

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Группы симметрии решетки аустенита и строение самоаккомодационных комплексов мартенситных кристаллов в сплавах с эффектами памяти формы

А. Г. Хунджуа^a, А. Г. Птицын^b, Е. А. Бровкина^c

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики твердого тела. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^akhundjua@mail.ru, ^bsenyabird@yandex.ru, ^cel-brov@yandex.ru

Статья поступила 11.02.2017, подписана в печать 12.04.2017.

В работе рассмотрено внутреннее строение экспериментально наблюдаемых самоаккомодационных комплексов мартенситных кристаллов, определяемое системой плоскостей двойникования мартенситных кристаллов; показана прямая корреляция типов строения комплексов с подгруппами группы симметрии решетки аустенита.

Ключевые слова: эффект памяти формы, мартенситные превращения, двойникование, симметрия кристаллической решетки аустенита и мартенсита, самоаккомодационные комплексы, операторы симметрии, подгруппы групп симметрии.

УДК: 538.9. PACS: 61.50.ks.

Введение

Обратимость неупругой деформации в сплавах с эффектами памяти формы (ЭПФ) коррелирует с наличием двойниковой связи между кристаллографически эквивалентными вариантами ориентационного соотношения (ОС) [1, 2]. При наличии такой связи из исходного кристалла мартенсита путем двойникования может возникнуть комплекс доменов, состоящий из нескольких вариантов ОС, в том числе и самоаккомодационный комплекс (СК). Усредненная по СК деформация формы отсутствует, т. е. компенсация формоизменения и минимизация упругой энергии происходит не на макроуровне зерна поликристалла, но и на микроуровне каждого СК мартенситных кристаллов.

Комплексы могут формироваться по двум механизмам:

— двойникованием монокристалла мартенсита, выросшего внутри аустенитной матрицы;

— слиянием двух или более монокристаллов мартенсита в комплекс.

В сплавах с ЭПФ при низких температурах возможно полное превращение аустенита в мартенсит. Деформация такого однофазного образца идет путем двойникования или (и) роста одних доменов за счет других, сдвойникованных между собой. Двойниковая связь между вариантами ОС возможна только в случае параллельности плоскости двойникования кристаллов мартенсита одной из плоскостей симметрии решетки аустенита [3, 4]. В результате кристаллографические характеристики (ОС и сингония кристаллов мартенсита) накладывают целый ряд ограничений как на возможность формирования СК,

так и на их строение — физика, по существу, сводится к геометрии.

Перечисленные выше условия предъявляют жесткие требования к строению СК, в которых попарно связанными двойникованием оказываются несколько вариантов ОС.

Морфология СК определяется огранкой кристаллов мартенсита (габитусными плоскостями) и внутренней доменной структурой. Плоскости габитуса в мартенситных сплавах меняются в широком диапазоне [5], а их прогнозирование малоэффективно, хотя попытки таких расчетов не прекращаются [6–9]. Число различных вариантов доменной структуры СК ограничено, и они поддаются прогнозированию, так как в сплавах с ЭПФ аустенит всегда имеет кубическую решетку с фиксированной системой из девяти плоскостей симметрии. Параллельные им плоскости двойникования мартенсита должны пересекаться под углами в 90, 60 и 45°, что ограничивает число возможных плоскостей двойникования мартенсита, т. е. междоменных границ в СК.

Вышеизложенное определило цель настоящей работы: классификация типов внутреннего строения СК и сравнение их с экспериментально наблюдаемыми. Такие попытки делались в нашей работе [10], но предлагаемый новый подход опирается на анализ группы симметрии решетки аустенита и должен дать исчерпывающее множество типов строения СК.

