценивающего значение* $x \in X$ по схеме, подобной схеме построения статистической модели НОЭ [2].

2.1.1. При любом $x \in X$ объект может находиться в одном из двух состояний: x или $x'(x)$, отличном от x

Рассмотрим случай, в котором объект для каждого $x \in X$ может находиться в одном из двух состояний, определенных либо значением x, либо (конкурирующим) $x' = x'(x) \neq x$, где отображение $x'(\cdot): X \to X$ известно МИ. *Семейство* P^{η}*-критических*[2] для гипотезы $H(x) = \{x\}$ областей, инвариантное относительно выбора шкалы значений P^{η}, обозначим $\Psi_{\lambda}(x) = \{y \in Y,\ g^{\eta}(y; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y; x)\}\}$, $\lambda \in (0,1)$, см. пункт 5.7 в [1]. При наблюдении $\eta = y$ гипотеза $\{x\}$, согласно которой наблюдение контролировалось моделью $M(x)$, отвергается, если $y \in \Psi_{\lambda}(x)$, причем отвергается ошибочно с возможностью

$$\mathrm{p}_{\lambda}^{-}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in \Psi_{\lambda}(x); x) = \sup\{g^{\eta}(y; x) \mid y \in Y,\ g^{\eta}(y; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y; x)\}\}.$$

Понятно, что *чем больше минимальное по* $\lambda \in (0,1)$ *значение возможности* $\mathrm{p}_{\lambda}^{-}(x; y_0)$ *ошибочно отвергнуть гипотезу* $\{x\}$ *при наблюдении* $\eta = y_0$, *тем значительнее наблюдение* $\eta = y_0$ *свидетельствует о верности гипотезы* $\{x\}$, *согласно которой наблюдение* $\eta = y_0$ *контролировалось моделью* $M(x)$.

Поэтому *нечеткий неопределенный элемент* (НЧ. НОЭ, *неопределенный элемент с нечетким распределением правдоподобий и доверий его значений*) $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\eta)$, *эмпирически оценивающий параметр* x *модели* $M(x)$, *контролировавшей результат наблюдения* $\eta = y_0$, *определим зависящими от* η *вариантами распределений правдоподобий*

$$t^{\widetilde{x}}(x; \eta)\Big|_{\eta = y_0} = t^{\widetilde{x}}(x; y_0) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x; y_0) = \gamma\Big(\inf_{\lambda \in (0,1)} \mathrm{p}_{\lambda}^{-}(x; y_0)\Big) = \gamma\Big(\inf_{\lambda \in (0,1)} \sup\Big\{g^{\eta}(y; x) \mid y \in Y,\ g^{\eta}(y; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y; x)\},\ g^{\eta}(y_0; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y_0; x)\}\Big\}\Big), \quad (23)$$

если множество $\Lambda(x; y_0) = \{\lambda \in (0,1), g^{\eta}(y_0; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y_0; x)\}\} \neq \varnothing$, и $t^{\widetilde{x}}(x; y_0) = 1$, *если* $\Lambda(x; y_0) = \varnothing$, *и доверий*

$$\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x; \eta)\Big|_{\eta = y_0} = \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x; y_0) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x; y_0) = \theta\Big(\inf_{\lambda \in (0,1)} \mathrm{p}_{\lambda}^{-}(x; y_0)\Big) = \sup_{\lambda \in (0,1)} \inf\Big\{\widehat{g}^{\eta}(y; x) \mid y \in Y,\ \widehat{g}^{\eta}(y; x') < \max\{\theta(\lambda), \widehat{g}^{\eta}(y; x)\},\ \widehat{g}^{\eta}(y_0; x') < \max\{\theta(\lambda), \widehat{g}^{\eta}(y_0; x)\}\Big\}, \quad (23^*)$$

если $\Lambda(x; y_0) \neq \varnothing$, и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x, y_0) = 0$, *если* $\Lambda(x; y_0) = \varnothing$. В (23), (23*) $x' = x'(x)$, $\widehat{g}^{\eta}(\cdot,\cdot) = \theta \circ g^{\eta}(\cdot,\cdot)$, а $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\theta(\cdot) \in \Theta$ — произвольные функции.

