Об одном способе исследования задачи Коши для сингулярно возмущенного слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка

Е. Е. Букжалёв

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: bukzhalev@mail.ru

Статья поступила 05.02.2017, подписана в печать 13.03.2017.

Построена последовательность, сходящаяся к решению задачи Коши для сингулярно возмущенного слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Данная последовательность является также асимптотической в том смысле, что отклонение (по норме пространства непрерывных функций) ее n-го элемента от решения задачи пропорционально $(n+1)$-й степени параметра возмущения. Такая последовательность может быть использована для обоснования асимптотики, получаемой с помощью метода пограничных функций.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций, метод пограничных функций.

УДК: 517.928.4. PACS: 02.30.Hq.

Введение

В настоящей работе предлагается алгоритм построения последовательности $y_n(x;\varepsilon)$, сходящейся при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ к погранслойному решению (с экспоненциальным погранслоем вблизи начальной точки) задачи (1), (2) по норме пространства $C[0,X]$ (величина ε_0 выражается через входные данные задачи). Построение и доказательство сходимости последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ опираются на теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства (см. [1]). Поскольку при этом коэффициент сжатия k отображения оказывается величиной порядка ε ($k \leqslant \varepsilon/\varepsilon_0$), так что отклонение $y_n(x;\varepsilon)$ от решения $y(x;\varepsilon)$ (здесь под отклонением подразумевается отклонение по норме $C[0,X]$) составляет $O(\varepsilon^{n+1})$, то полученный результат носит также и асимптотический характер.

Заметим, что каждый следующий элемент последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ есть результат действия некоторого оператора на предыдущий элемент. Элементы таких последовательностей часто называют итерациями, а сами последовательности — итерационными. В нашем случае каждая следующая итерация приближается к $y(x;\varepsilon)$ (по норме $C[0,X]$) в асимптотически большое (обратно пропорциональное ε) число раз. Поэтому предложенный алгоритм построения последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ относится к методу асимптотических итераций (о методе асимптотических итераций см., например, [2]). Построенную итерационную последовательность $y_n(x;\varepsilon)$ будем называть также асимптотической итерационной (или просто асимптотической) последовательностью решения $y(x;\varepsilon)$ рассматриваемой задачи.

Возможность применения метода асимптотических итераций связана с выполнением условия (4) на коэффициент $a(x)$ из правой части исследуемого уравнения. Однако выполнение этого условия открывает путь и для метода пограничных функций (о методе пограничных функций см., например, [3, 4]). Непосредственным сравнением можно убедиться в том, что отклонение $y_n(x;\varepsilon)$ от n-й частичной суммы $Y_n(x;\varepsilon)$ (называемой асимптотикой или асимптотическим приближением n-го порядка) ряда $Y(x;\varepsilon)$, получаемого с помощью метода пограничных функций, составляет $O(\varepsilon^{n+1})$. Таким образом, сходимость последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ делает возможным использование метода асимптотических итераций для обоснования асимптотического разложения, получаемого с помощью метода пограничных функций (т. е. для доказательства того, что разность между $Y_n(x;\varepsilon)$ и решением $y(x;\varepsilon)$ составляет $O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно по всем $x \in [0,X]$).

Отметим, что сходимость (при достаточно малых ε) асимптотической последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ — принципиальное преимущество метода асимптотических итераций по сравнению с методом пограничных функций, который позволяет построить хоть и асимптотический, но, вообще говоря, расходящийся (в том числе при сколь угодно малых ε) ряд. Дело в том, что оценка отклонения $y_n(x;\varepsilon)$ от $Y_n(x;\varepsilon)$, составляющая $O(\varepsilon^{n+1})$, не равномерна по n и с ростом n это отклонение может не только не стремиться к нулю, но даже и неограниченно возрастать.