1. Методика анализа

При известной взаимной ориентации кристаллических решеток мартенсита и аустенита, выраженной матрицей $\hat{A} = \hat{A}_1$, матрица кристаллографически эквивалентного варианта ОС $\hat{A}_i = \hat{S}_i \hat{A}$

(\widehat{S}_i — соответствующий оператор симметрии решетки аустенита). Двойникование кристалла мартенсита по плоскости (UVW) также меняет взаимную ориентацию решеток и может быть описано с помощью оператора двойникования \widehat{D}_{UVW} . В сплавах с ЭПФ двойникование, как правило, переводит один вариант ориентационного соотношения в кристаллографически эквивалентный ему вариант, что математически сводится к матричному уравнению $\widehat{A}_i = \widehat{S}_i \widehat{A} = \widehat{A} \widehat{D}_{UVW} = \widehat{A} \widehat{D}_i$. В общем случае, когда имеется n плоскостей двойникования, учет замкнутости СК, т.е. возврата к исходному домену после n -кратного двойникования, приводит к соотношению

$$\widehat{A} \widehat{D}_j \widehat{D}_k \dots \widehat{D}_m = \widehat{A}, \quad \text{или} \quad \widehat{D}_j \widehat{D}_k \dots \widehat{D}_m = \widehat{E}. \quad (1)$$

Так как $\widehat{D}_i = \widehat{A}^{-1} \widehat{S}_i \widehat{A}$, соотношение (1) принимает вид $\widehat{E} = \widehat{D}_j \widehat{D}_k \dots \widehat{D}_m = \widehat{A}^{-1} \widehat{S}_j \widehat{S}_k \dots \widehat{S}_m \widehat{A}$, откуда

$$\widehat{S}_j \widehat{S}_k \dots \widehat{S}_m = \widehat{E}, \quad (2)$$

т.е. при анализе произведения операторов двойникования (1), вид которых зависит от сингонии решетки мартенсита, это произведение можно заменить произведением известных операторов симметрии кубической решетки. Соотношение (2) будет автоматически выполняться, если входящие в него операторы $\widehat{S}_j, \widehat{S}_k, \dots, \widehat{S}_m, \widehat{E}$ образуют *подгруппу операторов симметрии решетки кубического кристалла аустенита* $\{\widehat{S}_i\}$.

Группу операторов симметрии кубического кристалла $\{\widehat{S}_i\}$ составляют 24 оператора поворота вокруг осей 4-го, 2-го и 3-го порядка на углы, кратные $2\pi/4, 2\pi/2$ и $2\pi/3$ (приложение 1). Из 24 операторов $\{\widehat{S}_i\}$ *двойнивающими* будут первые десять, так как они самосопряженные (например, $\widehat{S}_2^{-1} = \widehat{S}_2$ и $\widehat{S}_2^2 = \widehat{E}$) и имеют собственные значения $\lambda_1 = 1; \lambda_{2,3} = -1$, характерные для оператора двойникования.

Собственные векторы операторов $\widehat{S}_2, \widehat{S}_3, \widehat{S}_4$ нормальны трем плоскостям типа $\{100\}$, а операторов $\widehat{S}_5, \widehat{S}_6, \widehat{S}_7, \widehat{S}_8, \widehat{S}_9, \widehat{S}_{10}$ — шести плоскостям типа $\{110\}$. Поскольку любой из операторов \widehat{S}_j реализует переход от варианта ОС № 1 к варианту № j и некоторые из этих операторов являются операторами двойникования, то одни пары вариантов ОС являются взаимными двойниками, а другие пары — не являются.

Поэтому при изучении самоаккомодации в первую очередь интересно рассмотреть множества операторов, попарно связанных операцией двойникования и образующих подгруппу группы операторов симметрии. Их следует искать в выделенной части таблицы умножения операторов симметрии — таблице умножения операторов $\widehat{S}_2, \widehat{S}_3, \dots, \widehat{S}_{10}$ (приложение 2). Отметим, что в то время как 24 оператора симметрии кубического кристалла образуют группу, совокупность двойнивающих операторов $\{\widehat{E}, \widehat{S}_2, \widehat{S}_3, \dots, \widehat{S}_{10}\}$ группой не является,

о чем свидетельствует таблица умножения этих операторов.