2.1.2. Для каждого $x \in X$ объект может находиться либо в состоянии x либо в любом состоянии, отличном от x

Если в нечеткой задаче проверки гипотезы $H(x) = \{x\}$ альтернативой является множество $X \setminus \{x\}$, то семейством *нечетких, оценивающих* $x \in X$, *множеств максимального правдоподобия* (о. м. м. п.), подобным семейству *случайных* о. м. м. п. в [2], является семейство нечетких множеств $\Psi^{-1}(\eta, \lambda)$, $\lambda \in (0,1)$, значения которых при $\eta = y_0$ суть

$$\Psi^{-1}(y_0; \lambda) = \{x \in X,\ g^{\eta}(y_0; x) \geqslant \min\{\lambda, \max_{x \in X} g^{\eta}(y_0; x)\} = \min\{\lambda, g(y_0)\}\},\ \lambda \in (0,1), \quad (24)$$

где $g(y_0) = \max_{x \in X} g^{\eta}(y_0; x) = g^{\eta}(y_0, x(y_0))$, а $x(y_0)$ — *максимально правдоподобное значение параметра* $x \in X$ при $\eta = y_0$. Поскольку $\forall x \in X$ $g(y_0) \geqslant g^{\eta}(y_0; x)$, и, следовательно, максимальное значение $\lambda \in (0,1)$, при котором множество $\Psi^{-1}(y_0; \lambda)$ покрывает x, равно $g^{\eta}(y_0; x)$, то

---

[1] Например, $x = e \in (0,1) = X$, т. е. $\mathrm{P}^{\eta} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{N}^{\eta} \in \mathbb{N}_{(\widehat{e})}$, $e = \widehat{e}$ неизвестно, см. п. 1.3 в [1].

[2] Для простоты считаем P^{η} и N^{η} дуально согласованными, тогда семейства P^{η}- и N^{η}-критических областей совпадают.

$$t^{\widetilde{x}}(x;\eta)\Big|_{\eta=y_0} = t^{\widetilde{x}}(x;y_0) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x;y_0) = \\ = \gamma\circ g^{\eta}(y_0;x) = \gamma\circ \mathrm{P}^{\eta}(\eta=y_0;x) \quad (25)$$

— *вариант нечеткого правдоподобия равенства* $\widetilde{x}=x\in X$ *при* $\eta=y_0\in Y$, а

$$\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x;\eta)\Big|_{\eta=y_0} = \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x;y_0) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x;y_0) = \\ = \theta\circ g^{\eta}(y_0;x) = \mathrm{N}^{\eta}(\eta\neq y_0;x) \quad (25^*)$$

— *вариант нечеткого доверия неравенства* $\widetilde{x}\neq x\in X$ *при* $\eta=y_0\in Y$.

Замечание 2.5. Вообще говоря, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X;y_0)\leqslant 1$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing;y_0)\geqslant 0$), но наблюдение $\eta=y_0$ определяет не только вариант эмпирического правдоподобия (доверия), но и *изоморфную* L ($\widehat{L}$) *эмпирическую шкалу* $\gamma_\eta L|_{\eta=y_0}=\gamma_{y_0}L$ ($\widehat{\gamma}_\eta\widehat{L}|_{\eta=y_0}= =\widehat{\gamma}_{y_0}\widehat{L}$), в которой $\gamma_{y_0}\circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X;y_0)=1$ ($\widehat{\gamma}_{y_0}\circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing;y_0)=0$), где $\gamma_{y_0}(\cdot)\colon [0,\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X,y_0)]\to[0,1]$ ($\widehat{\gamma}_{y_0}(\cdot)\colon [\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing,y_0),1]\to[0,1]$) — непрерывная строго монотонная функция, $\gamma_{y_0}(0)=0$, $\gamma_{y_0}(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X,y_0))= =1$ ($\widehat{\gamma}_{y_0}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing,y_0))=0$, $\widehat{\gamma}_{y_0}(1)=1$).

Замечание 2.6. Проблема эмпирического восстановления модели НОЭ рассмотрена в субъективной логике [6, 14, 16], в которой каждому событию $A\in\mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing,X\}$ приписывается «субъективный вес» $b(A)$, отражающий уверенность включения $x\in A$ истинного значения НОЭ $\widetilde{x}$ при отсутствии знаний о включении $x\in A'$ в любое подмножество $A'\subset A$, $A'\neq A$. Элементарным событиям $\{x\}\in\mathcal{P}(X)$ сопоставляются их «базовые частоты» $a(x)$ и общий для всех элементарных событий «вес неопределенности» u как «степень незнания» принадлежности $\widetilde{x}$ какому-либо из подмножества X. Сумма весов всех событий и ве́са неопределенности u, как и сумма всех базовых частот, равны единице. Абсолютное незнание характеризуется нулевыми весами всех событий, единичным весом неопределенности и равными друг другу базовыми частотами, точное знание — равными единице субъективным весом и базовой частоты истинного значения $\widetilde{x}$, равными нулю субъективными весами и базовыми частотами остальных значений $\widetilde{x}$, и нулевым весом неопределенности.

