

Гармоническое решение гиперболического уравнения теплопроводности и его связь с уравнением Гюйера–Крумхансля

К. В. Жуковский

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

Статья поступила 18.02.2017, подписана в печать 07.03.2017.

С помощью операторного подхода построено частное решение гиперболического уравнения теплопроводности. Исследуется эволюция гармонического решения, моделирующего распространение электрических сигналов в длинных проводных линиях. Проводится сравнение структуры решения телеграфного уравнения и уравнения теплопроводности типа Гюйера–Крумхансля. В контексте теплопроводности рассматривается влияние фононного способа теплопередачи в среде. Рассматривается выполнение принципа максимума для полученных решений. Исследуется и сравнивается частотная зависимость теплопроводности в телеграфном уравнении и в уравнении типа Гюйера–Крумхансля. Изучается влияние числа Кнудсена на теплопроводность в модели тонких пленок.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, уравнение Гюйера–Крумхансля, принцип максимума, число Кнудсена.

УДК: 530.1, 53.01, 51-72, 51-73. PACS: 02.30.-f, Gp, Hq, Jr, Mv, Nw, Tb, Uu, Vv, Zz; 44.05+e, 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.

Введение

Несмотря на стремительный прогресс в вычислительной технике, для глубокого понимания происходящих физических явлений и соответствующего их объяснения аналитические решения более полезны, чем численные. В большинстве случаев получить аналитическое решение модели физического процесса весьма сложно, если вообще возможно. Один из наиболее часто встречающихся в повседневной жизни законов физики — закон теплопроводности Фурье, который связывает изменение температуры с потоком тепла: $\partial_t T = \alpha \partial_x^2 T$ [1] и хорошо описывает теплопроводность в однородных твердых недеформируемых телах при нормальных условиях. Однако при низких температурах (< 25 К) закон Фурье не всегда справедлив в отношении кристаллических диэлектриков, а в системах с пониженной размерностью, таких как тонкие пленки и волокна, и в сильно неоднородных средах он может быть неприменим даже при нормальных условиях. Существенный недостаток теории Фурье — отсутствие инерции системы, т. е. изменение температуры в одной точке твердого тела воспринимается мгновенно во всех удаленных точках этого тела. В 1931 г. Л. Онсагер [2] отметил, что закон Фурье является «приближенным описанием теплопроводности, которое пренебрегает временем, необходимым для ускорения потока тепла», поскольку предполагает мгновенное нарастание потока тепла одновременно во всех точках. Наиболее значительное физическое явление, выходящее за рамки закона Фурье, — это так называемый второй звук [3], впервые обнаруженный в жидком гелии. С помощью экспериментов по распространению тепловых импульсов [4–7] это

явление было также обнаружено в твердых кристаллах. Для его описания Каттанео был предложен фононный механизм теплопроводности и соответствующее уравнение [8]:

$$(\tau \partial_t^2 + \partial_t) T = k_T \nabla^2 T, \quad (1)$$

где k_T — теплопроводность и τ — время релаксации. В рамках этой теории температурные колебания распространяются как затухающие волны в среде со скоростью $v = \sqrt{k_T/\tau}$. Модель Каттанео предполагает конечную скорость нарастания потока тепла, следующего за изменением температуры на границе области. Временное соотношение между началом изменения температуры и реакцией потока тепла на это изменение характеризуется временем τ , которое является свойством среды. Время, необходимое для начала переноса тепла, служит мерой тепловой инерции среды и его можно интерпретировать как характерное время взаимодействия при фонон-фононных столкновениях; при комнатной температуре оно очень мало: $\tau \approx 10^{-13}$ с. Скорость второго звука v характеризует распространение тепловой волны подобно тому, как теплопроводность k_T характеризует диффузию тепла. Гиперболическое уравнение теплопроводности с ненулевым свободным членом κ называется также телеграфным уравнением (ТУ) и имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \right) F(x, t), \quad (2)$$

$$\varepsilon, \alpha, \kappa = \text{const}.$$

Оно описывает распространение сигналов в длинных электрических линиях, пренебрегая излучением [9]. Соответствующая электрическая схема приведена на рис. 1. В контексте переноса тепла более

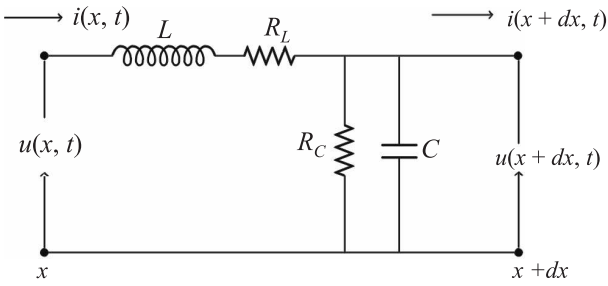


Рис. 1. Схема электрической линии передачи сигнала; L — индуктивность; R_L, R_C — сопротивления; C — емкость; u — напряжение; i — ток в линии

привычны обозначения $\tau = 1/\varepsilon$, $k_T = \alpha/\varepsilon$, $\mu = \kappa/\varepsilon$ и в уравнении Каттанео (1) $\mu = 0$; мы сохраним $\kappa \neq 0$ для общности. В контексте теплопроводности функцией F является температура $T - T_0$, а член κ может рассматриваться как первое приближение при описании теплообмена с окружающей средой температуры T_0 при малой разнице температур $T - T_0$.

Напряжение в линии на рис. 1 задано телеграфным уравнением [9]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (a+b) \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - ab \right) u(x, t),$$

$$a = \frac{R_C}{C}, \quad b = \frac{R_L}{L}, \quad c^2 = \frac{1}{LC}. \quad (3)$$

Уравнение (3) отличается от уравнения Каттанео (1) наличием свободного члена ab .