2. Анализ внутреннего строения простейших самоаккомодационных комплексов

2.1. Подгруппы из двух операторов симметрии

Единичная матрица \widehat{E} вместе с любым из двойнивающих операторов \widehat{S}_j ($j = 2-9$) образуют подгруппу, так как $\widehat{S}_j^2 = \widehat{E}$. Двойникование по плоскостям, параллельным плоскостям аустенита $\{100\}$, выполняют операторы $\widehat{S}_2-\widehat{S}_4$, входящие в подгруппы 1-3: $\{\widehat{E}, \widehat{S}_2\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_3\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_4\}$; по плоскостям, параллельным плоскостям аустенита $\{110\}$, — операторы $\widehat{S}_5-\widehat{S}_{10}$ (подгруппы 4-9): $\{\widehat{E}, \widehat{S}_5\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_6\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_7\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_8\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_9\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_{10}\}$. Каждой из подгрупп 1-9 можно поставить в соответствие двухдоменный мартенситный кристалл с междоменными границами, параллельными одной из 9 плоскостей симметрии аустенита. Математически переход в двойникованную область выражается соотношением $\widehat{A}_i = \widehat{S}_i \widehat{A}$. Повторное двойникование по той же плоскости приводит к исходной матрице \widehat{A}_1 , т.е. к исходному варианту ОС.

Формирование соответствующего подгруппе двойникового комплекса требует выполнения лишь одного условия — параллельности одной из плоскостей двойникования мартенсита какой-либо плоскости симметрии решетки аустенита.

При наличии единственной плоскости двойникования можно столкнуться с двумя способами формирования ансамблей: разбиением однодоменных кристаллов путем двойникования (рис. 1, а) и слиянием двух однодоменных кристаллов с подходящей ориентировкой в двухдоменный комплекс (рис. 1, б). Первый случай тривиален — он реализуется как при термоупругих, так и при нетермоупругих мартенситных превращениях, например, в сплавах Mn-Cu [11, 12]; второй случай присущ скорее термоупругим мартенситным превращениям и реализуется, например, в сплавах In-Tl [13] и во многих сплавах на основе меди (Cu-Zn, Cu-Al-Ni и Cu-Al-Mn [14-16]), в которых наблюдались ансамбли мартенситных кристаллов в виде клиньев, копий, разветвлений, представляющих собой сростки доменов, находящихся в двойниковой связи.

Все эти ансамбли являются двухдоменными, а их внешнее различие обусловлено тем, что морфология двухдоменного кристалла зависит от того, какие конкретно два домена (два варианта ОС) образуют ансамбль. Кроме того, внешняя огранка мартенситного кристалла определяется габитусными плоскостями, которые меняются даже в пределах одной системы в зависимости от состава сплава.

2.2. Подгруппы из трех операторов симметрии

Подгруппы $\{\widehat{E}, \widehat{S}_{11}, \widehat{S}_{12}\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_{13}, \widehat{S}_{14}\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_{15}, \widehat{S}_{16}\}, \{\widehat{E}, \widehat{S}_{17}, \widehat{S}_{18}\}$ содержат недвойнивающие операторы,

