ОБЗОРЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 2. Приложения

Ю. П. Пытьев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра кафедра математического моделирования и информатики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com

Статья поступила 26.08.2016, подписана в печать 26.09.2016.

Рассмотрены приложения предложенного в [36] математического формализма субъективного (суб.) моделирования, основанного на моделировании неопределенности, отражающей недостоверность субъективной информации и нечеткости, характерной для ее содержания.

Определена и исследована суб. модель вероятностной случайности. Показано, что модельер-исследователь (МИ) определяет суб. модель *дискретного* вероятностного пространства (вер. пр.) *как пространство с правдоподобием и доверием*, которое де-факто оказывается суб. моделью *класса суб. эквивалентных* вер. пр., моделирующих произвольно эволюционирующий стохастический объект (Э. Ст. О.), суб. моделью которого служит это же пространство с правдоподобием и доверием. Этот факт позволяет восстановить суб. модель Э. Ст. О., причем безошибочно и на основе конечного числа событийно-частотных наблюдений, в то время как его вероятностная модель не может быть восстановлена эмпирически. Аналогичная связь установлена между классами взаимно эквивалентных распределений подобий, доверий и классом *плотностей суб. эквивалентных абсолютно непрерывных* вероятностей. Для двух вариантов мер правдоподобия и доверия определены и исследованы энтропии распределений правдоподобия и доверия значений неопределенного элемента (НОЭ) $\widetilde{x}$, моделирующего суб. суждения МИ, как характеристик информативности и неопределенности его суждений. Показано, что в первом варианте энтропии обладают свойствами, формально подобными свойствам шенноновской энтропии (ш. э.), но в силу отсутствия закона больших чисел (ЗБЧ) их интерпретация существенно отличается от интерпретации ш. э. В третьем варианте есть аналог ЗБЧ и для математического ожидания *суб. информативности/неопределенности* получена его связь с ш. э.

Рассмотрена суб. модель $M(\widetilde{x}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;\widetilde{x}),\ \mathrm{N}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;\widetilde{x}))$ неопределенного нечеткого объекта, получено и исследовано оптимальное субъективное правило идентификации его состояний по данным наблюдений. Рассмотрены методы экспертного построения моделей нечеткого и неопределенного нечеткого элементов.

Ключевые слова: вероятность, случайность, возможность, необходимость, нечеткость, правдоподобие, доверие, неопределенность.

УДК: 517.977.14. PACS: 07.05.Kf.

Введение

В статье рассмотрены некоторые приложения математического формализма субъективного моделирования [36]. В разд. 1 исследованы методы субъективного (суб.) моделирования вероятностной случайности, свойственной данным наблюдений за эволюционирующим стохастическим объектом (Э. Ст. О.). В п. 1.1 показано, что суб. моделью дискретного вероятностного пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr})$ является заданное МИ неопределенное пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверие $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ максимально согласованы с Pr. Поскольку все вероятности Pr, с каждой из которых максимально согласованы $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, образуют класс суб. эквивалентных вероятностей, то $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ является суб. моделью Э. Ст. О., в вероятностной модели которого вероятность *произвольно эволюционирует* в пределах класса суб. эквивалентных. Показано, что суб. модель такого Э. Ст. О. при естественных условиях может быть безошибочно восстановлена на основе почти наверное (п. н.) конечного числа событийно-частотных наблюдений, в то время как вероятность в его вероятностной модели может быть восстановлена лишь с точностью до включения в класс суб. эквивалентных.

В п. 1.2 рассмотрена суб. модель $(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{Pl}, \mathrm{Bel})$ абсолютно непрерывного вероятностного пространства $(\mathcal{R}^n, \mathcal{L}^{(n)}, \mathrm{Pr})$, в которой распределения Pl и Bel *субъективно согласованы* с *плотно-*

стью Pr (распределения Pl и Bel измеримы относительно максимальной сигма-подалгебры $\mathcal{L}^{(n)}$, относительно которой измерима плотность Pr). Показано, что и в этом случае суб. модель, единственная с точностью до эквивалентности, является таковой для каждой вероятностной модели из класса суб. эквивалентных, что позволяет суб. моделировать Э. Ст. О., в вероятностной модели которого вероятность *произвольно эволюционирует* в пределах класса суб. эквивалентных.

В п. 1.3 рассмотрена суб. модель вероятностной случайности в третьем варианте мер правдоподобия и доверия, которые наследуют некоторые черты вероятности и психофизики, в частности закон больших чисел (ЗБЧ), наличие которого существенно для свойств энтропий шенноновского типа распределений правдоподобий и доверий. В этом пункте рассмотрены меры правдоподобия Pl' и доверия Bel', максимально согласованные с дискретной вероятностью, и исследованы классы Γ'-эквивалентных правдоподобий. Полученные результаты использованы в п. 2, посвященном исследованиям информативности и неопределенности суб. суждений МИ.

В п. 2.1 рассмотрена шенноновская энтропия как мера средней относительной неопределенности и средней относительной информативности данных случайных наблюдений и ее связь с ЗБЧ. В п. 2.2 исследована проблема информативности/неопределенности суб. суждений как информативности/неопределенности энтропий суб. распределений значений НОЭ $\widetilde{x}$, моделирующего суждения МИ. Определена и исследована пара энтропий, формально аналогичных шенноновской, названных информативностью/неопределенностью неопределенного высказывания (но. в.). Показано, что энтропии обладают свойствами, формально подобными свойствам шенноновской энтропии, но в силу отсутствия ЗБЧ в первом варианте мер правдоподобия и доверия их содержательная интерпретация существенно отличается от интерпретации шенноновской информации, оценивающей число «типичных последовательностей» событий как носителей информации.