Еще одним преимуществом последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ является возможность построения всех ее членов без повышения требований гладкости на функции $a(x)$, $b(x)$ и $g(y,x)$ (для построения всех $y_n(x;\varepsilon)$ достаточно выполнения условий (3), в то время как для построения всех членов ряда $Y(x;\varepsilon)$ требуется бесконечная дифференцируемость $a(x)$, $b(x)$ и $g(y,x)$).

Следует также сказать, что идея применения итерационного подхода к сингулярно возмущенным уравнениям сама по себе не нова. Например, в работах [5,6] предложен итерационный процесс приближенного решения задачи Коши для нормальной системы быстрых и медленных уравнений (соответственно с малым параметром при производной и без него). При этом основное упрощение, достигаемое за счет использования итерационного метода, состоит в понижении на каждом шаге размерности исходной системы. Но, в отличие от указанных работ, в настоящей статье упрощение связано не с понижением порядка, а с автономизацией и линеаризацией исследуемого уравнения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для слабо нелинейного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\varepsilon y' = a(x)\,y + b(x) + \varepsilon\, g(y,x), \quad x \in (0,X]; \tag{1}$$

$$y(0;\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, $X > 0$, $y^0 \in \mathbb{R}$,

$$a(x), b(x) \in C^1[0,X], \quad g(y,x) \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0,X]). \tag{3}$$

Кроме того, будем считать, что

$$a(x) < 0 \tag{4}$$

при всех $x \in [0,X]$.

Поставим вспомогательную задачу:

$$a(x)\,\overline{y} + b(x) = 0, \quad x \in [0,X]; \tag{5}$$

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = a(0)\,\Pi, \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{6}$$

$$\Pi(0) = y^0 - \overline{y}(0). \tag{7}$$

Уравнение (5) представляет собой алгебраическое уравнение первой степени для $\overline{y}(x)$, а (6) — автономное однородное линейное дифференциальное уравнение для $\Pi(\xi)$. Решение задачи (5)–(7) имеет вид

$$\overline{y}(x) = -\,b(x)/a(x), \tag{8}$$

$$\Pi(\xi) = \left[y^0 - \overline{y}(0)\right] e^{a(0)\,\xi} = \left[y^0 + b(0)/a(0)\right] e^{a(0)\,\xi}.$$

Сделаем замену переменных задачи (1), (2):

$$x = \varepsilon\,\xi, \quad y(x;\varepsilon) = \widetilde{y}(\xi, x) + \varepsilon\, z(\xi;\varepsilon), \tag{9}$$

где

$$\widetilde{y}(\xi, x) := \overline{y}(x) + \Pi(\xi). \tag{10}$$

Из (8) и (10) видно, что при достаточно большом $\overline{C}$ для $\widetilde{y}(\xi,\,\varepsilon\,\xi)$ при всех $\varepsilon \in (0,+\infty)$ и $\xi \in [0, X/\varepsilon]$ справедливо: $|\widetilde{y}(\xi,\,\varepsilon\,\xi)| \leqslant \overline{C}$.

Для новой функции $z(\xi;\varepsilon)$ получается следующая начальная задача:

$$\frac{dz}{d\xi} = a(\varepsilon\,\xi)\,z + f(z,\xi;\varepsilon), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{11}$$

$$z(0;\varepsilon) = 0, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} f(z,\xi;\varepsilon) &:= \varepsilon^{-1}\left[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)\right]\Pi(\xi) - \overline{y}'(\varepsilon\,\xi) + \\ &\quad + g(\widetilde{y}(\xi,\,\varepsilon\,\xi) + \varepsilon\, z,\, \varepsilon\,\xi) = \\ &= \varepsilon^{-1}\left[y^0 - \overline{y}(0)\right]\left[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)\right] e^{a(0)\,\xi} - \overline{y}'(\varepsilon\,\xi) + \\ &\quad + g(\widetilde{y}(\xi,\,\varepsilon\,\xi) + \varepsilon\, z,\, \varepsilon\,\xi). \end{aligned} \tag{13}$$