Уравнение Каттанео и телеграфное уравнение были решены как аналитически, так и численно. Уравнение Каттанео в бесконечной среде с произвольными граничными условиями исследовалось в [10]. Аналитическое решение телеграфного уравнения с периодическими граничными условиями было получено в [11, 12]. Точечный нагрев среды анализировался на бесконечной полуоси $[0, \infty]$ в [13]; распространение тепла при симметричном нагреве тонкой пленки изучалось в [14]. Двумерная задача распространения тепла по закону Каттанео в цилиндре была решена в [15]. Гиперболическое уравнение теплопроводности допускает разделение переменных [16, 17]. Полученные решения имеют вид рядов периодических функций. При аналитическом решении уравнения Каттанео обычно задаются условия на функцию и ее производную в начальный момент времени: $F(x, 0) = T_0$, $\partial_t F(x, 0) = 0$ или условия на границе пространственной области, обычно $F(0, t) = F(L, t) = 0$ или подобные им.

Мы исследуем телеграфное уравнение с помощью операторного метода, который позволяет быстро получить его аналитическое решение. В частности, мы исследуем важный пример гармонической функции $f(x) = e^{inx}$, встречающийся в радиотехнике и в случае, когда начальная функция разложима в ряд Фурье. Решая телеграфное уравнение, мы сравним распространение различных гармоник в нем с тем, что происходит по закону Фурье, и исследуем их распространение в уравнении Гюйера–Крумхансла

[18, 19], являющимся дальнейшим обобщением гиперболического уравнения теплопроводности.

1. Эволюция гармонического сигнала как решение телеграфного уравнения

С помощью обратных дифференциальных и экспоненциальных операторов операторным методом были получены частные решения различных ДУ, включая уравнение теплопроводности Фурье и его расширенные формы [20–22], а также другие ДУ второго порядка в частных производных [22–26]. Частное решение телеграфного уравнения (2), затухающее на полубесконечном отрезке времени так, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, \infty) = 0$, было получено в [27–29] с применением интегральных преобразований Лапласа. При этом задействуется только одна из ветвей общего решения:

$$F(x, t) = e^{-t\varepsilon/2} \times$$

$$\times \left(e^{-(t/2)\sqrt{\varepsilon^2 + 4\widehat{D}(x)}} C_1(x) + e^{(t/2)\sqrt{\varepsilon^2 + 4\widehat{D}(x)}} C_2(x) \right), \quad (4)$$

которое получается в результате действия экспоненциального дифференциального оператора с $\widehat{D}(x) = \alpha \partial_x^2 + \kappa$ на $C_{1,2}(x)$, определяемые из граничных условий. Рассмотрим более общий случай, когда используются обе ветви решения, на примере эволюции гармонической функции e^{inx} в уравнении (2). Это представляет интерес как для электротехники так и для любой функции, разложимой в ряд Фурье. Действие оператора $e^{t\widehat{D}(x)}$ изучалось в [30–32]; экспоненциальный дифференциальный оператор $e^{\widehat{D}(x)}$ не добавляет новых гармоник к имеющимся на $t = 0$ и $t = T$:

$$F(x, 0) = B e^{inx}, \quad F(x, T) = G e^{inx}. \quad (5)$$

Следуя [20], получаем из (4) следующее решение для телеграфного уравнения (2):

$$F(x, t) = B_1 e^{inx - (t/2)(\varepsilon + \sqrt{V})} + B_2 e^{inx - (t/2)(\varepsilon - \sqrt{V})}, \quad (6)$$

$$V = \varepsilon^2 + 4(\kappa - \alpha n^2),$$

где коэффициенты B_1, B_2 выражаются через граничные условия при $t = 0, t = T$: $B_1 + B_2 = B$ и

$$B_1 e^{-(T/2)(\varepsilon + \sqrt{V})} + B_2 e^{-(T/2)(\varepsilon - \sqrt{V})} = G.$$

Отсюда немедленно получаем

$$B_1 = - \frac{B e^{-(T/2)(\varepsilon - \sqrt{V})} - G}{e^{-(T/2)(\varepsilon + \sqrt{V})} - e^{-(T/2)(\varepsilon - \sqrt{V})}}, \quad B_2 = B - B_1. \quad (7)$$

В обозначениях для электрической цепи на рис. 1 имеем

$$\alpha = c^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\varepsilon = (a+b) = \frac{R_C}{C} + \frac{R_L}{L}, \quad \kappa = -ab = -\frac{R_C}{C} \frac{R_L}{L},$$

$$V = (a-b)^2 - (2cn)^2 = \left(\frac{R_C}{C} - \frac{R_L}{L} \right)^2 - \frac{4n^2}{LC},$$

а физический смысл решения — пространственно-временное поведение электрического сигнала

в линии передачи на рис. 1. Справедливость полученного решения проверяется прямой подстановкой в уравнение (2) с граничными условиями (5). Очевидно, что в зависимости от значений параметров $\alpha, \varepsilon, \kappa$ и граничных условий значение V , зависящее от n , может быть меньше нуля и коэффициенты B_1, B_2 легко могут оказаться комплексными. Примеры решения телеграфного уравнения с граничными условиями $F(x, t=0) = e^{inx}, F(x, t=T=\pi/4) = 0.5e^{inx}$ показаны на рис. 2 и 3. В рассмотренном примере решения ТУ с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11$, для $n = 1$ имеем $V = 91$ и

$$F = 0.112759 e^{-10.2697 t+ix} + 0.887241 e^{-0.730304 t+ix}$$

(см. рис. 2, слева), а в ТУ с коэффициентами $\alpha = 0.5, \kappa = -0.2, \varepsilon = 2$ и с теми же граничными условиями, для $n = 2$ имеем $V = -4.8$ и само решение

$$F = (0.5 + 0.29316 i) e^{(-1-1.09545 i)t+2ix} + (0.5 - 0.29316 i) e^{(-1+1.09545 i)t+2ix}$$

представлено на рис. 2, справа. Отметим, что в обоих случаях выполнен принцип максимума.