Основной недостаток: *правило комбинирования суждений* [6] и соответственно *метод эмпирического восстановления модели* $\widetilde{x}$ по данным наблюдений основаны на соответствии *субъективных весов байесовским вероятностям*, которые зависят от *субъективного выбора априорной вероятности*.

2.2. Согласованность субъективных и эмпирических, нескольких субъективных и т. п. данных и их комбинирование

Пусть $X=\{x_1,\dots,x_m\}$, $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X\to L$ и $t^{\widetilde{x}(y_0)}(\cdot)\colon X\to L$ суть субъективное и эмпирическое распределения правдоподобий значений НОЭ $\widetilde{x}$, где $t^{\widetilde{x}(y_0)}(\cdot)=t^{\widetilde{x}}(\cdot;y_0)$ либо (23), либо (25). Поскольку распределения представлены в разных шкалах, их невозможно *непосредственно* сравнить на предмет согласованности, так как их значения определены с точностью до (неизвестных!) преобразований $\gamma(\cdot)$ и $\gamma_0(\cdot)$ из Γ, и сравнивать можно лишь упорядоченности их значений. Обозначим $t^{\widetilde{x}(y_0)}(x_i)=t_i^{(0)}$, $t^{\widetilde{x}}(x_i)=t_i^{(1)}$, $i=1,\dots,m$, и охарактеризуем их независимо от шкал их значений, сопоставив каждому из распределений $(m+1)\times(m+1)$ *матрицу* $m^{(\alpha)}=m(t^{(\alpha)}_{\cdot})$, $\alpha=0,1$, *парных сравнений*, матричные элементы которой определим равенствами

$$m_{k,j}^{(\alpha)}=(m(t^{(\alpha)}_{\cdot}))_{kj}=\begin{cases}1, & \text{если } t_k^{(\alpha)}>t_j^{(\alpha)},\\ 0, & \text{если } t_k^{(\alpha)}=t_j^{(\alpha)},\\ -1, & \text{если } t_k^{(\alpha)}<t_j^{(\alpha)},\end{cases} \quad (26)$$
$$k,j=1,2,\dots,m+1,\quad t_{m+1}^{(\alpha)}=0,\quad \alpha=0,1.$$

Теперь вопрос о согласованности распределений $t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$ можно решить, сравнив соответствующие им матрицы $m^{(0)}$ и $m^{(1)}$ (26). Обозначим M_{m+1} класс всех $(m+1)\times(m+1)$ матриц парных сравнений и определим на M_{m+1} евклидово расстояние

$$\rho(a,b)=\left(\sum_{k,j=1}^{m+1}(a_{kj}-b_{kj})^2\right)^{1/2}, \quad (27)$$
$$a=\{a_{kj}\},\quad b=\{b_{kj}\},$$

между матрицами a и b, $a,b\in M_{m+1}$. Если расстояние $\rho(m^{(0)},m^{(1)})$ между матрицами $m^{(0)}$ и $m^{(1)}$ *достаточно мало по сравнению с их нормами* $\|m^{(\alpha)}\|=\big(\sum_{k,j=1}^{m+1}(m_{kj}^{(\alpha)})^2\big)^{1/2}$, $\alpha=0,1$, то распределения $t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$ можно считать *согласованными*, и максимально согласованное с ними распределение можно определить, найдя его матрицу m_* парных сравнений как решение следующей задачи

$$\sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2\rho^2(m^{(\alpha)},m_*)=\min_{m\in M_{m+1}}\sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2\rho^2(m^{(\alpha)},m), \quad (28)$$

где w_α^2 — «вес» распределения[1] $t^{(\alpha)}_{\cdot}$, $\alpha=0,1$, $\sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2=1$. Заметим, что если МИ *ничего не знает о возможных значениях параметра* $x\in X$, то его субъективное распределение правдоподобий $t_i^{(1)}=1$, $i=1,\dots,m$, $m_{k,j}^{(1)}=0$, $k,j=1,\dots,m$ (см. п. 1.5), и задача (28) имеет единственное решение $m_*=m^{(0)}$, а МИ должен свое субъективное распределение «скорректировать», заменив его

[1] «Вес» позволяет учесть «относительную надежность» субъективного и эмпирического распределений.