Преобразуем уравнение (11), добавив переменную x в качестве нового параметра:

$$\frac{dz}{d\xi} = a(x)\,z + \left[a(\varepsilon\,\xi) - a(x)\right] z + f(z,\xi;\varepsilon), \tag{14}$$

$$(\xi, x) \in (0, X/\varepsilon] \times [0,X].$$

Задача (14), (12) равносильна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\xi;\varepsilon) &= e^{a(x)\,\xi}\int\limits_0^{\xi} e^{-a(x)\,\zeta}\,\times \\ &\times \left\{\left[a(\varepsilon\,\zeta) - a(x)\right] z(\zeta;\varepsilon) + f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)\right\} d\zeta, \\ &(\xi, x) \in [0, X/\varepsilon] \times [0,X]. \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку решение z уравнения (15) заведомо не зависит от x, на место последнего можно подставить любую функцию ξ и ε со значениями на отрезке $[0,X]$. Тогда, полагая $x = \varepsilon\,\xi$, приходим к следующему уравнению для $z(\xi;\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} z(\xi;\varepsilon) &= e^{a(\varepsilon\,\xi)\,\xi}\int\limits_0^{\xi} e^{-a(\varepsilon\,\xi)\,\zeta}\,\times \\ &\times \left\{\left[a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)\right] z(\zeta;\varepsilon) + f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)\right\} d\zeta = \\ &=: \widehat{A}(\varepsilon)[z](\xi;\varepsilon), \quad \xi \in [0, X/\varepsilon], \end{aligned} \tag{16}$$

где при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0,+\infty)$ под областью определения оператора $\widehat{A}(\varepsilon)$ подразумевается пространство $C[0,X/\varepsilon]$:

$$\widehat{A}(\varepsilon) : C[0,X/\varepsilon] \to C[0,X/\varepsilon].$$

2. Построение и доказательство сходимости итерационной последовательности

Пусть $O(0,C_0;\varepsilon) := \left\{z \in C[0,X/\varepsilon] \mid \forall\xi \in [0,X/\varepsilon] \;\; z(\xi) \in [-C_0, +C_0]\right\}$ — замкнутая C_0-окрестность функции $z \equiv 0$ в пространстве $C[0,X/\varepsilon]$.

Утверждение 1. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 \geqslant 0$ (C_0 не зависит от ε), что при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справедливо*

$$\widehat{A}(C_0;\varepsilon) : O(0,C_0;\varepsilon) \to O(0,C_0;\varepsilon),$$

где $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ — сужение оператора $\widehat{A}(\varepsilon)$ на $O(0,C_0;\varepsilon)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, подействуем оператором $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ на произвольную функцию $z(\xi) \in O(0,C_0;\varepsilon)$ и оценим получившийся результат:

$$\left|\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z](\xi)\right| \leqslant e^{-\varkappa\,\xi}\left\{C_0\int\limits_0^{\xi} e^{\varkappa\,\zeta}\left|a(\varepsilon\,\zeta) - a(\varepsilon\,\xi)\right| d\zeta +\right.$$

$$+\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\,|f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)|\,d\zeta\Bigg\}, \quad (17)$$

где $\varkappa := -\max_{[0,X]} a(x)$. Подчеркнем, что в силу второй теоремы Вейерштрасса постоянная $\varkappa$ имеет положительный знак.

Для первого интеграла из (17) имеем

$$\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\,|a(\varepsilon\zeta)-a(\varepsilon\xi)|\,d\zeta =$$
$$=\varepsilon\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\left|a'(\varepsilon\,[(1-\theta)\,\zeta+\theta\,\xi])\right|(\xi-\zeta)\,d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\,\|a'(x)\|\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\,(\xi-\zeta)\,d\zeta=$$
$$=\varepsilon\,\frac{\alpha}{\varkappa^2}\left[e^{\varkappa\xi}-1-\varkappa\xi\right]\leqslant\varepsilon\,\beta\,e^{\varkappa\xi}, \quad (18)$$

где $\theta=\theta(\varepsilon\zeta,\,\varepsilon\xi)\in(0,1)$, $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0,X]$, $\alpha:=\|a'(x)\|$, $\beta:=\alpha/\varkappa^2$.