В п. 2.3 определены и исследованы энтропии суб. распределений НОЭ $\widetilde{x}$ в третьем варианте мер правдоподобия и доверия и их аналоги, основанные на ЗБЧ, индуцированном вероятностным ЗБЧ для вероятности, суб. моделью которой является неопределенное пространство. Показано, что в этом случае свойства энтропий аналогичны свойствам шенноновской энтропии, а для энтропии, определенной индуцированным ЗБЧ как математическое ожидание меры субъективной информативности/неопределенности, получено равенство, связывающее математическое ожидание меры субъективной информативности/неопределенности с шенноновской энтропией.

В разд. 3 рассмотрена оптимизация суб. решения в задаче идентификации состояния неопределенного нечеткого объекта, моделью которого является нечеткое пространство, зависящее от значения неизвестного параметра, определяющего его состояние[1].

В разд. 4 рассмотрено экспертное построение распределений нечеткого и неопределенного нечеткого элементов.

1. Субъективное моделирование вероятностной случайности

1.1. Дискретная вероятностная модель

Речь пойдет о вероятностной случайности, свойственной произвольно эволюционирующему стохастическому объекту (Э. Ст. О.), моделью которого в каждый момент времени является некоторое вероятностное пространство $(X,\ \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X) = (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}^{\xi})$, в котором $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, ξ — случайный элемент (сл. э.) со значениями в X, *канонический* для $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$: $\mathrm{Pr}_X(A) = \mathrm{Pr}^{\xi}(\xi \in A)$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}_X(\{x_i\}) = \mathrm{Pr}^{\xi}(\xi = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = 1$, — распределение вероятностей его значений. Условимся, что

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots\ . \tag{1}$$

МИ *задает субъективную* модель сл. э. ξ как НОЭ $\widetilde{x}$ со значениями в X, *максимально согласованный* с ξ (см. определение 1.1), и намерен построить его модель как пространство $(X, \mathcal{P}(X),\ \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X) = (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с правдоподобием Pl и доверием Bel, которое будет и его *субъективной моделью вероятностной случайности*, задав распределения правдоподобий и доверий $\mathrm{pl}_i = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x_i) = t^{\widetilde{x}}(x_i)$ и $\mathrm{bel}_i = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x_i) = \widetilde{t}^{\widetilde{x}}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, значений $\widetilde{x}$, и соответственно (см. [36, п. 1.1]) определив

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pl}_X(A) &= \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A) = \mathop{\widetilde{+}}_{i:\ x_i \in A} t^{\widetilde{x}}(x_i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\
&\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{i:\ x_i \in A} t^{\widetilde{x}}(x_i) = \mathop{\widetilde{+}}_{i:\ x_i \in A} \mathrm{pl}_i, \\
\mathrm{Bel}_X(A) &= \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A) = \mathop{\widehat{\widetilde{+}}}_{i:\ x_i \in X \setminus A} \widetilde{t}^{\widetilde{x}}(x_i) = \\
&= \inf_{i:\ x_i \in X \setminus A} \widetilde{t}^{\widetilde{x}}(x_i) = \mathop{\widehat{\widetilde{+}}}_{i:\ x_i \in X \setminus A} \mathrm{bel}_i.
\end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] Заметим, что рассмотренные в [37] нечеткие задачи идентификации п. 1.1–1.3 и оценивания в п. 1.4–1.6 заменой мер P и N на меры Pl и Bel превращаются соответственно в субъективные задачи: идентификации состояния объекта, субъективная модель которого зависит от неизвестного параметра, и оценивания характеристики объекта, модель которого задана как субъективная. Их решения будут подобны найденным в [37], но характерны для п. 3 настоящей статьи. Читателю рекомендуется эти задачи поставить и получить их решения.

Сначала рассмотрим случай, в котором вероятность Pr_X известна. Поскольку естественно, что[1] $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i \geqslant \mathrm{pl}_j$, то для упорядоченности распределения правдоподобий значений НОЭ $\widetilde{x}$ МИ *принимает согласованное с упорядоченностью* (1) условие

$$1 = \overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} \mathrm{pl}_i = \sup_i \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_1 \geqslant \mathrm{pl}_2 \geqslant \ldots, \tag{3}$$

в котором *каждая конкретная упорядоченность, заданная только равенствами и строгими неравенствами*, определенными двоичным числом $e = 0, e_1, e_2, \ldots \in (0,1)$, согласно правилу $e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1}$, $e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, выделит в (3) *класс взаимно эквивалентных* мер правдоподобия, распределенных согласно числу e, обозначим его $\mathbb{Pl}_{(e)}$; классы вероятностей и правдоподобий, удовлетворяющих условиям (1) и (3), обозначим $\mathbb{Pr}$ и $\mathbb{Pl}$. Так как $\mathbb{Pl}_{(e)} \cap \mathbb{Pl}_{(e')} = \varnothing$, если $e \neq e'$, то

$$\mathbb{Pl} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{Pl}_{(e)} \tag{4}$$

— разбиение класса $\mathbb{Pl}$ правдоподобий, распределенных согласно (3) на классы $\mathbb{Pl}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, *взаимно эквивалентных правдоподобий* (ср. с [1, п. 1.2]).