Напротив, для ТУ с $\alpha = 0.5, \kappa = -0.2, \varepsilon = 2$ с такими же граничными условиями решения с гармониками $n \geq 3$ имеют локальный максимум внутри области, как видно на рис. 3, слева, где приведен пример с $n = 4$; в этом случае имеем $V = -28.8$ и решение имеет вид

$$F = (0.5 + 0.935448 i) e^{(-1-2.68328 i)t+4ix} + (0.5 - 0.935448 i) e^{(-1+2.68328 i)t+4ix}$$

Другой пример решения ТУ с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11$ с такими же граничными условиями, но для $n = 2$, показан на рис. 3, справа; при этом $V = 7$, а само решение имеет вид

$$F = -14.057 e^{-6.82288 t+2ix} + 15.057 e^{-4.17712 t+2ix}$$

Очевидно, что в этом случае также не выполняется принцип максимума, согласно которому решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности в области

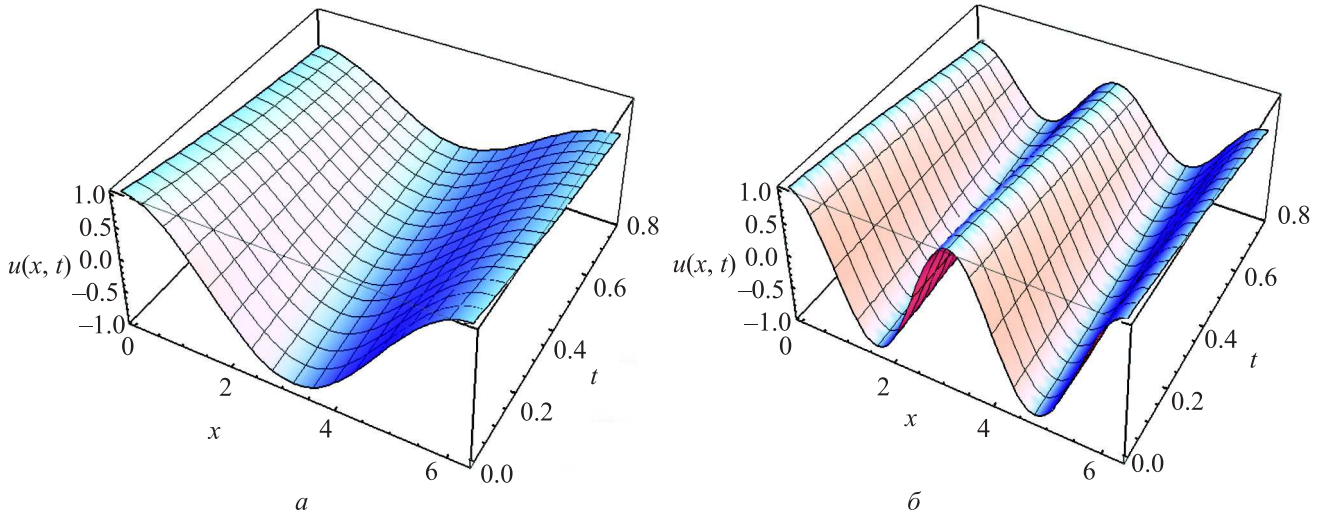


Рис. 2. Действительная часть $\text{Re}[F(x, t)]$ решения ТУ с начальными условиями $F(x, 0) = e^{inx}, F(x, \pi/4) = 0.5e^{inx}$, для $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11, n = 1$ (слева) и $\alpha = 0.5, \kappa = -0.2, \varepsilon = 2, n = 2$ (справа)