Для второго интеграла из (17) имеем (см. (13))

$$\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\,|f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)|\,d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\Big\{\left|[y^0-\overline{y}(0)]\,a'(\varepsilon\,\theta_0\,\zeta)\right|\zeta\,e^{a(0)\,\zeta}+\left|\overline{y}'(\varepsilon\,\zeta)\right|+$$
$$+\left|g(\widetilde{y}(\zeta,\,\varepsilon\,\zeta),\,\varepsilon\,\zeta)\right|+$$
$$+\,\varepsilon\left|z(\zeta;\varepsilon)\right|\left|g_y(\widetilde{y}(\zeta,\,\varepsilon\,\zeta)+\varepsilon\,\theta_1\,z(\zeta;\varepsilon),\,\varepsilon\,\zeta)\right|\Big\}\,d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\Big\{\widetilde{C}\,\alpha\,|a(0)|^{-1}\max_{\eta>0}(\eta\,e^{-\eta})+\|\overline{y}'(x)\|+$$
$$+\|g(y,x)\|_0+C_0\,\varepsilon\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon}\Big\}\int_0^{\xi} e^{\varkappa\zeta}\,d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\left(C_0\,\varepsilon\,\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon}+\gamma\right)e^{\varkappa\xi}, \quad (19)$$

где $\theta_i=\theta_i(\zeta;\varepsilon)\in(0,1)$, $\|\cdot\|_\delta$ — норма пространства $C([-\overline{C}-\delta,\,+\overline{C}+\delta]\times[0,X])$,

$$\widetilde{C}:=|y^0-\overline{y}(0)|,\quad \gamma:=e^{-1}\,\widetilde{C}\,\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|\overline{y}'(x)\|+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g(y,x)\|_0.$$

Из (17), (18) и (19) видно, что если C_0 и ε удовлетворяют неравенствам

$$0\leqslant l(C_0,\varepsilon):=C_0\,\varepsilon\left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon}\right)+\gamma\leqslant C_0, \quad (20)$$

то $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z](\xi)\in O(0,C_0;\varepsilon)$.

Пусть C_0 — любое число из $(\gamma,+\infty)$. Тогда поскольку $l(C_0,\varepsilon)$ есть неубывающая функция ε и $0\leqslant l(C_0,0)<C_0$, то, во-первых, уравнение $l(C_0,\varepsilon)=C_0$ имеет не более одного корня $\varepsilon=\varepsilon_0$, причем ε_0 заведомо больше нуля (в случае отсутствия корней считаем, что $\varepsilon_0=+\infty$), и, во-вторых, неравенства (20) справедливы при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Утверждение доказано.

Замечание. Из определения ε_0 следует, что

$$\varepsilon_0\leqslant\left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon_0}\right)^{-1} \quad (21)$$

(неравенство (21) формально справедливо и при $\varepsilon_0=+\infty$, так как уравнение $l(C_0,\varepsilon)=C_0$ не имеет корней лишь в случае $\beta=\|g_y(y,x)\|_{+\infty}=0$, т. е. если $a(x)=\mathrm{const}$ на $[0,X]$, $g(y,x)=\widetilde{g}(x)$ на $\mathbb{R}\times[0,X]$).

Пусть для каждого фиксированного положительного ε и любых z_1 и z_2 из $C[0,X/\varepsilon]$ определено расстояние ρ_ε между z_1 и z_2:

$$\rho_\varepsilon(z_1,z_2):=\|z_2-z_1\|_{C[0,X/\varepsilon]}:=\max_{\xi\in X(\varepsilon)}|z_2(\xi)-z_1(\xi)|, \quad (22)$$

где $X(\varepsilon):=[0,X/\varepsilon]$. Заметим, что $C[0,X/\varepsilon]$ и $O(0,C_0;\varepsilon)$ с так определенным ρ_ε представляют собой полные метрические пространства.