Согласно равенствам (2) для правдоподобия и равенствам $\mathrm{Pr}_X(E) = \sum\limits_{i:\, x_i \in E} \mathrm{pr}_i$, $E \neq \varnothing$, $\mathrm{Pr}_X(\varnothing) = 0$, для вероятности определим подмножества $\mathcal{P}_i(X) \subset \mathcal{P}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$:

- $\mathcal{P}_1(X) = \{A \in \mathcal{P}(X), x_1 \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}_1(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_1 = 1$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_1 = [\mathrm{pr}_1, 1]$, где Δ_1 — минимальный по включению интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}_X(A)$;
- $\mathcal{P}_2(X) = \{A \in \mathcal{P}(X), x_1 \notin A, x_2 \in A\}$ $\forall A \in \mathcal{P}_2(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_2$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_2 = [\mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_1]$, где Δ_2 — минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}_X(A)$;
- $\mathcal{P}_i(X) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), x_1 \notin A, \ldots, x_{i-1} \notin A, x_i \in A\}$ $\forall A \in \mathcal{P}_i(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_i$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}]$, где Δ_i — минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}_X(A)$, $i = 3, 4, \ldots$; понятно, что
- $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_2(X) \cup \ldots$, $\mathcal{P}_i(X) \cap \mathcal{P}_j(X) = \varnothing$, $i \neq j$.

Поскольку $\forall A \in \mathcal{P}_i(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_i$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\forall \mathrm{Pr}_X \in \mathbb{Pr}$ $\exists \ddot{\gamma}(\cdot) \in \ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X) \subset \ddot{\Gamma}$ $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \ddot{\gamma}(\mathrm{Pr}_X(A))$, где $\ddot{\Gamma}$ — класс монотонных функций $\ddot{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\ddot{\gamma}(0) = 0$, $\ddot{\gamma}(1) = 1$, в котором функция $\ddot{\gamma}(\cdot)$ определяет *согласованность* Pl_X с Pr_X и удовлетворяет условиям $\ddot{\gamma}(a) = \mathrm{pl}_i$, $a \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$ (ср. с [1, п. 2.1]).

Определение 1.1. Правдоподобие Pl_X назовем *максимально согласованным* с вероятностью Pr_X (обозначение $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$), если функция $\ddot{\gamma}(\cdot) \in \ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$ выбрана так, что $\mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing \Leftrightarrow f_i \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1$, и $\mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow f_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Соответственно НОЭ $\widetilde{x}$ назовем *максимально согласованным* со сл. э. ξ, $\xi \approx> \widetilde{x}$.

Теорема 1.1.

- *Для любого* $e \in (0,1)$ *классу* $\mathbb{Pl}_{(e)} \in \mathbb{Pl}$ *эквивалентных правдоподобий* Pl_X *взаимно однозначно соответствует класс* $\mathbb{Pr}_{(e)} \in \mathbb{Pr}$ *субъективно эквивалентных вероятностей* Pr_X, *определенный условиями*

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1,\\ &e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i \leqslant 1, \end{aligned} \tag{5}$$

$i = 1, 2, \ldots$, *а разбиению* (4) *соответствует разбиение* $\mathbb{Pr} = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathbb{Pr}_{(e)}$, $\mathbb{Pr}_{(e)} \cap \mathbb{Pr}_{(e')} = \varnothing$, $e \neq e'$, *класса* $\mathbb{Pr}$ *вероятностей* Pr_X *на классы субъективно эквивалентных.*

- *Согласно условиям* (5), *для любых* $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{Pl}_{(e)}$ *и* $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{Pr}_{(e)}$: $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$ *найдется функция* $\gamma_e(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, *монотонно не убывающая и непрерывная на* $(0,1]$ *такая, что для любого* $A \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}_X(A) = \underset{i:\, x_i \in A}{+} \mathrm{pl}_i = \underset{i:\, x_i \in A}{+} \gamma_e(\mathrm{pr}_i) = = \gamma_e\Big(\sum_{i:\, x_i \in A} \mathrm{pr}_i\Big) = \gamma_e(\mathrm{Pr}_X(A)). \tag{6}$$

- *Класс* $\ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$ *таких функций* $\gamma_e(\cdot)$ *определяется вероятностью* $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{Pr}_{(e)}$, $e \in (0,1)$ (см. теорему 2.1 и рис. 1.2.3 в [39]).
- *В частности, НОЭ* $\widetilde{x}$ *в* (2) *максимально согласован со случайным элементом* ξ, *если согласно* (6) $\mathrm{pl}_i = \gamma_e(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\gamma_e(\cdot) \in \ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$.

По такой же схеме определяется и доверие Bel_X, максимально согласованное с вероятностью Pr_X, $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Bel}_X$, причем, как нетрудно убедиться, если $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$ и $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Bel}_X$, то меры Pl_X и Bel_X оказываются *дуально согласованными*, т. е. $\exists \theta(\cdot) \in \Theta$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Bel}_X(A) = \theta(\mathrm{Pl}_X(X \setminus A))$, $\mathrm{bel}_i = \theta(\mathrm{pl}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где Θ — класс строго монотонных непрерывных функций $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, символизирующих *нечеткое отрицание*: «доверие»(A) = не«правдоподобие»$(X \setminus A)$ (см. [1, замечание 1.1]). Поэтому упорядоченность (3) эквивалентна упорядоченности $0 = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\hat{+}}} \mathrm{bel}_i = \inf_i \mathrm{bel}_i \leqslant \mathrm{bel}_1 \leqslant \mathrm{bel}_2 \leqslant \ldots$, определяющей класс $\mathbb{Bel}$ доверий, а каждая конкретная упорядоченность, определенная равенствами и строгими неравенствами

[1] Заметим, что $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i \geqslant \mathrm{pl}_j \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_j, \\ \mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i \geqslant \mathrm{pl}_j, \end{cases}$ поэтому $\mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_j \Rightarrow \mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_j$, ибо импликация $\mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_j \Rightarrow \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j$ невозможна, так как влечет $\mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_j$.