на эмпирическое. Заметим также, что в данном случае *число* α *матриц парных сравнений может быть любым, конечным*.

Поскольку в (28), как нетрудно убедиться,

$$\sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 \rho^2(m^{(\alpha)}, m) = \sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 \rho^2(m^{(\alpha)}, \overline{m}) + \rho^2(\overline{m}, m), \tag{29}$$

где

$$\overline{m} = \sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 m^{(\alpha)}, \tag{30}$$

то задача (28) эквивалентна задаче отыскания матрицы $m_* \in M_{m+1}$, ближайшей (в смысле (27)) к матрице $\overline{m}$, которая, вообще говоря, не является матрицей парных сравнений, ибо, хотя $\overline{m}_{kj} = -\overline{m}_{jk} \in [-1, 1]$, но, возможно, $\overline{m}_{kj} \notin \{-1, 0, 1\}$, $k, j = 1, \ldots, \ m+1$. В данном случае очевидно, что «естественным претендентом» на *решение задачи* $\rho^2(\overline{m}, m) \sim \min\limits_{m \in M_{m+1}}$ *является матрица* $\overline{m}_*$, удовлетворяющая условию $\rho^2(\overline{m}, \overline{m}_*) = \min\limits_{m \in \overline{M}_{m+1}} \rho^2(\overline{m}, m)$, в котором $\overline{M}_{m+1} = \{m, \ m_{kj} = -m_{jk}, \ m_{kj} \in \{-1, 0, 1\}, k, j = 1, \ldots, m+1\}$. *Ее матричные элементы суть*

$$\overline{m}_{*kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{m}_{kj} > 1/2, \\ 0, & \text{если } |\overline{m}_{kj}| \leqslant 1/2, \\ -1, & \text{если } \overline{m}_{kj} < -1/2, \end{cases} \tag{31}$$
$$k, j = 1, \ldots, m+1.$$

Если $\overline{m}_* \notin M_{m+1} \subset \overline{M}_{m+1}$, то есть если $\overline{m}_*$ — *не матрица парных сравнений* и, следовательно, *не может представлять* распределение, оптимально учитывающее субъективные и эмпирические данные, то и матрице m_* парных сравнений, $\rho^2(\overline{m}, m_*) = \min\limits_{m \in M_{m+1}} \rho^2(\overline{m}, m)$, как решению задачи (28), *доверять не следует*, ибо *включение* $\overline{m}_* \in \overline{M}_{m+1} \setminus M_{m+1}$ матрицы $\overline{m}_*$, ближайшей к матрице $\overline{m}$ (30), естественно рассматривать как *свидетельство превышения критического уровня взаимно противоречивых данных* в распределениях $t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$. Если же $\overline{m}_* \in M_{m+1}$, то это *свидетельствует и о согласованности распределений* $t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$, а матрица $m_* = \overline{m}_*$ оптимально *представляет* субъективное и эмпирическое распределения правдоподобий, и его можно считать субъективным, *эмпирически скорректированным* распределением правдоподобий значений НОЭ $\widetilde{x}$.

Заметим, что если вместо матрицы $\overline{m}_*$, определенной в (31), ввести параметрический класс матриц $\overline{m}_\delta$, $\delta \in (0, 1)$, положив

$$\overline{m}_{\delta kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{m}_{kj} > \delta, \\ 0, & \text{если } |\overline{m}_{kj}| \leqslant \delta, \quad k, j = 1, \ldots, m, \\ -1, & \text{если } \overline{m}_{kj} < -\delta, \end{cases}$$

то можно, выбрав $\delta = \delta_* \in (0, 1)$, ослабить влияние противоречивости субъективных и эмпирических данных так, чтобы $\overline{m}_{\delta_*} \in M_{m+1}$.