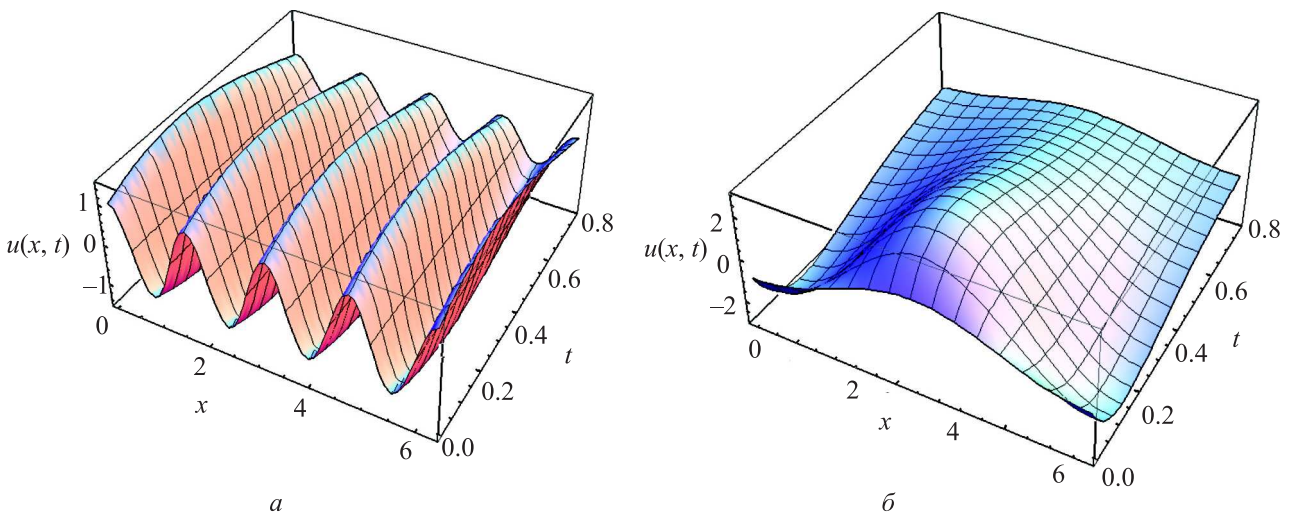


Рис. 3. Действительная часть $\text{Re}[F(x, t)]$ решения ТУ с начальными условиями $F(x, 0) = e^{inx}, F(x, \pi/4) = 0.5e^{inx}$, для $\alpha = 0.5, \kappa = -0.2, \varepsilon = 2, n = 4$ (слева) и $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11, n = 2$ (справа)

$R = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ достигает максимального значения либо в начальный момент времени, либо на границе области, $x = 0$, или $x = l$. Например, в случае на рис. 3, справа, максимум достигается внутри области $\{\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, 0 \leq t \leq \pi/4\}$, а не на границе и не при $t = 0$. В контексте переноса тепла это не соответствует второму закону термодинамики, но с математической точки зрения это возможно, так как принцип максимума установлен для эллиптических и параболических уравнений, а телеграфное уравнение является гиперболическим уравнением.

2. Решение уравнения Гюйера–Крумхансля для гармонической функции и его связь с решением телеграфного уравнения

Отметим следующую интересную особенность решения гиперболического уравнения теплопроводности для гармонической функции e^{inx} . Произведем замену $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$, где $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, в уравнении (2). Тогда решение (6) телеграфного уравнения (2) принимает следующий вид:

$$F(x, t) = C_1 e^{inx - (t/2)(\varepsilon + n^2\delta + \sqrt{U})} + C_2 e^{inx - (t/2)(\varepsilon + n^2\delta - \sqrt{U})},$$

$$U = (\varepsilon + n^2\delta)^2 + 4(\kappa - \alpha n^2), \quad (8)$$

где C_1, C_2 определяются из граничных условий. Легко убедиться, что решение (8) удовлетворяет также и следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \delta \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \right) F(x, t),$$

$$\alpha, \varepsilon, \delta, \kappa = \text{const}. \quad (9)$$

Последнее представляет собой расширенный вариант уравнения Каттанео с третьей производной; при $\kappa = 0$ оно является одномерным случаем уравнения, полученного Гюйером и Крумханслем [18, 19] при решении линеаризованного уравнения Больцмана для фононов. Мы учтем также постоянное слагаемое κ для общности. В контексте передачи тепла уравнение (9) чаще записывают в следующем виде:

$$\left(\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) F(x, t) = \left(k_b \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + k_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \right) F(x, t), \quad (10)$$

где $\tau = 1/\varepsilon$, $\mu = \kappa/\varepsilon$, $k_T = \alpha/\varepsilon$ — теплопроводность Фурье, а $k_b = \delta/\varepsilon$ ассоциируют с баллистическими эффектами. Такое уравнение возникает при исследовании передачи тепла в малоразмерных объектах, например в тонких пленках, нановолокнах и в веществах с существенной внутренней неоднородностью [33, 34]. Баллистический механизм теплопередачи дополняет тепловые волна в модели Каттанео и действует, когда характерный масштаб системы L сравним или меньше, чем длина свободного пробега l фононов, ответственных за волновой перенос тепла, как, например, в модели

Гюйера–Крумхансля [35]. Подобные баллистические условия касаются не только теплопередачи; они реализуются также для электронов и свойственны графену, карбоновым нанотрубкам, силиконовым нанопроводам и другим системам, где характерный масштаб меньше длины свободного пробега $L < l$. При этом для баллистического механизма теплообмена играют значительную роль условия на границе среды, а не внутри нее, как при диффузии или волновом процессе.

Сравнивая решение (8) расширенного уравнения Гюйера–Крумхансля (УГК) (9), (10) с $\kappa \neq 0$ для гармонической функции e^{inx} с решением (6) гиперболического уравнения теплопроводности (2), приходим к выводу, что переход одного в другое осуществляется заменой $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$. Так, решение (8) уравнения (9) является в то же время решением ТУ с коэффициентом при первой производной по времени, зависящим от номера гармоники и равным $\varepsilon + n^2\delta$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\varepsilon + n^2\delta) \frac{\partial}{\partial t} \right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \right) F(x, t). \quad (11)$$

Так как для гармонической функции e^{inx} и одинаковых значений коэффициентов $\alpha, \varepsilon, \kappa, \delta$ в уравнениях (9) и (11), последние имеют одинаковое решение (8), то можно заключить, что для функции, разложимой в ряд $\phi(x) = \sum_n c_n e^{inx}$, решение уравнений (9) и (11) будет также одинаковым и представляется в виде ряда $\Phi = \sum_n c_n F(x, t)$, где $F(x, t)$ — решение (8). В этом смысле для гармонической функции уравнение Гюйера–Крумхансля (10) с $\mu = 0$ (или (9) с $\kappa = 0$) представляет собой уравнение Каттанео (1) с зависимым от номера гармоники коэффициентом при $\partial/\partial t$: $(\varepsilon + n^2\delta)\partial/\partial t$. Таким образом, с учетом вышесказанного решение уравнение Гюйера–Крумхансля (9) с граничными условиями (5) записывается в виде (8), где

$$C_1 = -\frac{B e^{-(T/2)(\varepsilon + n^2\delta - \sqrt{U})} - G}{e^{-(T/2)(\varepsilon + n^2\delta + \sqrt{U})} - e^{-\frac{T}{2}(\varepsilon + n^2\delta - \sqrt{U})}}, \quad C_2 = B - C_1, \quad (12)$$