Утверждение 2. *$\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ — сжимающий оператор при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.*

Доказательство. Пусть ρ_ε — метрика (22) пространства $O(0,C_0;\varepsilon)$. Выберем две произвольные функции $z_1(\xi)$ и $z_2(\xi)$ из этого пространства и оценим расстояние между $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_1]$ и $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_2]$:

$$\rho_\varepsilon(\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_1],\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_2])=$$
$$=\max_{\xi\in X(\varepsilon)}\left|\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_2](\xi)-\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_1](\xi)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{\xi\in X(\varepsilon)}\int_0^{\xi} e^{\varkappa(\zeta-\xi)}\Big\{\left|a(\varepsilon\,\zeta)-a(\varepsilon\,\xi)\right|+$$
$$+\,\varepsilon\left|g_y(\widetilde{y}(\zeta,\,\varepsilon\,\zeta)+\varepsilon\,[(1-\theta)\,z_1(\zeta)+\theta\,z_2(\zeta)],\,\varepsilon\,\zeta)\right|\Big\}\times$$
$$\times\left|z_2(\zeta)-z_1(\zeta)\right|d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\rho_\varepsilon(z_1,z_2)\,\varepsilon\left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon}\right) \quad (23)$$

(ср. (18) и (19)), где $\theta=\theta(\zeta;\varepsilon)\in(0,1)$.

Из (23) и (21) вытекает, что при любом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ для коэффициента сжатия $k(C_0;\varepsilon)$ оператора $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ справедливо

$$k(C_0;\varepsilon)\leqslant\varepsilon\left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon_0}\right)\leqslant\varepsilon/\varepsilon_0<1. \quad (24)$$

Утверждение доказано.

Таким образом, к оператору $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ существует единственное решение $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (11), (12) (равносильной интегральному уравнению (16)), принадлежащее $O(0,C_0;\varepsilon)$. Подчеркнем, что единственность решения $z(\xi;\varepsilon)$ (при всех $\varepsilon\in\mathbb{R}$), причем глобальная (т. е. на множестве $[0,X/\varepsilon]\times\mathbb{R}$), вытекает непосредственно из условия (3) на функции $a(x)$, $b(x)$ и $g(y,x)$.

Свойство сжимаемости оператора $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность $z_n(\xi;\varepsilon)$, сходящуюся по норме пространства $C[0,X/\varepsilon]$ к точному решению $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (11), (12) при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$:

$$\|z-z_n\|_{C[0,X/\varepsilon]}:=\max_{\xi\in X(\varepsilon)}|z(\xi;\varepsilon)-z_n(\xi;\varepsilon)|\to 0,\quad n\to\infty$$

(заметим, что для всякого ε_0' из интервала $(0, \varepsilon_0)$ сходимость будет равномерной по ε на множестве $(0, \varepsilon_0'])$.

Положим $z_0(\xi;\varepsilon) \equiv 0$. Поскольку $z(\xi;\varepsilon) \in O(0, C_0;\varepsilon)$, то

$$\|z(\xi;\varepsilon) - z_0(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} = \|z(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} \leqslant C_0 \quad (25)$$

при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Далее, для любого натурального n положим

$$z_n(\xi;\varepsilon) := \widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_{n-1}](\xi;\varepsilon). \quad (26)$$

Тогда, учитывая (24) и (25), для каждого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} =: \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем

$$\|z(\xi;\varepsilon) - z_n(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} \leqslant \leqslant k(C_0;\varepsilon)^n \, \|z(\xi;\varepsilon) - z_0(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon]} \leqslant C_0\,(\varepsilon/\varepsilon_0)^n. \quad (27)$$

Вернемся к задаче (1), (2). Из (9), (10) и (8) приходим к следующей итерационной последовательности для решения $y(x;\varepsilon)$ исходной задачи:

$$y_n(x;\varepsilon) := \widetilde{y}(x/\varepsilon, x) + \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon) = = \overline{y}(x) + [y^0 - \overline{y}(0)]\, e^{a(0)\,x/\varepsilon} + \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (28)$$