и выделенная двоичным числом $e = 0{,}e_1e_2\ldots$ по правилу $e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{bel}_i < \mathrm{bel}_{i+1}$, $e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{bel}_i = \mathrm{bel}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, определит класс $\mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$ взаимно эквивалентных доверий и, подобно (4), $\mathbb{B}\mathrm{el} = \bigcup_{e\in(0,1)} \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$, $\mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)} \cap \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e')} = \varnothing$, $e \neq e'$.

Субъективной моделью вероятностной случайности, модель которой — вероятностное пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, является любое из эквивалентных пространств $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, если $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$, $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Bel}_X$. Более того, при этих условиях любое из эквивалентных пространств с правдоподобием Pl_X и доверием Bel_X будет субъективной моделью вероятностной случайности, модель которой — любое вероятностное пространство, субъективно эквивалентное[1] $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$; в этом случае меры Pl_X и Bel_X называются Pr_X-*измеримыми*, а *канонический для любого из пространств* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$ НОЭ $\widetilde{x}$ *является субъективной моделью* сл. э. ξ, *канонического для* любого из субъективно эквивалентных $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$; все такие НОЭ *взаимно эквивалентны* и любой из них $\widetilde{x}$ *максимально согласован со* сл. э. ξ, $\xi \approx> \widetilde{x}$ (см. последний пункт в теореме 1.1).

Свойства субъективной модели вероятностой случайности

①

$$\forall e \in (0,1)\, \forall \mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\, \forall \mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}\, \forall \mathrm{Bel}_X \in \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$$
$$\exists \gamma_e(\cdot) \in \ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)\;\; \exists \theta_e(\cdot) \in \ddot{\Theta}(\mathrm{Pr}_X)$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(X)\;\; \mathrm{Pl}_X(A) = \gamma_e(\mathrm{Pr}_X(A)),$$
$$\mathrm{Bel}_X(A) = \theta_e(\mathrm{Pr}_X(X \setminus A)), \quad (*)$$

где $\ddot{\Theta}(\mathrm{Pr}_X(\cdot)) = \theta\ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X(X\setminus\cdot))$, $\theta(\cdot) \in \Theta$. Поэтому *вероятностная случайность*, в модели которой $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(1)}) \times (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(2)}) \times \ldots$ вероятности $\mathrm{Pr}_X^{(1)}, \mathrm{Pr}_X^{(2)}, \ldots$ *субъективно эквивалентны*, т. е. содержатся в некотором *классе* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, имеет *единственную с точностью до эквивалентности субъективную модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, в которой меры $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X \in \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$, и называются $\mathrm{Pr}_X^{(1)}$-, $\mathrm{Pr}_X^{(2)}$-, …-*измеримыми*, а последней соответствует класс $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, вероятностных моделей, называемых *субъективно эквивалентными*, $e \in (0,1)$.

② Если $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(1)}) \times (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(2)}) \times \ldots$ — *модель последовательности взаимно независимых испытаний*, в которой среди вероятностей $\mathrm{Pr}_X^{(1)}, \mathrm{Pr}_X^{(2)}, \ldots$ конечное число k различных, причем $\mathrm{Pr}_X^t \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $t = 1, \ldots, k$, то $\forall \mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$, $\forall \mathrm{Bel}_X \in \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$ $\exists N$ $\forall n > N$ $\mathrm{Pl}_X(A) > \mathrm{Pl}_X(B) \Leftrightarrow \mathrm{Bel}_X(A) > \mathrm{Bel}_X(B) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \overset{\text{п. н.}}{>} \nu^{(n)}(B)$, где $\nu^{(n)}(A), \nu^{(n)}(B)$ — частоты событий A, B, наблюдаемых в последовательности n взаимно независимых испытаний. Этот факт, вытекающий из предыдущего свойства и теоремы 1.1, характеризует *событийно-частотную интерпретацию субъективной модели вероятностной случайности* (см. [1, теорема 3.1]).

③ Если в этой модели взаимно независимых испытаний $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, вероятности $\mathrm{Pr}_X^1, \ldots, \mathrm{Pr}_X^k$ *произвольно изменяются от испытания к испытанию* в *пределах некоторого класса* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, то результаты наблюдений за частотами элементарных событий $\{x_1\}, \ldots, \{x_m\}$ *не позволят восстановить вероятностную модель вероятностной случайности*, но при *условии* $f_i^t = \mathrm{pr}_1^t + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^t + 2\mathrm{pr}_i^t \neq 1$, $i = 1, \ldots, m$, *регулярности* $\mathrm{Pr}_X^{(t)}$, $t = 1, \ldots, k$, конкретные упорядоченности распределений pl_i, bel_i, $i \neq 1, \ldots, m$, (т. е. значение e) *будут восстановлены безошибочно на основе п. н. конечного числа испытаний* (см. [1, теорема 3.2]). Иными словами, в этом случае МИ свою *субъективную модель вероятностной случайности может восстановить эмпирически*, *причем безошибочно*, *на основе конечного числа событийно-частотных наблюдений*, *а вероятностную модель* может восстановить лишь с точностью до включения в класс субъективно эквивалентных. Заметим, что если вероятности не изменяются от испытания к испытанию, то МИ может восстановить и вероятностную модель, но при любом конечном числе испытаний — лишь приближенно.