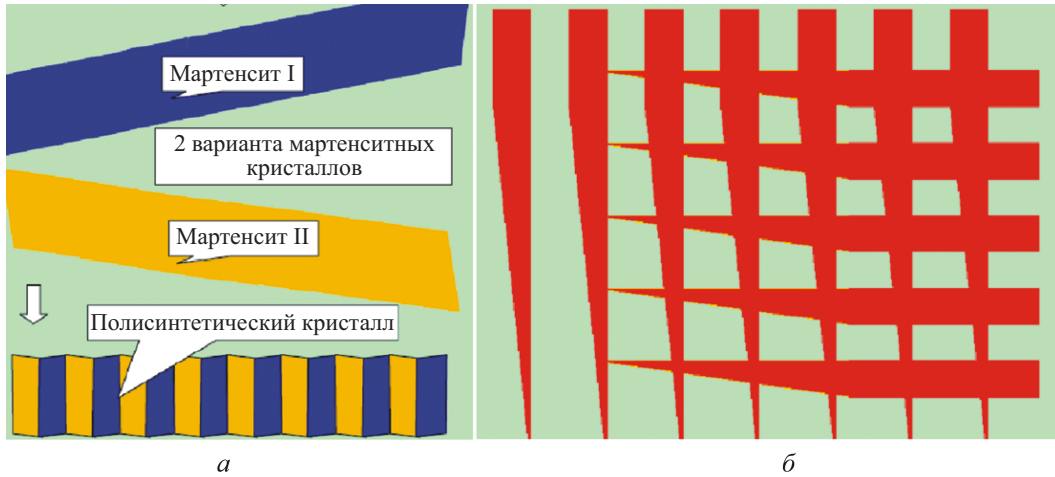


Рис. 1. Система доменов двух типов (полисинтетический двойник) с междоменными границами, параллельными одной из 9 плоскостей симметрии аустенита, сформированная путем двойникования кристалла мартенсита (а), и система доменов двух типов, формирующаяся в сплавах In–Tl путем слияния кристаллов мартенсита (двух вариантов ОС) (б) [13]

поэтому им нельзя поставить в соответствие реальные комплексы мартенситных кристаллов.

2.3. Подгруппы из четырех операторов симметрии

Подгруппы из 4 операторов можно получить путем объединения приведенных выше подгрупп из двух операторов симметрии: $\{\hat{E}, \hat{S}_2\} + \{\hat{E}, \hat{S}_3\} + \{\hat{E}, \hat{S}_4\} = \{\hat{E}, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4\}$; $\{\hat{E}, \hat{S}_2\} + \{\hat{E}, \hat{S}_9\} + \{\hat{E}, \hat{S}_{10}\} = \{\hat{E}, \hat{S}_2, \hat{S}_9, \hat{S}_{10}\}$; $\{\hat{E}, \hat{S}_3\} + \{\hat{E}, \hat{S}_7\} + \{\hat{E}, \hat{S}_8\} = \{\hat{E}, \hat{S}_3, \hat{S}_7, \hat{S}_8\}$; $\{\hat{E}, \hat{S}_4\} + \{\hat{E}, \hat{S}_5\} + \{\hat{E}, \hat{S}_6\} = \{\hat{E}, \hat{S}_4, \hat{S}_5, \hat{S}_6\}$.

В каждой из четырех подгрупп операторы, входящие в подгруппу, коммутируют, угол между плоскостями двойникования составляет 90° , а соответствующий комплекс — «четверик» — содержит 4 разных домена: $\hat{A}_1, \hat{A}_i = \hat{S}_i \hat{A}_1, \hat{A}_j = \hat{S}_j \hat{A}_1, \hat{A}_k = \hat{S}_k \hat{S}_i \hat{A}_1 = \hat{S}_k \hat{A}_1$. Здесь учтено, что $\hat{S}_i \hat{S}_i = \hat{S}_k$. Следующее двойникование ввиду коммутации операторов приводит к уже имеющемуся варианту ОС: $\hat{S}_i \hat{A}_k = \hat{S}_i \hat{S}_j \hat{S}_i \hat{A}_1 = \hat{S}_j \hat{S}_i \hat{S}_i \hat{A}_1 = \hat{S}_j \hat{A}_1 = \hat{A}_j$.

Рассмотрим подгруппу $\{\hat{E}, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4\}$. Проведем последовательное двойникование исходного мартенситного кристалла (вариант 1) по двум плоскостям, параллельным плоскостям симметрии аустенита (100) и (010) — им соответствуют операторы \hat{S}_2 и \hat{S}_3 . Полученный комплекс — «четверик» — содержит 4 домена, отвечающие четырем разным вариантам ОС с матрицами $\hat{A}_1, \hat{A}_2 = \hat{S}_2 \hat{A}_1, \hat{A}_4 = \hat{S}_3 \hat{A}_2, \hat{A}_3 = \hat{S}_2 \hat{A}_4$ (далее $\hat{A}_1 = \hat{S}_3 \hat{A}_3$). Схема расположения доменов в самоаккомодационном комплексе — «четверик» — приведена на рис. 2, а (плоскости двойникования перпендикулярны плоскости рисунка). Но есть еще и третий оператор \hat{S}_4 , также входящий в данную подгруппу. Ему соответствует плоскость двойникования, параллельная плоскости симметрии аустенита (001) — эта плоскость лежит в плоскости рис. 2, а. Двойникование «четверика»