где U определено в (8), а B и G заданы нами в условиях $F(x, 0) = B e^{inx}$, $F(x, T) = G e^{inx}$ при $t = 0$ и $t = T$. Приведем пример решения уравнения Гюйера–Крумхансля с различными значениями коэффициентов в нем. Вначале рассмотрим те же значения $\alpha = 7$, $\kappa = -0.5$, $\varepsilon = 11$, $F(x, 0) = e^{inx}$, $F(x, \pi/4) = 0.5 e^{inx}$, как и в рассмотренном ранее случае с ТУ (рис. 3, справа для $n = 2$)б и положим $\delta = 2$ и $\delta = 6$ (рис. 4).

Сравним решение УГК для $\delta = 2$ (график на рис. 4, справа) с решением ТУ (график на рис. 3, справа). Видим, что максимум решения внутри области при тех же условиях достигается раньше в УГК (9) с $\delta = 2$ (см. рис. 4, справа) чем в ТУ (2) (рис. 3, справа). С увеличением значения δ , например при $\delta = 6$, восстанавливается ожидаемое для теплопроводности физическое поведение решения,

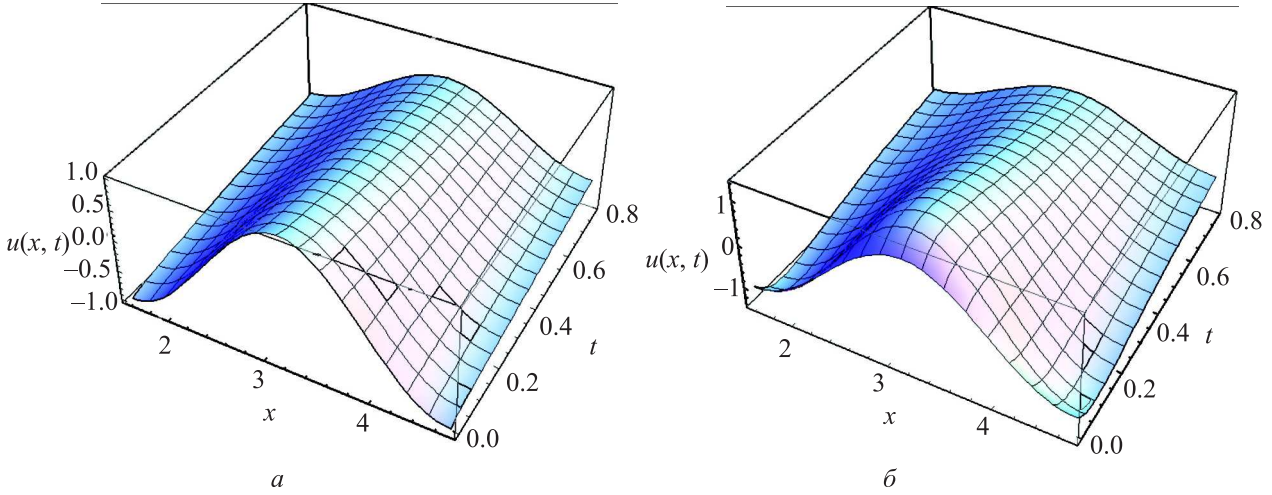


Рис. 4. Действительная часть $\text{Re}[F(x, t)]$ решения УГК при $\alpha = 7$, $\kappa = -0.5$, $\varepsilon = 11$, $F(x, 0) = e^{inx}$, $F(x, \pi/4) = 0.5 e^{inx}$, $n = 2$ для $\delta = 6$ (слева) и $\delta = 2$ (справа)

как показано на рис. 4, слева. Максимум достигается в начале при $t = 0$ и выполняется принцип максимума. Для $n = 1$ график практически совпадает с показанным на рис. 2. Таким образом, дополнительный баллистический член с δ кардинально меняет поведение решения. Для телеграфного уравнения в результате сложения волн легко реализуются локальные максимумы, которые в уравнения Гюйера–Крумхансля подавляются дополнительным демпфирующим членом δ .

3. Теплопроводность в модели для тонких пленок

Изучим распространение гармоник в уравнении Гюйера–Крумхансля. Для этого рассмотрим пример уравнения, встречающегося при исследовании теплопроводности в тонких пленках. Не вдаваясь в детали этой сложной проблемы, отметим, что можно выделить чисто диффузионную и баллистическую температурные компоненты [35]; последняя подчиняется уравнению типа Гюйера–Крумхансля [35], ср. (10)):

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{10 \text{Kn}^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3 \text{Kn}^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + 1 \right\} \times \theta_b(x, t) = 0, \quad (13)$$

где $\theta_b = F(x, t)$ — баллистическая компонента безразмерной энергии или квазitemпературы (см. [35]), и Kn — число Кнудсена, которое является безразмерной величиной; оно равно отношению средней длины свободного пробега к характерному физическому масштабу: $\text{Kn} = \lambda/L$ и оно часто используется при анализе динамики потоков, в частности для проскальзывающего вдоль стенок микроканала потока [36]. В нашем случае число Кнудсена характеризует условия для баллистического переноса тепла. Рассмотрим два случая эволюции гармонической функции при $\text{Kn} = 1$ и при $\text{Kn} = 0.1$ с граничными условиями (5), где

$$F(x, 0) = e^{inx}, \quad F(x, \pi/4) = 0.1 e^{inx}. \quad (14)$$

При $\text{Kn} = 1$ действительная часть $\text{Re}[F(x, t)]$ решения (8) для уравнения типа Гюйера–Крумхансля (13) с условиями (14) показана на рис. 5 для $n = 1$ и $n = 3$ соответственно слева и справа. При их сравнении видна быстрая релаксация решения для высшей гармоники (рис. 5, справа) по сравнению с релаксацией основной гармоники (рис. 5, слева).