Задача *эмпирического восстановления* субъективной модели вероятностной случайности в случае $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и вероятности Pr_X, удовлетворяющей условиям (1) и $f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i \neq 1$, $i = 1, \ldots, m$, эквивалентна статистической задаче проверки гипотез, в которой на основе частот $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}$ событий $\{x_1\}, \ldots, \{x_m\}$, наблюдаемых в последовательности $n = 1, 2, \ldots$ взаимно независимых испытаний, для каждого $i = 1, \ldots, m$ требуется принять одну из гипотез: либо $e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1$, либо $e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i < 1$.

Следующий адаптивный алгоритм решает простейшую задачу эмпирического восстановления субъективной модели вероятностной случайности.

Теорема 1.2. *Пусть для всех* $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}
&1)\ \textit{если}\ \ \widetilde{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n)}, \ \ \textit{то считать}\ \ e_i = 1,\\
&2)\ \textit{если}\ \ \widetilde{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n)}, \ \ \textit{то считать}\ \ e_i = 0,\\
&3)\ \textit{если}\ \ |\widetilde{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n)},\\
&\qquad \textit{то продолжить испытания}, \ \ n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\widetilde{f}_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^n + 2\nu_i^{(n)}$, $\nu_i^{(n)}$ — *частота исхода* $\{x_i\}$ *в последовательности* n *взаимно независимых испытаний*, $i = 1, \ldots, m$, $\delta^{(n)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}$, α — *верхняя граница вероятности ошибочных решений* 1, 2. *Тогда условие* 3 *выполняется для*

[1] Взаимно субъективно эквивалентными называются пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, взаимно эквивалентными называются пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X \in \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$.

п. н. конечного числа испытаний и алгоритм (7) *с вероятностью* $\geqslant 1-m\alpha$ *безошибочно восстанавливает* $e=0.e_1\dots e_m$ *и субъективную модель* $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}_X,\mathrm{Bel}_X)$, $\mathrm{Pl}_X\in\mathbb{Pl}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X\in\mathbb{Bel}_{(e)}$, *вероятностной случайности, отвечающей любой вероятности* $\mathrm{Pr}_X\in\mathbb{Pr}_{(e)}$.

В [1, 4, 29, 39] рассмотрен обобщающий (7) алгоритм, восстанавливающий с гарантированной вероятностью точную *субъективную модель* $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}_X,\mathrm{Bel}_X)$, $\mathrm{Pl}_X\in\mathbb{Pl}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X\in\mathbb{Bel}_{(e)}$, *каждого испытания* в случае ③ *произвольно изменяющихся субъективно эквивалентных вероятностей из* $\mathbb{Pr}_{(e)}$ (см. [1, теорема 3.3]).

Итак, субъективное моделирование вероятностной случайности *позволяет содержательно интерпретировать данные событийно-частотных наблюдений за эволюционирующим стохастическим объектом* (Э. Ст. О.), вероятностная модель которого произвольно эволюционирует в пределах некоторого класса субъективно эквивалентных моделей, и при условии регулярности их эволюционирующих вероятностей позволяет эмпирически безошибочно восстанавливать его субъективную модель на основе п. н. конечного числа событийно-частотных наблюдений за Э. Ст. О.

1.2. Абсолютно непрерывная вероятностная модель

Рассмотрим субъективное моделирование вероятностной случайности, вероятностной моделью которой является класс $\mathcal{P}r_{\mathcal{L}}(\omega)$ вероятностных пространств $(\mathcal{R}^n,\mathcal{L}^{(n)},\mathrm{Pr}^{(s)})$, $s(\cdot)\in S_\varphi$, в которых $\mathcal{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathcal{L}^{(n)}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств $A\subset\mathcal{R}^n$, $\mathrm{Pr}^{(s)}$ — абсолютно непрерывная относительно меры Лебега вероятность с плотностью $\rho^{(s)}(x)=s(\varphi(x))$, $x\in\mathcal{R}^n$, где $\varphi(\cdot)\colon\mathcal{R}^n\to[0,1]$ — непрерывная[1] функция, удовлетворяющая условиям $\max\limits_{x\in\mathcal{R}^n}\varphi(x)=1$ и $\exists\, a\in[0,1)$ $\{x\in\mathcal{R}^n,\ \varphi(x)\geqslant a\}$ — ограниченное множество, $s(\cdot)\colon[0,1)\to[0,\infty)$ — непрерывная, строго монотонно возрастающая функция, $s(0)=0$ и $\int\limits_{\mathcal{R}^n}s(\varphi(x))\,dx=1$, а S_φ — класс всех таких функций.

Классу $\mathcal{P}r$ сопоставим класс взаимно эквивалентных субъективных моделей $(\mathcal{R}^n,\mathcal{P}(\mathcal{R}^n),\mathrm{Pl}^{(\gamma)},\mathrm{Bel}^{(\theta)})$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, $\theta(\cdot)\in\Theta$, где правдоподобие $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и доверие $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$ заданы их распределениями $t^{(\gamma)}(x)=\gamma(\varphi(x))$, $x\in\mathcal{R}^n$, и $\widehat{t}^{(\theta)}(x)=\theta(\varphi(x))$, $x\in\mathcal{R}^n$.