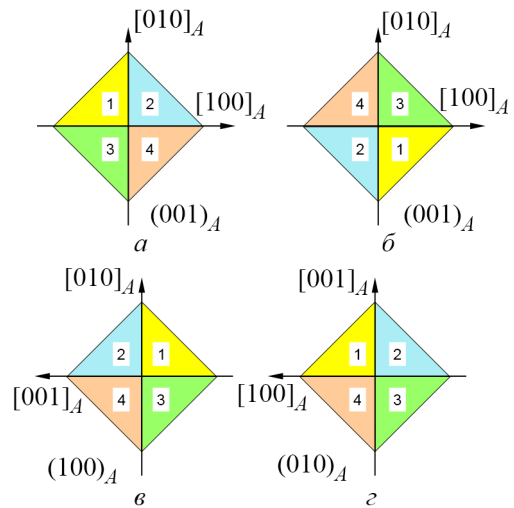


Рис. 2. Схема двойниковых доменов для подгруппы из 4 операторов симметрии ниже (а) и выше (б) плоскости двойникования октаэдрического СА, параллельной плоскости (001)_А, и расположение доменов в сечении октаэдрического СА-комплекса (ниже плоскости сечения), параллельной плоскостям (100)_А (в) и (010)_А (г)

по этой плоскости разделяет комплекс на две части — нижнюю и верхнюю, но не добавляет новых вариантов ОС, а приводит лишь к повороту одной части относительно другой на 180° (рис. 2, б).

Остальным трем подгруппам $\{\hat{E}, \hat{S}_2, \hat{S}_9, \hat{S}_{10}\}, \{\hat{E}, \hat{S}_3, \hat{S}_7, \hat{S}_8\}, \{\hat{E}, \hat{S}_4, \hat{S}_5, \hat{S}_6\}$ соответствуют СК, подобные описанному выше «четверику». Отличие между ними коснется лишь конкретных номеров доменов (вариантов ОС).

Примером реализации таких комплексов может служить двойникование кристаллов ромбоэдрического R-мартенсита в никелиде титана [17]. Ромбоэдрическая структура R-мартенсита может быть получена растяжением исходной B2-кубической решетки аустенита вдоль одной из пространственных диагоналей куба (направления $\langle 111 \rangle$). У куба

4 пространственные диагонали, следовательно, и эквивалентных вариантов ОС между решетками аустенита и R-мартенсита также будет 4. Решетка R-мартенсита двойнируется по плоскостям типа $\{100\}_R$, практически параллельным (в силу малости ромбоэдрической дисторсии) плоскостям аустенита с теми же индексами $\{100\}_{B2}$. Поскольку все возможные варианты ОС включены в комплекс, то он с очевидностью будет самоаккомодационным.

СА-комплекс R-мартенсита представляет собой октаэдр, построенный из двух соединенных основаниями четырехугольных пирамид. Расположение доменов в экваториальном сечении (по плоскости двойнирования, параллельной плоскости $(001)_{B2}$) и в двух других сечениях — по плоскостям двойнирования, параллельным плоскостям $(100)_{B2}$ и $(010)_{B2}$, проходящим через ребра октаэдра, приведено на рис. 2.