При $n \geqslant 1$ величина $y_n(x;\varepsilon)$ может быть выражена непосредственно через $y_{n-1}(x;\varepsilon)$:

$$y_n(x;\varepsilon) = \widetilde{y}(x/\varepsilon, x) + \varepsilon\, \widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_{n-1}](x/\varepsilon;\varepsilon) =: =: \widehat{B}(\varepsilon)[y_{n-1}](x;\varepsilon),$$

$$z_{n-1}(\xi;\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\,[y_{n-1}(\varepsilon\,\xi;\,\varepsilon) - \widetilde{y}(\xi,\,\varepsilon\,\xi)]$$

(см. (28) и (26)). Отметим, что оператор $\widehat{B}(\varepsilon)$ будет сжимающим при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (т. е. при тех же ε, что и $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$) и что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для оператора $\widehat{B}(\varepsilon)$ будет справедливо

$$\widehat{B}(\varepsilon) : O(\widetilde{y},\, \varepsilon\, C_0) \to O(\widetilde{y},\, \varepsilon\, C_0),$$

где $O(\widetilde{y},\, \varepsilon\, C_0) := \big\{y \in C[0, X] \mid \forall x \in [0, X] \;\; y(x) \in [\widetilde{y}(x/\varepsilon, x) - \varepsilon\, C_0,\, \widetilde{y}(x/\varepsilon, x) + \varepsilon\, C_0]\big\}$ — замкнутая $\varepsilon\, C_0$-окрестность функции $\widetilde{y}(x/\varepsilon, x)$ в пространстве $C[0, X]$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (4). *Тогда, во-первых, при любом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существует единственное решение* $y(x;\varepsilon)$ *задачи* (1), (2) *и, во-вторых, при любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *и* $n \in \mathbb{N}_0$ *справедливо неравенство*

$$\|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)\| \leqslant C_0\, \varepsilon\, (\varepsilon/\varepsilon_0)^n.$$

Доказательство. Поскольку существование и единственность решения $y(x;\varepsilon)$ задачи (1), (2) являются непосредственными следствиями существования и единственности решения $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (11), (12), то нам остается только оценить точность, с которой $y_n(x;\varepsilon)$ приближает $y(x;\varepsilon)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем (см. (28), (9) и (27))

$$\|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)\| = \|y(x;\varepsilon) - \widetilde{y}(x/\varepsilon, x) - \varepsilon\, z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon)\| = = \varepsilon\, \|z(x/\varepsilon;\, \varepsilon) - z_n(x/\varepsilon;\, \varepsilon)\| \leqslant C_0\, \varepsilon\, (\varepsilon/\varepsilon_0)^n.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. Курс высшей математики и мат. физики. М., 1998.
2. *Копачевский Н.Д., Смолич В.П.* Введение в асимптотические методы: Специальный курс лекций. Симферополь, 2009.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Науч.-теор. пособие. Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики. М., 1990.
5. *Боглаев Ю.П.* // Докл. АН СССР. 1976. **227**, № 5. С. 1009.
6. *Боглаев Ю.П., Жданов А.В., Стельмах В.Г.* // Дифференц. уравнения. 1978. **14**, № 3. С. 395.

A method for studying the Cauchy problem for a singularly perturbed weakly nonlinear first-order differential equation

E. E. Bukzhalev

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia. E-mail: bukzhalev@mail.ru.

A sequence converging to the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed weakly nonlinear first-order differential equation is constructed. This sequence is asymptotic in the sense that the distance (with respect to the norm of the space of continuous functions) between its nth element and the solution to the problem is proportional to the $(n+1)$th power of the perturbation parameter. Such a sequence can be used to justify asymptotics obtained by the boundary function method.

Keywords: singular perturbations, Banach fixed-point theorem, asymptotic-iteration method, boundary function method.

PACS: 02.30.Hq.

Received 5 February 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2018. **72**, No. 1. Pp. 53–56.

Сведения об авторе

Букжалёв Евгений Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bukzhalev@mail.ru.