Выберем теперь $\text{Kn} = 0.1$ в том же уравнении (13). Решения для гармоник $n = 1$ и $n = 3$ теперь содержат другие численные параметры; соответствующие графики для $\text{Re}[F(x, t)]$ на рис. 6 для $n = 1$ слева и для $n = 3$ справа показывают, что решения для $n = 1$ и для $n = 3$ эволюционируют почти одинаково.

Сравнительный анализ решений на рис. 5, 6 показывает, что число Кнудсена оказывает очень значительное влияние на распространение гармоник в тонких пленках. При более высоком значении числа Кнудсена теплопроводность увеличивается, в особенности для высших гармоник. Характерное время затухания для $n = 1$ составляет ${}_{1}\tau_{fade} \approx 0.2$ при $\text{Kn} = 1$ и ${}_{1}\tau_{fade} = 0.4$ при $\text{Kn} = 0.1$. Для $n = 3$ соответствующие времена равны ${}_{3}\tau_{fade} = 0.03$ при $\text{Kn} = 1$ и ${}_{3}\tau_{fade} = 0.3$ при $\text{Kn} = 0.1$. Лучшая теплопроводность при $\text{Kn} = 1$, чем при $\text{Kn} = 0.1$, очевидна, особенно для высших гармоник. Для $n = 1$ характерное время τ примерно в 2 раза меньше при $\text{Kn} = 1$, чем при $\text{Kn} = 0.1$; для $n = 3$ характерное время τ при $\text{Kn} = 1$ примерно в 10 раз меньше, чем при $\text{Kn} = 0.1$; $\tau_{fade \text{Kn}=0.1} / \tau_{fade \text{Kn}=1} \approx 2$ для $n = 1$ и ≈ 10 для $n = 3$. При $\text{Kn} = 1$ релаксация третьей гармоники происходит значительно быстрее, чем первой, а при $\text{Kn} = 0.1$ релаксация третьей гармоники происходит почти так же, как и первой.

На основании этого можно предположить, что баллистические условия будут оказывать более значительное влияние на эффективную теплопроводность для начальной функции, в разложении которой в ряд Фурье присутствует большее содержание высших гармоник. Напротив, начальная функция

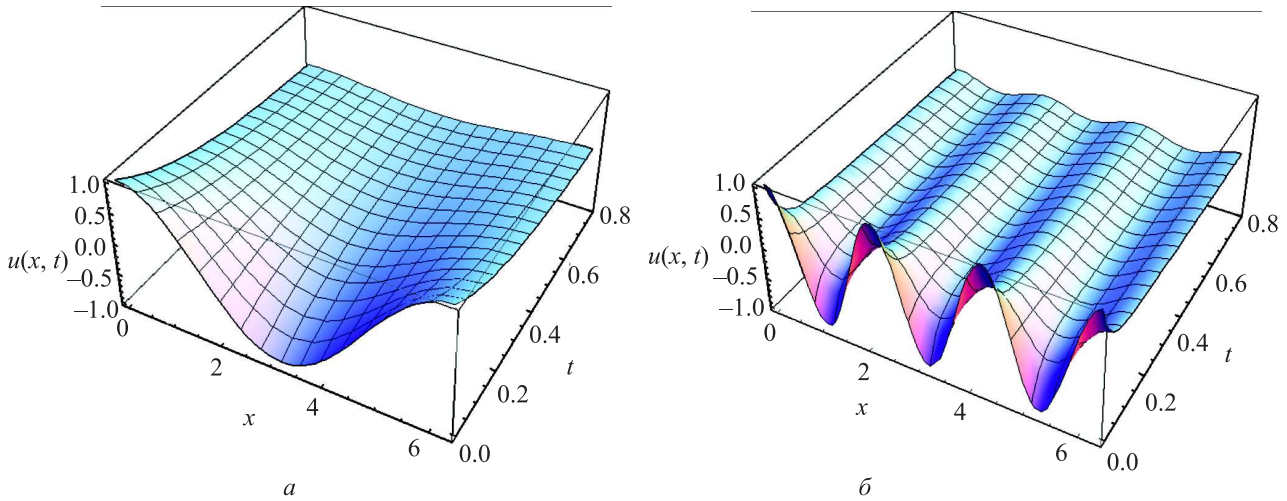


Рис. 5. Распространение гармоник с $n = 1$ и $n = 3$ в уравнении (13) с (14) при $K_p = 1$