Ансамбли мартенситных кристаллов, соответствующие подгруппам из четырех операторов симметрии, наблюдались экспериментально, и их можно рассматривать как результат усложнения исходных ансамблей двойников с одной плоскостью двойнивания. При этом можно выявить два пути усложнения:

- последовательное разбиение кристаллов мартенсита: двойнивание по первой плоскости формирует так называемые «грубые» двойники, внутри которых происходит двойнивание по второй плоскости, приводящее к формированию «тонких» двойников. Таким путем идет релаксация напряжений в сплавах на основе γ -Mn [11, 18];

- двойнивание кристаллов ансамбля или присоединение подходящих доменов с последующим замыканием в СА, подобный комплексам кристаллов R-мартенсита в сплавах системы Ti-Ni [17] или мартенсита 18R в Cu-Al-Ni [14] и Cu-Al-Mn [19] (подробные схемы приведены в нашей работе [10]). Отметим, что мартенсит 18R, в отличие от R-мартенсита в никелиде титана, имеет 24 кристаллографически эквивалентных варианта ОС. В этом случае 24 домена сгруппированы в 6 СК, подобных комплексам в никелиде титана, по 4 домена в каждом.

2.4. Подгруппы, содержащие недвойнирующие операторы

Подгруппы из шести операторов являются простейшими из вышеназванных подгрупп. Например, подгруппа $\{\hat{E}, \hat{S}_6, \hat{S}_8, \hat{S}_{10}, \hat{S}_{11}, \hat{S}_{12}\}$, наряду с двойнивающими, содержит 2 недвойнивающих оператора. Ей также можно поставить в соответствие комплекс сдвойникованных доменов — «шестерик», схема одного из вариантов которого представлена на рис. 3, а. Комплекс сформирован с помощью трех плоскостей двойнивания (операторы $\hat{S}_6, \hat{S}_8, \hat{S}_{10}$), пересекающихся по направлению $[111]_A$.

Подгруппы из восьми операторов симметрии также включают двойнирующие и недвойнивающие

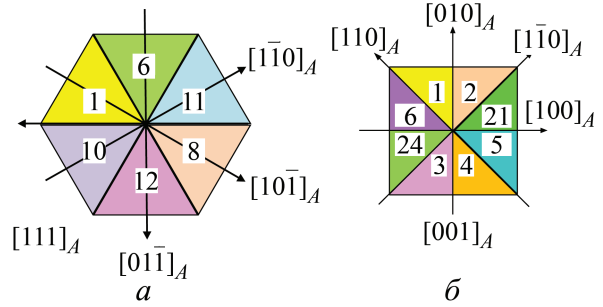


Рис. 3. «Шестерик» — комплекс, построенный с помощью трех плоскостей двойнивания с углом между ними 60° (а) и «восьмерик» — комплекс, построенный с помощью двух плоскостей двойнивания с углом между ними 45° (б)

операторы симметрии. Так, подгруппа $\{\hat{E}, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4, \hat{S}_5, \hat{S}_6, \hat{S}_{21}, \hat{S}_{23}\}$ содержит 5 двойнивающих и 2 недвойнивающих оператора. Данной подгруппе соответствует комплекс сдвойникованных доменов — «восьмерик», схема одного из вариантов которого представлена на рис. 3, б. Комплекс сформирован с помощью четырех плоскостей двойнивания, пересекающихся вдоль одной прямой, параллельной направлению $[001]_A$ кубической решетки аустенита.

В рассмотренном случае СК получен путем последовательного действия четырех операторов $\hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_5, \hat{S}_6$ с плоскостями двойнивания, параллельными плоскостям симметрии аустенита $(100), (010), (110), (1\bar{1}0)$; эти плоскости перпендикулярны плоскости рис. 3. Но можно воспользоваться и пятым двойнивающим оператором, также входящим в данную подгруппу, — оператором $\hat{S}_4 = \hat{S}_3\hat{S}_2$. Ему соответствует плоскость двойнивания, параллельная плоскости симметрии аустенита (001) . Эта плоскость совпадает с плоскостью рисунка, разделяя комплекс на две части — нижнюю и верхнюю. При этом отличие в расположении доменов в верхней и нижней частях СК коснется лишь конкретных номеров доменов, подобно описанному выше для «четверика».

