

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Об области локализации точек возникновения обратных волн в волноводе с анизотропным заполнениемА. Л. Делицын^{1,2}¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.²Главный научно-исследовательский испытательный центр робототехники Министерства обороны Российской Федерации (ФГБУ ГНИИЦ РТ). Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32.

E-mail: delitsyn@mail.ru

Статья поступила 05.03.2017, подписана в печать 17.04.2017.

Рассмотрена задача о локализации особых точек дисперсионных кривых в волноводе с анизотропным заполнением. Исследовано поведение дисперсионных кривых, для которых при определенном соотношении коэффициентов анизотропии возникают точки ветвления. В этих точках возникают обратные и комплексные волны. Доказано, что множеством точек возникновения обратных волн является эллипс.

Ключевые слова: обратные волны, дисперсионные кривые, особые точки.

УДК: 517.95. PACS: 02.30.Jr.

Введение

Обратные волны в волноводах характеризуются противоположным знаком групповой и фазовой скоростей распространяющихся волн. Их существование было доказано для упругого слоя, по-видимому, еще в работе [1], см. также [2]. Для электромагнитных волноводов подобное явление демонстрировалось в ряде работ [3–10] для волновода круглого сечения с кусочно-постоянным радиальным заполнением. В работе [11] установлено существование обратных волн в волноводе квадратного сечения с постоянным анизотропным заполнением. Подобная задача допускает аналитическое решение, причем дисперсионное уравнение имеет достаточно простую форму и решается в элементарных функциях. Это позволяет провести анализ расположения критических точек дисперсионных кривых, в которых возникают обратные волны. В критических точках дисперсионных кривых либо появляются, либо исчезают комплексные волны, характеризующиеся тем, что постоянная распространения имеет ненулевую вещественную и мнимую части при отсутствии поглощения в среде. При этом вещественная часть дисперсионной кривой характеризуется касанием двух ветвей, соответствующих различным собственным значениям в точке ветвления. Этой точке соответствует исчезновение одного из собственных векторов задачи и возникновение присоединенного вектора. В работе [12] рассмотрена зависимость множества критических точек в частично заполненном волноводе кругового сечения от степени заполнения волновода. Кривые, соответствующие различным параметрам заполнения волновода, ограничивают как выпуклые, так и невыпуклые области. В настоящей

работе рассматривается поведение множества особых точек в анизотропном волноводе в зависимости от одного из коэффициентов анизотропии. Доказано, что точки возникновения обратных волн для данной задачи образуют эллипс на плоскости квадратов частот и квадратов постоянных распространения. Кроме того, этот эллипс касается оси ординат, т.е. оси квадратов постоянных распространения.

1. Постановка задачи

Задача распространения волн в электромагнитном волноводе с анизотропным заполнением описывается стационарной системой Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

полученной после сокращения на временной множитель $e^{-i\omega t}$ и обозначении $k = \frac{\omega}{c}$. Тензор диэлектрической проницаемости определяется диагональной матрицей

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

с постоянными коэффициентами. Граничные условия

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad \mathbf{Hn}|_{\partial Q} = 0$$

соответствуют идеально проводящей стенке. Волновод

$$Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, \infty)\}$$

имеет квадратное поперечное сечение

$$\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Считаем, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. В зависимости от значений величины ε_3 дисперсионные кривые имеют качественно разный вид. Если $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$ или $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$, то дисперсионные кривые являются монотонными функциями и существуют только прямые волны. При значениях ε_3 , расположенных между ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$), при определенных значениях частот появляются точки ветвления дисперсионной кривой, эти точки отвечают за появление обратных и комплексных волн. Под комплексными волнами подразумеваются волны с комплексным значением квадрата постоянной распространения, существующие в волноводе, несмотря на отсутствие мнимой части у диэлектрической проницаемости.

Будем искать решения вида $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{i\gamma z}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)e^{i\gamma z}$. После их подстановки в систему (1)–(2) и сокращения на $e^{i\gamma z}$ приходим к системе уравнений, которую запишем (следуя работам [11, 13–15]) относительно векторов (H_x, H_y, E_z) и (E_x, E_y, H_z) с целью рассматривать линейную задачу на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_z \end{pmatrix} = i\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_x \\ \varepsilon_2 E_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_x \\ \varepsilon_2 E_y \\ H_z \end{pmatrix} = -i\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Два оставшихся уравнения имеют вид

$$(\text{rot } \mathbf{E})_z = ikH_z, \quad (5)$$

$$(\text{rot } \mathbf{H})_z = -ik\varepsilon_3 E_z. \quad (6)$$

Разрешая систему уравнений относительно (H_x, H_y, E_z) , получим задачу

$$\mathbf{S}\mathbf{A} = -\gamma^2 \mathcal{F}\mathbf{A}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \varepsilon_1 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & ik \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_2 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \varepsilon_2 & -ik \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_1 \\ -ik \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} & ik \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} & -\varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где вектор

$$\mathbf{A} = \{H_x, H_y, E_z\}$$

удовлетворяет дополнительному уравнению

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = -ik\varepsilon_3 H_z \quad (9)$$