В [3, п. 2.6] показано[2], что $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, *максимально* согласованные с любой вероятностью $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s(\cdot)\in S_\varphi$, не несут информации о $\mathrm{Pr}^{(s)}$ в том смысле, что $\forall A\in\mathcal{L}^{(n)}$ $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}(A)>0\Rightarrow\mathrm{Pl}^{(\gamma)}(A)=1$, $\mathrm{Bel}^{(\theta)}(A)<1\Rightarrow\mathrm{Bel}^{(\theta)}(A)=0$. Такая нечеткая модель свидетельствует об «абсолютном незнании» вероятностной модели. Поэтому *согласованность* классов $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, $\theta(\cdot)\in\Theta$, с классом $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s(\cdot)\in S_\varphi$, естественно определить не как *максимальную*, а как *субъективную согласованность классов распределений* $(\gamma\circ\varphi)(\cdot)$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, и $(\theta\circ\varphi)(\cdot)$, $\theta(\cdot)\in\Theta$ (классов взаимно эквивалентных $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, $\theta(\cdot)\in\Theta$) *с классом плотностей* $\rho^{(s)}(\cdot)=(s\circ\varphi)(\cdot)$, $s(\cdot)\in S_\varphi$, *на максимальной σ-алгебре* $\mathcal{A}_\varphi\subset\mathcal{L}^{(n)}$, *относительно которой измерима функция* $\varphi(\cdot)$, а следовательно, и все функции $(\gamma\circ\varphi)(\cdot)$, $(\theta\circ\varphi)(\cdot)$ и $(s\circ\varphi)(\cdot)$, $s(\cdot)\in S_\varphi$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, $\theta(\cdot)\in\Theta$. Соответственно *субъективной моделью* любой вероятностной случайности, модель которой $(\mathcal{R}^{(n)},\mathcal{A}_\varphi^{(n)},\mathrm{Pr}^{(s)})$ может произвольно эволюционировать в пределах класса $\mathcal{P}r$, является любое из взаимно эквивалентных пространств с правдоподобием и доверием $(\mathcal{R}^n,\mathcal{P}(\mathcal{R}^n),\mathrm{Pl}^{(\gamma)},\mathrm{Bel}^{(\theta)})$, $\gamma\in\Gamma$, $\theta\in\Theta$.

Такое определение субъективной согласованности классов $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, $\theta(\cdot)\in\Theta$, с классом $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s(\cdot)\in S_\varphi$, *обусловлено* тем, что на любом множестве $A_c=\{x\in\mathcal{R}^n,\ \gamma(\varphi(x))=\gamma(c)\}=\{x\in\mathcal{R}^n,\ \theta(\varphi(x))=\theta(c)\}$, $c\in[0,1]$, на котором постоянны значения распределений $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, постоянны и значения плотности вероятности $\mathrm{Pr}^{(s)}$: $\rho^{(s)}(x)=s(\varphi(x))=s(c)$, $x\in A_c$. Сравнительный анализ качества вероятностных и субъективно с ними согласованных нечетких моделей (эквивалентных субъективным моделям в этом пункте!) интерпретации данных измерительного эксперимента представлен на рис. 1 в [37].

Пусть, например, $\rho^{(s)}(x)=(2\pi)^{-n/2}\det\Sigma^{-1/2}\times\exp\bigl(-\frac12\|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\|^2\bigr)$, $x\in\mathcal{R}^n$, — гауссовская плотность, $\varphi(x)=f(\|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\|^2)$, где $f(\cdot)\colon[0,\infty)\to[0,1]$, непрерывна, строго монотонно убывает, $f(0)=1$, $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$. Тогда класс $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s\in S_\varphi$, включает: гауссовскую вероятность, t-распределение с k степенями свободы с плотностью $\mathrm{const}\bigl[1+\frac1k\|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\|^2\bigr]^{-(k+n)/2}$, $x\in\mathcal{R}^n$, $\mathrm{const}=\frac{\Gamma((n+k)/2)\det\Sigma^{-1/2}}{\Gamma(k/2)(k\pi)^{n/2}}$ и др.

1.3. Субъективная модель вероятностной случайности в третьем варианте мер правдоподобия и доверия

Рассмотрим классы взаимно эквивалентных правдоподобий в третьем варианте, максимально согласованные с классами субъективно эквивалентных вероятностей.

Так как в первом (см. [36, п. 1.1]), во втором (см. [3]) и в третьем (см. [36, п. 1.9.2]) вариантах мер правдоподобий Pl' и Pl операции сложения

[1] Далее все функции наделяются качествами, позволяющими не отвлекаться на исследование математических проблем, не относящихся к сути рассматриваемой задачи моделирования.

[2] В [3, п. 2.6] это показано для возможности и необходимости (см. [1]), формально эквивалентных $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$.

$+'$ и $+$ в шкалах L' и L их значений определены одинаково: $a+'b = a+b = \max\{a,b\}$, $a,\, b \in [0,1]$, то условия, *определяющие максимальную согласованность* Pl' с Pr в третьем варианте, могут быть сформулированы так, как в определении 1.1 сформулированы условия максимальной согласованности Pl с Pr, если в определении 1.1 Pl заменить на Pl', Γ — на Γ', $\ddot{\gamma}$ — на $\ddot{\gamma}'$ и $\ddot{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ — на $\ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$. При этом, как и в определении 1.1,

$$\ddot{\gamma}'(a) = \mathrm{pl}'_i, \quad a \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{i-1}],$$
$$\mathrm{pl}'_i > \mathrm{pl}'_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing,$$
$$\mathrm{pl}'_i = \mathrm{pl}'_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

и подобно (6) $\forall A \in \mathcal{P}(X)\ \ \exists \ddot{\gamma}'(\cdot) \in \ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$

$$\mathrm{Pl}'(A) = \sup_{i:\, x_i\in A} \mathrm{pl}'_i = \sup_{i:\, x_i\in A} \ddot{\gamma}'(\mathrm{pr}_i) = \ddot{\gamma}'(\sup_{i:\, x_i\in A} \mathrm{pr}_i) =$$
$$= \ddot{\gamma}'(\sum_{i:\, x_i\in A} \mathrm{pr}_i) = \ddot{\gamma}'(\mathrm{Pr}(A)). \tag{9}$$

Однако теперь, в отличие от первого варианта (см. [36, п. 1.9.2]), $\forall \ddot{\gamma}'(\cdot) \in \ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$

$$\ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr}) = \{\gamma' \circ \ddot{\gamma}'(\cdot),\ \gamma'(\cdot) \in \Gamma'\} = \{(\ddot{\gamma}')^{\alpha}(\cdot),\ \alpha > 0\} \tag{10}$$

и этот факт позволит построить класс $\ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$.