3. Морфология самоаккомодационных комплексов

Привязка плоскостей двойнивания мартенсита к плоскостям симметрии кубической решетки аустенита позволяет разобраться в двойниковой структуре мартенситных кристаллов. При этом следует подчеркнуть, что при фиксированной системе плоскостей двойнивания и плоскостей габитуса внешний вид сформировавшихся ансамблей мартенситных кристаллов может отличаться коренным образом. В случае мартенситного превращения под нагрузкой решающее влияние на морфологию кристаллов мартенсита оказывают поля внешних напряжений, в частности их анизотропия.

Но в случае термически активированного мартенситного превращения эволюция мартенситных

кристаллов в процессе роста и конечная их морфология более предсказуемы. При анализе следует учитывать сингонию кристаллической решетки мартенситной фазы (возможна любая сингония), и это может решающим образом влиять на строение СК. Действительно, формирование СК типа «четверик», «шестерик» и «восьмерик» требует последовательного двойничкования по двум, трем или четырем плоскостям решетки мартенсита, составляющим друг с другом строго определенные углы. Эти углы в 90, 60 и 45° диктуются кубической решеткой аустенита (во всех сплавах с памятью формы аустенит имеет кубическую решетку). Поэтому само наличие нескольких плоскостей двойничкования решетки мартенсита, составляющих между собой указанные углы, для низкосимметричных решеток — факт экстраординарный. Двойничкование кристаллов происходит по вполне определенной системе кристаллографических плоскостей, реже — по двум разным системам плоскостей, а количество кристаллографически эквивалентных плоскостей типа (HKL), т.е. фактор повторяемости, также зависит от сингонии решетки мартенсита.

Число разных плоскостей двойничкования решетки мартенсита, параллельных плоскостям симметрии аустенита, обычно не превышает двух–трех. Исключение могут составлять лишь случаи мартенситных превращений дисторсионного типа (например, сплавы Mn–Ni, в которых орторомбическая дисторсия приводит к возможности двойничкования по 6 плоскостям {110} [4]).

Заключение

В сплавах с термоупругим мартенситным превращением предложена схема анализа морфологических особенностей ансамблей мартенситных кристаллов, основанная на привязке плоскостей двойничкования мартенсита к плоскостям симметрии аустенита. Показано, что СК, наблюдаемым в сплавах на основе меди, марганца, никелида титана (R-мартенсит), можно поставить в соответствие простейшие подгруппы группы операторов симметрии кубической решетки аустенита.

Приложение 1. Операторы симметрии решетки аустенита и их собственные векторы (оси поворота)

$$\begin{aligned} \widehat{S}_1 &= \widehat{E}; & \widehat{S}_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_4 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_5 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_6 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{S}_7 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_8 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_9 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{10} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{14} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{15} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{16} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{17} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{18} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{19} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{20} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\ \widehat{S}_{23} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; & \widehat{S}_{24} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Приложение 2. Таблица умножения двойниющих операторов симметрии

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	E	4	3	24	21	20	23	10	9
3	4	E	2	21	24	8	7	22	19
4	3	2	E	6	5	23	20	19	22
5	21	24	6	E	4	13	15	16	14
6	24	21	5	4	E	17	12	18	11
7	23	8	20	14	18	E	3	17	13
8	20	7	23	16	11	3	E	15	12
9	10	19	22	15	17	18	16	E	2
10	9	22	19	13	12	14	11	2	E

Список литературы

1. Хунджуа А.Г., Сорокин А.В., Чернов Е.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. № 5. С. 86. (Khundjua A.G., Sorokin A.V., Chernov E.V. // Moscow University Phys. Bull. 1991. 46, № 5. P. 83.)