и граничным условиям

$$\mathbf{Hn}|_{\partial Q} = 0, \quad E_z|_{\partial Q} = 0. \quad (10)$$

2. Решение задачи

Будем искать собственный вектор задачи (7)–(10) вида

$$\mathbf{A} = \{H_x \sin \pi x \cos \pi y, H_y \cos \pi x \sin \pi y, E_z \sin \pi x \sin \pi y\}.$$

Мы ограничиваемся рассмотрением решения с подобной зависимостью от поперечных координат, учитывая, что подобное решение отражает характерные черты задачи

$$\mathbf{S}\mathbf{A} = -\gamma^2 \mathcal{F}\mathbf{A}. \quad (11)$$

При этом упрощаются детали поиска аналитического решения. Подставляя \mathbf{A} в уравнение (11) и исключая E_z , учитывая (9), приходим к задаче

$$\mathcal{M}\mathbf{A}_\perp = -\gamma^2 \mathbf{A}_\perp, \quad (12)$$

или

$$\begin{pmatrix} \pi^2(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}) - k^2 \varepsilon_2 & \pi^2(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}) \\ \pi^2(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}) & \pi^2(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}) - k^2 \varepsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = -\gamma^2 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Элементы a_{ij} матрицы \mathcal{M} равны

$$a_{11} = \pi^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right) - k^2 \varepsilon_2, \quad a_{12} = \pi^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right),$$

$$a_{21} = \pi^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right), \quad a_{22} = \pi^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right) - k^2 \varepsilon_1.$$

Собственные значения $\gamma_{1,2}^2(k)$ имеют вид

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(-(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right).$$

Если $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$, то квадраты постоянных распространения становятся комплексными величинами.

Таким образом, возникновение комплексных волн происходит в точках выполнения условий

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0. \quad (14)$$

Вещественная часть дисперсионных кривых в этих точках соответствует прямой и обратной волнам. Для прямых волн квадрат постоянной распространения является возрастающей функцией квадрата частоты, для обратной — убывающей. На рис. 1 продемонстрировано поведение дисперсионной кривой ($\varepsilon = 1.5$, $\varepsilon_2 = 8$, $\varepsilon_3 = 3.4$). Обратная и прямая волны рождаются в точках ветвления дисперсионных кривых.

На рис. 2 изображена картина дисперсионных кривых при изменении ε_3 от ε_1 до ε_2 .

Множество критических точек дисперсионных кривых, соответствующих различным значениям ε_3 , образует кривую, напоминающую эллипс. Докажем, что эта кривая в самом деле является эллипсом.