Идею построения класса $\ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$ рассмотрим на примере $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ для вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, удовлетворяющей условиям $2\mathrm{pr}_1 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1$, $\mathrm{pr}_4 > 0$, $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_4 = 1$, согласно которым в (8) $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$, $i = 1,2,3$; взаимно эквивалентные правдоподобия в третьем варианте назовем Γ'-эквивалентными.

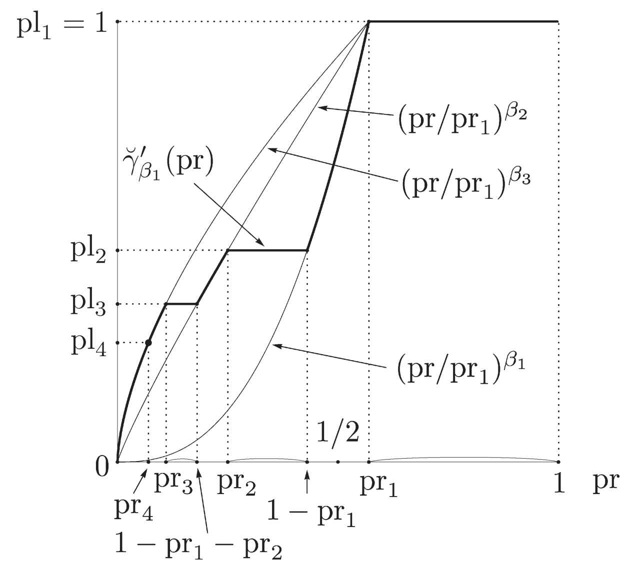

График функции $\ddot{\gamma}'(\cdot) \in \ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$, $\ddot{\gamma}'(\mathrm{pr}) = \ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Класс $\{\ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot),\ \beta_1 > 0\}$ определяет класс Γ'-эквивалентных правдоподобий, распределения которых $\mathrm{pl}_i^{\beta_1} = \ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\mathrm{pr}_i) = \left(\ddot{\gamma}'\big|_{\beta_1=1}(\mathrm{pr}_i)\right)^{\beta_1}$, $i = 1,2,3,4$, $\beta_1 > 0$, где функция $\ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)$ определена в (12) (ср. с [1, рис. 1])

Искомая функция $\ddot{\gamma}'(\cdot) \in \ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$, определяющая максимальную Γ'-согласованность Pl' с Pr, *задается* следующими условиями (см. рисунок):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pl}_1 = (\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = 1, \quad \beta_1 > 0, \quad \text{любое},\\
&\mathrm{pl}_2 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} = ((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} \Rightarrow\\
&\Rightarrow \beta_2 \ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1) = \beta_1 \ln((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1), \quad \beta_2 < \beta_1,\\
&\mathrm{pl}_3 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3} = ((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} \Rightarrow\\
&\Rightarrow \beta_3 \ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1) = \beta_2 \ln((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1), \quad \beta_3 < \beta_2,\\
&\mathrm{pl}_4 = (\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3},
\end{aligned} \tag{11}$$

согласно которым в (9) для $a \in [0,1]$

$$\ddot{\gamma}'_{\beta_1}(a) = \begin{cases}
\mathrm{pl}_1 = 1, \quad a \in [\mathrm{pr}_1, 1],\\
\quad (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1}, \quad a \in [1-\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1],\\
\mathrm{pl}_2, \quad a \in [\mathrm{pr}_2, 1-\mathrm{pr}_1],\\
\quad (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2}, \quad a \in [1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_2],\\
\mathrm{pl}_3, \quad a \in [\mathrm{pr}_3, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2],\\
\quad (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3}, \quad a \in [0, \mathrm{pr}_3],\\
\mathrm{pl}_4 = (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3},\\
\quad a \in [\mathrm{pr}_4, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2-\mathrm{pr}_3] = [\mathrm{pr}_4, \mathrm{pr}_4].
\end{cases} \tag{12}$$

В равенствах (11) значение $\beta_1 > 0$ выделяет одну из функций $\ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot) \in \ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr}) = \{\ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot),\ \beta_1 > 0\}$ в (12), второе равенство во второй строке в (11) связывает β_2 с β_1 и с Pr, второе равенство в третьей строке в (11) связывает β_3 с β_2 и с Pr. Однопараметрическое семейство функций $\ddot{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)$, $\beta_1 > 0$ (12), образует класс $\ddot{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$, отвечающий вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$ (см. рисунок).

Соотношения (11), (12) определяют *субъективную модель вероятностной случайности во втором и в третьем вариантах*.