Подобная задача исследования согласованности и комбинирования субъективных данных возникает в ситуации, в которой МИ предложил модель $M(\widetilde{x})$ ОИ, а его коллега имеет данные наблюдений за характеристиками ОИ, неизвестные значения которых МИ моделирует НОЭ $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, см. п. 1.4. Коллега, естественно, предлагает МИ свою субъективную модель НОЭ $\widetilde{y}$, согласованную с его данными наблюдений. Если $t_i^{(0)}$ и $t_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, \dim(Y)$, суть соответственно распределения правдоподобий значений: НОЭ $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, обусловленное моделью $M(\widetilde{x})$ ОИ, и НОЭ $\widetilde{y}$, предложенное коллегой МИ, то исследование их согласованности и комбинирование могут быть выполнены по рассмотренной схеме. Если существует функция $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to X$, то исследовать на согласованность и комбинировать можно распределения правдоподобий: $t_i^{(1)} = t^{\widetilde{x}}(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, предложенное МИ, и $t_i^{(2)} = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = \varphi(x_i))$, индуцированное распределением, предложенным его коллегой. Если же функция $\varphi^{-1}(\cdot)$ не существует, и $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — полный прообраз $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$, то в качестве варианта распределения правдоподобий, индуцированного распределением, предложенным его коллегой, можно использовать $t_i^{(2)\widetilde{x}} = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x_i \in A^{\widetilde{y}}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in A_{x_i} = \{\varphi(x_i)\}) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x_i))$, $i = 1, \ldots, m$, где $A_{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ — отображение, обратное $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$. Понятно, что так определенное распределение $t^{(2)\widetilde{x}}(x) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x))$, $x \in X$, — не единственное, удовлетворяющее условиям $\sup\limits_{x \in X,\, y = \varphi(x)} t^{(2)\widetilde{x}}(x) = \sup\limits_{x \in X,\, y = \varphi(x)} t^{\widetilde{y}}(\varphi(x)) = t^{\widetilde{y}}(y)$, $y \in Y$, где $\varphi(X) = Y$.

Наконец, если некоторое следствие модели $M(\widetilde{x})$ субъективно охарактеризовано несколькими исследователями индикаторными функциями одноточечного покрытия (см. п. 1.4), то и в этом случае исследование их согласованности и комбинирование можно выполнить по этой же схеме.

Замечание 2.7. Проблема комбинирования субъективных и эмпирических данных рассмотрена в теории Демпстера-Шеффера [13], в которой НОЭ $\widetilde{x}$ задается «весовой функцией» $m(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$, $\sum\limits_{A \subset X} m(A) = 1$, определяющей $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A) = \sum\limits_{A' \subset A} m(A')$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A) = \sum\limits_{A' \cap A \neq \varnothing} m(A')$, $A \in \mathcal{P}(X)$. Значение $m(A)$ интерпретируется как мера уверенности в том, что $\widetilde{x} \in A$ при отсутствии уверенности в том, что $\widetilde{x} \in A'$ для любого $A' \subset A$, $A' \neq A$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A)$ интерпретируется как мера уверенности в том, что $x \in A$ (с учетом всех подмножеств A' множества A, содержащих $\widetilde{x}$), $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A)$ — мера сомнения в том, что $\widetilde{x} \notin A$. «Точное незнание» моделируется значениями $m(A) = 1$, $A \in \mathcal{P}(X)$), при этом $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A) = 1$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A) = 0$. «Абсолютное знание» моделируется значениями $m(A) = 1$, если $A = \{x\}$, $m(A) = 0$, если $A = X \setminus \{x\}$, где x — истинное значение $\widetilde{x}$.

Основные недостатки: *правило комбинирования весовых функций, полученных из разных источников*, приводит к нелогичным результатам [20], предложенные в [20, 22–24] *правила не всегда применимы*. В [25] предложено правило комбинирования, «объединяющее» правила, предложенные в [20, 22–24], но требующее дополнительную информацию об источниках. Предложенные в [21, 26] *методы эмпирического восстановления модели* $\widetilde{x}$ зависят от правила комбинирования весовых функций и наследуют его недостатки.

2.3. Нечеткое правдоподобие истинности но.в., согласно которому субъективная модель НОЭ $\widetilde{x}$ согласуется с данными наблюдений за НО. НЧ. О.