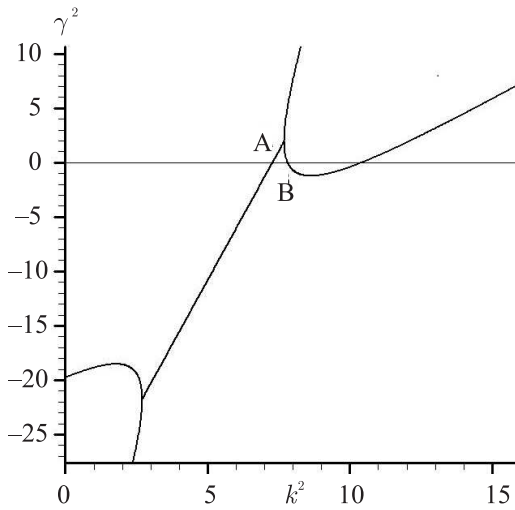


Рис. 1. Дисперсионные кривые, демонстрирующие поведение прямых и обратных волн

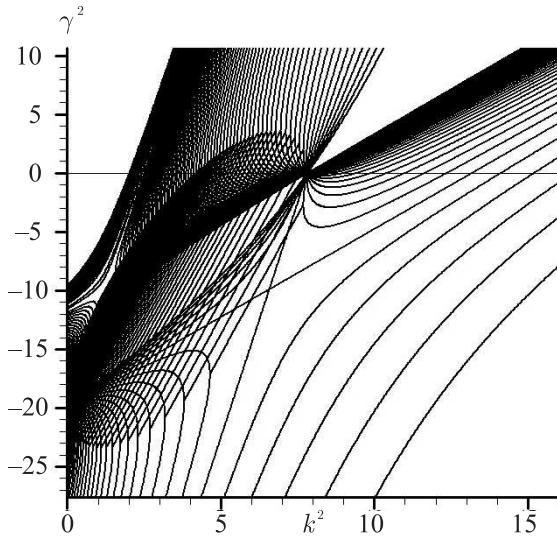


Рис. 2. Общий вид дисперсионных кривых, соответствующих различным значениям ϵ_3

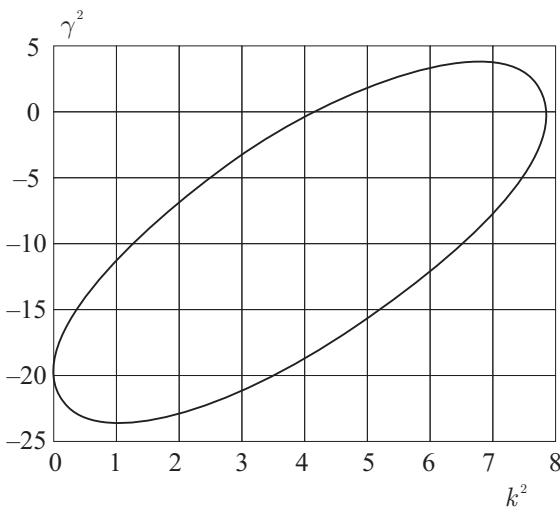


Рис. 3. Кривая возникновения обратных и комплексных волн

Соответствующие значения (k^2, γ^2) определяются из уравнения (14) как

$$k^2 = \frac{\pi^2}{\epsilon_3} \pm \frac{2\pi^2 \sqrt{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)}}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)\epsilon_3},$$

$$\gamma^2 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} k^2 + \frac{\pi^2 \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3}{2 \cdot 2\epsilon_3}.$$

Множество точек (k^2, γ^2) описывает кривую при изменении ϵ_3 от ϵ_1 до ϵ_2 на плоскости (k^2, γ^2) .

Эта кривая является эллипсом. Для того чтобы это доказать, достаточно сделать замену

$$\sin t = \frac{\sqrt{4\epsilon_1\epsilon_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \left(\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{1}{\epsilon_3} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \right),$$

переходя от переменной ϵ_3 к переменной t , параметризующей кривую. После замены переменных и введения для упрощения записи констант $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$, вычисляемых по ϵ_1, ϵ_2 , кривая принимает вид

$$k^2 = a_1 + b_1 \cos t + c_1 \sin t, \quad \gamma^2 = a_2 + b_2 \cos t + c_2 \sin t.$$

Таким образом, учитывая, что кривая $(k^2(t), \gamma^2(t))$ имеет характерную форму первой фигуры Лиссажу, убеждаемся, что множество точек ветвления представляет собой эллипс (рис. 3).

Этот эллипс касается оси ординат при значении $\epsilon_3 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$ и имеет тангенс наклона большой оси к оси абсцисс, равный $\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$.

Заключение

Рассмотрена область локализации критических точек дисперсионных кривых анизотропного волновода. Доказано, что множество особых точек образует эллипс. Установлено касание эллипса с осью ординат.

Список литературы

1. Tolstoy I, Usdin E. // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. **29**, N 1. P. 37.
2. Lamb H. // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2 1904. **1**, N 849. P. 473.
3. Веселов Г.И., Краснушкин П.Е. // Докл. АН СССР. 1981. бф 260, N 3. С. 576.
4. Claricoats P.J.B., Waldron R.A. // J. Electron. Control. 1960. **8**. P. 455.
5. Claricoats P.J.B. Proc. IEEE. 1963. N 110. P. 261.
6. Yener N. // J. of Electromagnetic Waves and Applications. 2004. **18**. P. 769.
7. Omar A.S., Schunemann K.F. // IEEE Trans. MTT. 1987. **35**. P. 268.
8. Malakhov V.A., Raevskii A.S., Raevskii S.B. // Tech. Phys. Lett. 2011. **37**. P. 83.
9. Ibanescu M., Johnson S.G., Roundy D. et al. // Phys. Rev. Lett. 2004. **92**. P. 063903.
10. Kocabas S.E., Veronis G, Miller D.A.B., Fan S. // Phys. Rev. B. 2009. **79**. P. 035120.
11. Delitsyn A.L, Troshina I.K. // J. of Communication Technology and Electronics 2005. **50**. P. 815.

12. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-ди-электрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988.
13. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. **39**, № 11. С. 1869.
14. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. **38**, № 11. С. 1891.
15. Делицын А.Л. // Дифференц. уравнения. 2000. **36**, № 5. С. 629.

The backward wave point distribution for an anisotropic filled waveguide

A. L. Delitsyn^{1,2}

¹ *Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*

² *Main Research and Testing Robotics Center, Ministry of Defense of Russia. Moscow 117997, Russia. E-mail: delitsyn@mail.ru.*

The distribution of special points of dispersion curves for an anisotropic filled waveguide is considered. The existence of special curves is substantiated for some relationship between anisotropy coefficients. These points are connected with complex and backward waves. It is proven that the curve of special points is an ellipse.

Keywords: backward waves, dispersion curve, special points.

PACS: 02.30.Jr.

Received 5 March 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2018. 72, No. 1. Pp. 41–44.*

Сведения об авторе

Делицын Андрей Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-39-47, e-mail: delitsyn@mail.ru.