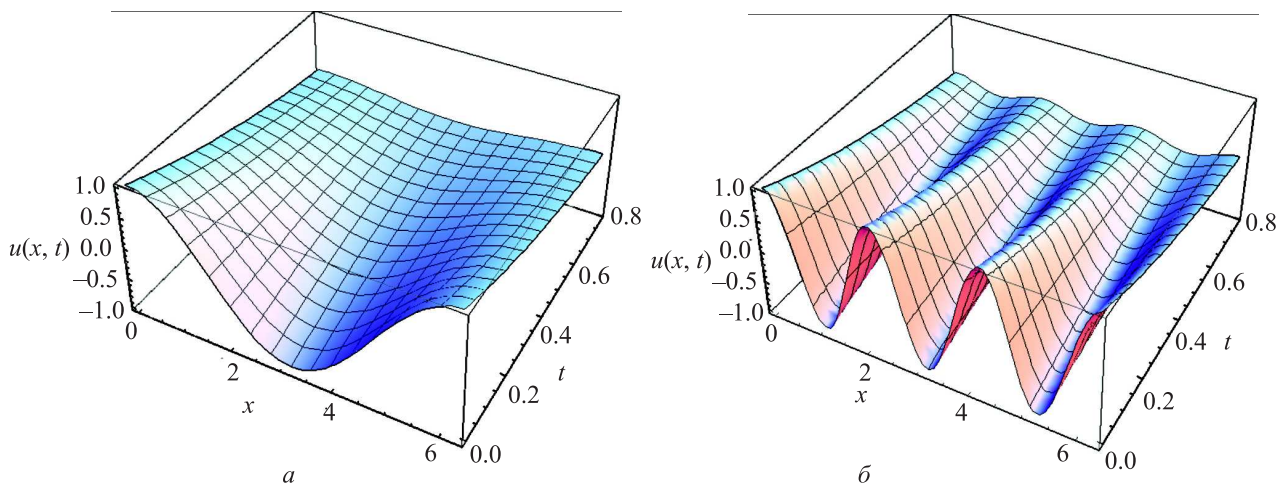


Рис. 6. Распространение гармоник с $n = 1$ и $n = 3$ в уравнении (13) с (14) при $K_p = 0.1$

с малым содержанием высших гармоник, по-видимому, будет нечувствительна к баллистическим условиям.

В решении (6) телеграфного уравнения при отсутствии локальных максимумов время релаксации для всех гармоник одинаково. В решении (8) уравнения Гюйера–Крумхансля (9), (10) для эволюции гармонической функцией или же его аналога — телеграфного уравнения с $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2 \delta$ (11) — высшие гармоники затухают значительно быстрее, чем основной тон $n = 1$; время релаксации для высших гармоник уменьшается с возрастанием номера гармоники (см. также [29]).

Применительно к распространению тепла это означает, что эффективная теплопроводность в уравнении типа Гюйера–Крумхансля (9), (10), (13) для гармонической функции $\exp(inx)$ увеличивается с каждым увеличением номера гармоники n в отличие от ее поведения в гиперболическом уравнении теплопроводности.

Обсуждение и выводы

С помощью операторного метода получено точное аналитическое решение гиперболического уравнения

теплопроводности. Достоверность полученных решений проверена непосредственной подстановкой в исходные уравнения. Исследован пример эволюции гармонической функции $\exp(inx)$.

Вторая производная по времени в гиперболическом уравнении теплопроводности (оно же телеграфное уравнение без постоянного члена) обеспечивает конечную скорость распространения решения и определяет его затухание. Если вторая производная по времени мала, то получаем решение, определяемое в основном диффузией Фурье. Наличие волнового члена в телеграфном уравнении приводит к возможности сложения волн; образуются локальные максимумы и минимумы и не выполняется принцип максимума, установленный, впрочем, для эллиптических и параболических уравнений. В контексте распространения тепла это противоречит второму закону термодинамики и не позволяет установить соответствующие коэффициенты теплопроводности. В контексте передачи электрического сигнала полученное точное решение телеграфного уравнения моделирует эволюцию тока или напряжения на линии. Показано, что возможен значительный локальный рост решений с их последующим затуханием.

Мы выяснили, что для гармонической функции $\exp(inx)$ решение телеграфного уравнения (2) с зависимым от номера гармоники коэффициентом при первой производной по времени $\partial/\partial t$: $(\varepsilon + n^2\delta)\partial/\partial t$ (см. (11)) является также решением уравнения теплопроводности типа Гюйера–Крумхансля (9), (10) с постоянным членом $\kappa \neq 0$. Для решения собственно уравнения Гюйера–Крумхансля тогда достаточно решить значительно более простое уравнение Каттанео с $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$, что существенно меняет поведение решения. Если для решения (6) гиперболического уравнения теплопроводности при отсутствии локальных экстремумов время релаксации практически одинаково для всех гармоник, то в решении (8) уравнения типа Гюйера–Крумхансля (9), (10) и соответствующего телеграфного уравнения с $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$ (11) высшие гармоники затухают значительно быстрее, чем основная с $n = 1$; время релаксации уменьшается с возрастанием номера гармоники. Таким образом, эффективная теплопроводность, определенная в контексте второго закона термодинамики в отсутствие локальных максимумов решения, в уравнении Каттанео практически постоянна, а в уравнении Гюйера–Крумхансля эффективная теплопроводность резко увеличивается с ростом номера гармоники.

Модель Каттанео в том или ином виде используется исследователями для описания переноса тепла, но содержит некоторые противоречия как физического, так и математического характера (см., например, [38, 39]). В частности, не выполняется принцип максимума, что возможно математически, но в контексте переноса тепла это не соответствует второму закону термодинамики. Уравнение типа Гюйера–Крумхансля также нарушает принцип максимума (см. рис. 4, справа, а также [29, 37]). В результате сложения волн легко реализуются локальные максимумы, однако при физически разумных значениях параметров они подавляются дополнительным демпфирующим членом δ .

Применение полученных нами результатов к исследованию распространения коротких тепловых импульсов для практического измерения теплопередачи [40–42] в соответствующих системах может быть легко проделано с помощью разложений в ряд Фурье. Это будет сделано в последующих публикациях.