Судить об адекватности субъективной модели НО. НЧ. О. цели исследования следует на основе правдоподобия согласия субъективной модели НОЭ $\widetilde{x}$ с данными наблюдений за НО. НЧ. О. Напомним, что аналогом случайного семейства оценивающих множеств максимального правдоподобия [2] в данном случае является семейство нечетких множеств *максимального правдоподобия*

$$\Psi_\lambda^{-1}(y) = \{x \in X,\ g^\eta(y;x) \geqslant \min\{\lambda, \max_{x' \in X} g^\eta(y,x')\} = \\ = \min\{\lambda, g^\eta(y)\}\},\ \ \lambda \in (0,1), \quad (32)$$

оценивающих значения параметра $x \in X$ распределения $g^\eta(\cdot;x)$ возможности, контролировавшей наблюдение $\eta = y \in Y$, см. (24). Значения $\lambda \in (0,1)$ в (32) и значения возможности $\mathrm{p}^\eta \in [0,1]$ покрытия нечетким множеством $\Psi_\lambda^{-1}(\eta)$ параметра $x \in X$ возможности $\mathrm{P}^\eta(\,\cdot\,;x)$, контролировавшей результат $\eta = y$ наблюдения, связаны условием $\mathrm{p}^\eta = \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y, x \in \Psi_\lambda^{-1}(\eta);x)$, подобным условиям в [38, п. 1.7], в [2, п. 8.2, 9].

Если наблюдается $\eta = y \in Y$, то *значение* $\Psi_\lambda^{-1}(y)$ в (32) *есть множество тех* $x \in X$, *при которых принимается гипотеза* $H(x) = \{x\}$. Значение

$$\Psi_\lambda(x) = \{y \in Y, g^\eta(y;x) \geqslant \min\{\lambda, g^\eta(y)\}\} \quad (33)$$

отображения $\Psi_\lambda(\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, обратного к $\Psi_\lambda^{-1}(\cdot)\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ в (32), есть *множество результатов наблюдений* $\eta = y \in Y$, *каждый из которых влечет принятие гипотезы* $H(x) = \{x\} \subset X$.

Рассмотрим семейство *неопределенных множеств* (но. м.) $\Psi_\lambda(\widetilde{x})$, $\lambda \in (0,1)$, где $\widetilde{x}$ — НОЭ, модель которого $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ предложена МИ. Поскольку $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in \Psi_\lambda(\widetilde{x}))$ — *правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому но. м.* $\Psi_\lambda(\widetilde{x})$ *покрывает* y, а согласно (33) $\forall x \in X$ $\Psi_\lambda(x) \subset \Psi_{\lambda'}(x)$, если $\lambda \geqslant \lambda'$, то *чем меньше максимальное* $\lambda = \lambda(y) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in (0,1), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in \Psi_\lambda(\widetilde{x})) = 1\}$, при котором правдоподобие покрытия y но. м. $\Psi_\lambda(\widetilde{x})$ равно единице, *тем значительнее наблюдение* $\eta = y$ свидетельствует против субъективной модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ НОЭ $\widetilde{x}$. Поэтому *вариант нечеткого правдоподобия истинности неопределенного высказывания, согласно которому субъективная модель НОЭ* $\widetilde{x}$ *согласуется с наблюдением* η *за* НО. НЧ. О., $\widetilde{x} \sim \eta$, *определим равенством*

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \sim \eta) \overset{\mathrm{def}}{=} 1 - \lambda(\eta) = \\ = 1 - \sup\{\lambda \mid \lambda \in (0,1), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in \Psi_\lambda^{-1}(\eta)) = 1\},$$

(ср. с правдоподобием истинности НВ в [2]).

Замечание 2.8. Проблема правдоподобия согласия модели НОЭ $\widetilde{x}$ характерна для субъективного моделирования, основанного на нечеткой модальной логике [7, 11], в которой истинность высказываний принимает значения в полной решетке $(\mathcal{B}, \leqslant)$, $0 = \inf \mathcal{B}$, $1 = \sup \mathcal{B}$, $\forall\, a, b \in \mathcal{B}$ определен элемент $a \to b$, для которого $\forall\, c \in \mathcal{B}$ $c \leqslant (a \to b) \Leftrightarrow \min\{a, c\} \leqslant b$ и который может интерпретироваться как мера истинности высказывания «$a \leqslant b$». Вводится модальный оператор $\Box$, для которого формула $\Box_a A$ может интепретироваться как высказывание «мера убедительности факта, выражаемого формулой A, равна a». Формализм нечеткой модальной логики позволяет моделировать случай абсолютного незнания.

Основной недостаток: *невозможность эмпирического восстановления истинности элемантарных высказываний* и *отсутствие правила комбинирования знаний, полученных из разных источников*.