2. Хунджиа А.Г., Бровкина Е.А., Птицын А.Г. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 6. С. 25. (Khundjua A.G., Brovkina E.A., Ptitsyn A.G. // Moscow University Phys. Bull. 2008. **63**, № 6. P. 393.)
3. Хунджиа А.Г., Птицын А.Г., Бровкина Е.А., Шао-тао Чжэн // ФММ. 2012. **113**, № 11. С. 1093. (Khundjua A.G., Ptitsyn A.G., Brovkina E.A., Chzhen S. // Physics of Metals and Metallography. 2012. **113**, N 11. P. 1035.)
4. Хунджиа А.Г., Бровкина Е.А., Шао-тао Чжэн // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 3. С. 27. (Khundjua A.G., Brovkina E.A., Shaotao Zheng // Moscow University Phys. Bull. 2010. **65**, N 3. P. 184.)
5. Лободюк В.А., Эстрин Э.И. Мартенситные превращения. М., 2009.
6. Soejima Y., Motomura S., Mitsuhara M. et al. // Acta Materialia 2016. **103**. P. 352.
7. Nishida M., Nishiura T., Kawano H., Inamura T. // Philos. Mag. 2012. **92**. P. 2215.
8. Nishida M., Okunishi E., Nishiura T. et al. // Philos. Mag. 2012. **92**. P. 2234.
9. Inamura T., Nishiura T., Kawano H. et al. // Philos. Mag. 2012. **92**. P. 2247.
10. Хунджиа А.Г., Бровкина Е.А., Мельников М.М., Птицын А.Г. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 6. С. 90. (Khundjua A.G., Brovkina E.A., Melnikov M.M., Ptitsyn A.G. // Moscow University Phys. Bull. 2014. **69**, N 6. P. 529.)
11. Винтайкин Е.З., Удовенко В.А., Литвин Д.Ф. и др. // Изв. вузов. Физ. Астрон. 1985. № 5. С. 104.
12. Nosova G., Vintaikin E. // Scr. Mater. 1999. **40**, № 3. P. 347.
13. Бойко В.С., Гарбер Р.И., Косевич А.М. Обратимая пластичность кристаллов. М., 1991.
14. Ооцука К., Симидзу К., Судзуки Ю. и др. Сплавы с эффектом памяти формы / Пер. с японского. М., 1990.
15. Otsuka K., Wayman C.M. Shape Memory Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
16. Asanovic V., Delijic K., Jaukovic N. // Scr. Mater. 2008. **58**, N 7. P. 599.
17. Сплавы никелида титана с памятью формы. Ч. 1. Структура, фазовые превращения и свойства / Под ред. В.Г. Пушина. Екатеринбург, 2006.
18. Shusong T., Huibin X. // Continuum Mech. and Thermodyn. 1990. **2**, N 4. P. 241.
19. Aldırmaz E., Aksoy I. // Arab J. Sci. Eng. (Arabian Journal for Science and Engineering). 2014. **39**. P. 575.

Symmetry groups of the austenite lattice and construction of self-accommodation complexes of martensite crystals in alloys with the shape-memory effect

A. G. Khundjua^a, A. G. Ptitsin^b, E. A. Brovkina^c

Department of Solid State Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^akhundjua@mail.ru, ^bsenyabird@yandex.ru, ^cel-brov@yandex.ru.

The internal structure of experimentally observed self-accommodation complexes of martensite crystals, which is determined by the system of twinning planes, is studied in this work. The direct correlation of the construction type of the complexes with the subgroups of the austenite lattice symmetry group is shown.

Keywords: shape-memory effect, martensite transformations, twinning, crystal lattice symmetry of austenite and martensite, self-accommodation complexes, symmetry operators, subgroups of symmetry groups.

PACS: 61.50.ks.

Received 11 February 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 1. Pp. 101–106.

Сведения об авторах

1. Хунджиа Андрей Георгиевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-30-26, (495) 939-23-87, e-mail: khundjua@mail.ru.
3. Птицын Арсений Григорьевич — вед. электроник; тел.: (495) 939-30-26, (495) 939-23-87, e-mail: senyabird@yandex.ru.
3. Бровкина Елена Анатольевна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-73, (495) 939-23-87, e-mail: el-brov@yandex.ru.