Автор выражает признательность профессору А. В. Борисову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Fourier J.P.J.* The Analytical Theory of Heat. Cambridge University Press, London, 1878.
2. *Onsager L.* // Phys. Rev. 1931. **37**. P. 119.
3. *Peshkov V.* // J. Phys. (Moscow). 1944. **8**. P. 381.
4. *Ackerman C.C., Guyer R.A.* // Annals of Physics. 1968. **50**, N 1. P. 128.
5. *Ackerman C.C., Overton W.C.* // Phys. Rev. Lett. 1969. **22**, N 15. P. 764.
6. *McNelly T.F., Rogers S.J., Channin D.J.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1970. **24**, N 3. P. 100.
7. *Narayanamurti V., Dynes R.D.* // Phys. Rev. Lett. 1972. **26**. P. 1461.
8. *Cattaneo C.* // Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris. 1958. **247**. P. 431.
9. *Terman F.E.* // Radio Engineers' Handbook. 1st ed. McGraw-Hill, 1943.
10. *Moosaie A.* // Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2008. **35**. P. 103.
11. *Ahmadikial H., Rismanian M.* // J. Mech. Sci. Tech. 2011. **25**, N 11. P. 2919.
12. *Yen C.C., Wu C.Y.* // Appl. Math. Mod. 2003. **27**. P. 397.
13. *Lewandowska M.* // Heat Mass Transfer. 2001. **37**, N 4–5, P. 333.
14. *Lewandowska M., Malinowski L.* // Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2006. **33**. P. 61.
15. *Saedodin S., Torabi M.* // Int. Rev. Mech. Eng. 2009. **3**. P. 726.
16. *Challamel N., Grazide C., Picandet V.* et al. // C. R. Mecanique. 2016. **344**. P. 388.
17. *Saedodin S., Torabi M.* // Adv. Theor. Appl. Mech. 2010. **3**, N 8. P. 369.
18. *Guyer R.A., Krumhansl J.A.* // Phys. Rev. 1966. **148**. P. 766.
19. *Guyer R.A., Krumhansl J.A.* // Phys. Rev. 1966. **148**. P. 778.
20. *Жуковский К.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 2. С. 19. (*Zhukovsky K.V.* // Moscow University Phys. Bull. 2015. **70**, N 2. P. 93.)
21. *Zhukovsky K.* // Sci. World J. 2014. **2014**. Article ID 454865.
22. *Жуковский К.* // ТМФ. 2017. **190**. С. 58.
23. *Zhukovsky K.* // J. Math. Anal. Appl. 2017. **446**, № 1. P. 628.
24. *Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K.V.* // Appl. Math. Comput. 2007. **184**. P. 979.
25. *Zhukovsky K., Srivastava H.* // Axioms. 2016. **5**. P. 29.
26. *Zhukovsky K.V.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 3. С. 18. (*Zhukovsky K.V.* // Moscow University Phys. Bull. 2016. **71**, N 3. P. 237.)
27. *Zhukovsky K.V., Srivastava H.M.* // Appl. Math. Comput. 2017. **293**. P. 423.
28. *Zhukovsky K.* // Axioms. 2016. **5**. P. 28.
29. *Zhukovsky K.V.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. **96**. P. 132.
30. *Srivastava H.M., Manocha H.L.* A Treatise on Generating Functions. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), New York; Chichester; Brisbane; Toronto: John Wiley and Sons, 1984.
31. *Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K.V.* // J. Comput. Appl. Math. 2005. **182**, N 1. P. 165.
32. *Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K.V.* // Integral Transform. Spec. Funct. 2006. **17**, N 1. P. 31.
33. *Kovács R., Ván P.* // Int. J. Thermophysics. 2016. **37**, N 9. P. 95.
34. *Both S., Czél B., Fülöp T.* et al. // J. Non-Equilibrium Thermodynamics. 2016. **41**, N 1. P. 41.
35. *Lebon G., Machrafi H., Gremela M., Dubois Ch.* // Proc. R. Soc. A. 2011. **467**. P. 3241.
36. *Жуковский К.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 3. С. 49. (*Zhukovsky K.V.* // Moscow University Phys. Bull. 2001. **56**, N 3. P. 49.)

37. Zhukovsky K.V. // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. **98**. P. 523.
38. Körner C., Bergmann H.W. // Appl. Phys. A. 1998. **67**. P. 397.
39. Bright T.J., Zhang. Z.M. // J. Thermophys. Heat Transfer. 2009. **23**. P. 601.
40. Ván P. // Comm. Appl. Industrial Math. 2016. **7**, N 2. P. 150.
41. Kovacs R., Van P. // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. **83**. P. 613.
42. Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abbott G.L. // J. Appl. Phys. 1961. **32**. P. 1679.

A harmonic solution for the hyperbolic heat conduction equation and its relationship to the Guyer–Krumhansl equation

K. V. Zhukovsky

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.

E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

A particular solution of the hyperbolic heat-conduction equation was constructed using the method of operators. The evolution of a harmonic solution is studied, which simulates the propagation of electric signals in long wire transmission lines. The structures of the solutions of the telegraph equation and of the Guyer–Krumhansl equation are compared. The influence of the phonon heat-transfer mechanism in the environment is considered from the point of view of heat conductivity. The fulfillment of the maximum principle for the obtained solutions is considered. The frequency dependences of heat conductivity in the telegraph equation and in an equation of the Guyer–Krumhansl type are studied and compared with each other. The influence of the Knudsen number on heat conductivity in the model of thin films is studied.

Keywords: hyperbolic heat-conduction equation, Guyer–Krumhansl equation, maximum principle, Knudsen number.

PACS: 02.30.-f, Gp, Hq, Jr, Mv, Nw, Tb, Uu, Vv, Zz; 44.05+e, 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.

Received 18 February 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 1. Pp. 45–52.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович – докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник;
тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.