Заключение

В статье рассмотрен математический формализм субъективного моделирования, основанный на теории мер правдоподобия, доверия и интегрирования относительно этих мер, существенно расширивший класс ОИ, в том числе эволюционирующих стохастических [2], допускающих субъективное моделирование и эмпирическое восстановление модели [36], позволивший устранить проблемы, свойственные известным методам математического моделирования субъективных суждений, в частности: 1) для формулировки модели субъективных суждений МИ достаточно упорядочить значения правдоподобий и доверий истинности элементарных высказываний (как и в модальной логике [11]), а не оценивать их численно, как требуется в методах [5, 12–14]; 2) модель «абсолютного незнания» модели ОИ, как и в теории Демпстера–Шеффера [13], в субъективной логике [14] и в нечеткой модальной логике [11] не зависит от модели наблюдений и от мощности множества элементарных высказываний (в отличие от модели «абсолютного незнания» в байесовском подходе [5, 12]), но в рассмотренном формализме, в отличие от известных методов, *модель любого следствия модели «абсолютного незнания» является моделью «абсолютного незнания»*; 3) модель любого следствия модели «точного знания» свойств модели ОИ является моделью «точного знания», как и для известных методов [5, 12–14].

В статье предложены новые понятия субъективных шкал значений мер правдоподобия и доверия (п. 1.8 и замечание 2.5), новые варианты мер правдоподобия и доверия (п. 1.9.1 и 1.9.2), позволяющие учитывать коллективные интересы исследователей и психофизические закономерности, новые методы эмпирического восстановления (разд. 2) субъективных моделей НО. НЧ. О., обобщающие методы [2, 10] и отличающиеся от известных методов в байесовском подходе [5, 12], в теории Демпстера–Шеффера [13], в субъективной логике [14]; рассмотрены новые методы: исследования *непротиворечивости* эмпирических и субъективных данных и *их комбинирования* (п. 2.2), определения *правдоподобия согласия* субъективной модели НО. НЧ. О. с данными наблюдений за НО. НЧ. О. (п. 2.3).

Автор выражает благодарность Ю. М. Нагорному и Д. А. Балакину за обсуждение статьи и за помощь при подготовке электронного варианта статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-07-00133а, 11-07-00722, 14-07-00441).

Список литературы

1. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 1. С. 3. (*Pyt'ev Yu.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**. N 1. P. 1.)
2. *Пытьев Ю.П.* // Матем. моделирование. 2013. **25**. № 4. С. 102. (*Pyt'ev Yu.P.* // Mathem. Modeling and Comp. Simul. 2013. **5**, N 6. P. 538.)
3. *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. М.: Физматлит, 2007; Изд. 2-е, перераб. и дополн. М.: Физматлит, 2016. P. 596.
4. *Пытьев Ю.П.* // Интеллектуальные системы. 2007. **11**, № 1–4. С. 277.
5. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006.
6. *Josang A., Hankin R.* // 15th International Conference of Information Fusion (FUSION 2012). Singapore, 2012. July.
7. *Миронов А.М.* // Интеллектуальные системы. 2007. **11**. С. 201.
8. Прикладные нечеткие системы / Сб. под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. М.: Мир, 1993.
9. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Ред. Р. Ягер. М.: Радио и связь, 1988.
10. *Балакин Д.А., Нагорный Ю.М., Пытьев Ю.П.* // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Сб. ст. Междунар. конф. Москва, РУДН, 15–18 декабря 2014 г. С. 190.
11. *Bhavsar V.C., Mironov A.M.* // Proc. of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications. MVLPA 2006. Seattle, WA, 2006. P. 73.
12. *Cowell R.G., Dawid A.P., Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.* Probabilistic Networks and Expert Systems. New-York: Springer-Verlag. 1999.
13. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976.
14. *Josang A.* Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic. 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11). Perugia, September 2011.
15. *Stevens S.S.* Psychophysics. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1975.
16. *Josang A.A.* // Int. J. Uncertain. Fuzz. 2001. **9**, N 3. P. 279.
17. *George J.K.* Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. Hoboken; N. J.: John Wiley, 2006.
18. *Jaynes E.T.* // IEEE Trans. on Systems Science and Cybernetics. 1968. **4**, N 3. P. 227.
19. *Jeffreys H.* // Proc. Roy. Soc. Lond. A. Math. 1946. **186**, N 1007. P. 453.
20. *Zadeh L.* // The AI magazine. 1986. **7**, N 2. P. 85.
21. *Wang P.* // Proc. of the Tenth Conference on Uncertainty in Artifical Intelligence. 1994. P. 560.
22. *Yager R.R.* // Inf. Sci. 1987. March. **41**, N 2. P. 93.
23. *Inagaki T.* // IEEE T. Reliab. 1991. **40**, N 2. P. 182.
24. *Dubois D., Prade H.* // Reliability Data Collection and Analysis / Ed. by J. Flamm, T. Luisi. 1992. P. 213.
25. *Smarandache F.* // Int. J. Appl. Math. & Stat. 2004. **2**. P. 1.
26. *Klopotek M.A., Wierzchon S.T.* // Belief Functions in Business Decisions / Ed. by R. P. Strivastava, T. J. Mock. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 2002. **88**. Studies in Fuzziness snd Soft Computing. P. 62.
27. *Балакин Д.А., Волков Б.И., Еленина Т.Г., Кузнецов А.С., Пытьев Ю.П.* // Интеллектуальные системы. 2014. **18**, № 2. С. 33.
28. *McMillan B.* // Ann. Math. Stat. 1953. **24**. P. 196.
29. *Пытьев Ю.П., Шишмарёв И.А.* Теория вероятностей, математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков. М.: Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010.
30. *Dubois D., Nguyen H.T., Prade H.* // Fundamental of Fuzzy Sets / Ed. by D. Dubois, H. Prade. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
31. *Guiasu S.* Information Theory with Applications. N. Y.: McGrow-Hill, 1977.
32. *Пытьев Ю.П., Животников Г.С.* // Интеллектуальные системы. 2002. **6**, № 1–4. С. 63.
33. *Yager R.R.* // Fuzz. Set. Sys. 1992. **50**, N 3. P. 279.
34. *Kyburg H.E. Jr., Smokler H.E.* Studies in subjective probability. N. Y.: John Wiley and Sons, 1964.
35. *Savage L.J.* The foundations of statistics. N. Y.: John Wiley and Sons, 1954.
36. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 2. (*Pyt'ev Yu.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 2.)
37. *Helpern J.Y.* Reasoning about uncertainty. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2003.
38. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 2. С. 15. (*Pyt'ev Yu.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 2. P. 113.)
39. *Пытьев Ю.П.* Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
40. *Pyt'ev Yu.P.* // Pattern Recognition and Image Analysis. 2017. **27**, N 2. P. 212.

Mathematical methods of subjective modeling in scientific research.
I. The mathematical and empirical basis

Yu. P. Pyt'ev

Department of Mathematical Modelling and Informatics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com.

A mathematical formalism for subjective modeling, based on modelling of uncertainty, ref lecting unreliability of subjective information and fuzziness that is common for its content, is presented in the article. The model of subjective judgments on values of an unknown uncertain parameter $x \in X$ of the model $M(x)$ of a research object is defined by the researcher–modeler as a space[a] $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\tilde{x}})$ with *plausibility* $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}$ and *believability* $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}$ measures, where x is an *uncertain element* taking values in X that *models* researcher–modeler's uncertain propositions about an unknown $x \in X$, measures $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}$ and $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}$ model modalities of a researcher–modeler's subjective judgments on the validity of each $x \in X$: the value of $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x)$ determines how *relatively plausible*, in his opinion, the equality $\tilde{x} = x$ is, while the value of $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq qx)$ determines how the inequality $\tilde{x} \neq qx$ should be *relatively believed* in see Subsection 1.3. Versions of plausibility Pl and believability Bel measures and pl- and bel-integrals that inherit some traits of probabilities, psychophysics and take into account interests of researcher–modeler groups are considered.
It is shown that the mathematical formalism of subjective modeling, unlike "standard" mathematical modeling,
• enables a researcher–modeler to model both precise formalized knowledge and non-formalized unreliable knowledge, from complete ignorance to precise knowledge of the model of a research object, to calculate relative plausibilities and believabilities of any features of a research object that are specified by its subjective model $M(\tilde{x})$, and if the data on observations of a research object is available, then it:
• enables him to estimate the adequacy of subjective model to the research objective, to correct it by combining subjective ideas and the observation data after testing their consistency, and, finally, to empiric-ally recover the model of a research object.

[a] A space $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\tilde{x}})$, is formally equivalent to a fuzzy space $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}, \mathrm{N})$ with possibility P and necessity N measures, see remark 1.1 in [1].

Keywords: plausibility, belief, uncertainty.
PACS: 07.05.Kf.
Received 26 August 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 1. Pp. 3–17.

Сведения об авторе

Пытьев Юрий Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой;
тел.: (495) 939-13-32, e-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com.