Класс Γ'-эквивалентных правдоподобий определяется значениями Γ'-инвариантов

$$\pi_3 = \ln \mathrm{pl}_3 / \ln \mathrm{pl}_2,\ \pi_4 = \ln \mathrm{pl}_4 / \ln \mathrm{pl}_3,\ \pi_3 > 1,\ \pi_4 > 1. \tag{13}$$

Для любых фиксированных значений $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$ класс Γ'-эквивалентных правдоподобий, обозначим его $\mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, содержится в классе $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ Γ-эквивалентных правдоподобий, удовлетворяющих условию $1 = \mathrm{pl}_1 > \mathrm{pl}_2 > \mathrm{pl}_3 > \mathrm{pl}_4 > 0$ и, согласно (13), выделяется в $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ условиями $\mathrm{pl}_3 = \mathrm{pl}_2^{\pi_3}$, $\mathrm{pl}_4 = \mathrm{pl}_3^{\pi_4}$, определяющими в $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ кривую[1]

$$\mathrm{pl}_1 = 1, \quad \mathrm{pl}_3 = \mathrm{pl}_2^{\pi_3}, \quad \mathrm{pl}_4 = \mathrm{pl}_2^{\pi_4\pi_3}, \quad \mathrm{pl}_2 \in (0,1). \tag{14}$$

Двухпараметрическое семейство кривых (14), отвечающих значениям $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, исчерпывает класс $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ в том смысле, что через каждую точку $(\mathrm{pl}_1, \mathrm{pl}_2, \mathrm{pl}_3, \mathrm{pl}_4)$, $1 = \mathrm{pl}_1 > \mathrm{pl}_2 > \mathrm{pl}_3 > \mathrm{pl}_4 > 0$, проходит одна кривая (14) семейства, выделенная условием (13).

[1] $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$ обозначают как классы правдоподобий и вероятностей, так и классы их распределений.

Следовательно,

$$\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)} = \bigcup_{\substack{\pi_3>1,\\ \pi_4>1}} \mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)} \tag{15}$$

— *разбиение класса* $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ Γ*-эквивалентных возможностей на классы* $\mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, Γ'*-эквивалентных возможностей.*

Каждой кривой (14), определяющей класс $\mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ Γ'-эквивалентных возможностей, согласно (11), соответствует класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ субъективно эквивалентных вероятностей, содержащийся в классе $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$; $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ есть кривая в $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, определяемая, согласно условиям (11), (13), уравнениями

$$\begin{aligned} &\pi_3 = \ln \mathrm{pl}_3/\ln \mathrm{pl}_2 = \ln((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1),\\ &\pi_4 = \ln \mathrm{pl}_4/\ln \mathrm{pl}_3 = \ln(\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1), \end{aligned} \tag{16}$$

в которых

$$\begin{gathered} \mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+\mathrm{pr}_3+\mathrm{pr}_4=1,\quad 2\mathrm{pr}_1>1,\\ \mathrm{pr}_1+2\mathrm{pr}_2>1,\quad \mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+2\mathrm{pr}_3>1,\quad \mathrm{pr}_4>0. \end{gathered} \tag{17}$$

Между классами $\mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, согласно условиям (13), (16), имеется взаимно однозначное соответствие, определяющее максимальную согласованность $\mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, и разбиению (15) соответствует разбиение

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)} = \bigcup_{\pi_3>1,\,\pi_4>1} \mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}. \tag{15*}$$

Замечание 1.1. Автору неизвестны публикации по субъективному моделированию вероятностной случайности. Если читателя могут заинтересовать исследования по *субъективным вероятностям*, то очерк развития понятия субъективной вероятности дан в монографии [35], в сборнике [34] имеется обширная библиография по субъективным вероятностям. Однако эти исследования не связаны с субъективным моделированием вероятностной случайности.

2. Энтропии субъективных распределений правдоподобий и доверий значений неопределенного элемента (НОЭ)

2.1. Энтропия как усредненная мера информативности/неопределенности случайного исхода испытания

Как известно, энтропию $H(\mathrm{pr.})$ как меру средней относительной информативности/неопределенности случайного исхода испытания, модель которого — вероятностное пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr})$, $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, К. Шеннон определил равенством

$$H(\mathrm{pr.}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_i \log_a(1/\mathrm{pr}_i), \tag{18}$$

в котором $a > 1$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{x_i\})$, $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ — мера неопределенности[1] события $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, k$, $H(\mathrm{pr.})$ — ее математическое ожидание, называемое *энтропией распределения* $\mathrm{pr.} \sim \{\mathrm{pr}_1, \dots, \mathrm{pr}_k\}$.

Значение $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ можно интерпретировать и как меру относительного количества информации[2] в наблюдении исхода $\{x_i\}$ испытания, $i = 1, \dots, k$.

Заметим, что выражение для энтропии $H(\mathrm{pr.})$ (18) и ее содержательная интерпретация в значительной степени обусловлены законом больших чисел (ЗБЧ) [28]. Действительно, пусть $\nu_i^{(n)} = n_i/n$ — частота события $\xi_i = x_i$, $i = 1, \dots, k$, в последовательности $\zeta^{(n)}$ n взаимно независимых испытаний. Тогда вероятность такой последовательности $\mathrm{Pr}(\zeta^{(n)}) = \mathrm{pr}_1^{n_1}\dots\mathrm{pr}_k^{n_k} = a^{n\sum_{i=1}^{k}\nu_i^{(n)}\log_a \mathrm{pr}_i}$, а в силу ЗБЧ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon)$ $\forall n > n(\varepsilon)$ $\mathrm{Pr}^{\xi}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{|\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i| < \varepsilon\}\right) > 1 - \varepsilon$, где условия

$$|\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k, \tag{19}$$

выделяют среди всех реализаций n испытаний множество $D(\varepsilon, n)$ *«типичных реализаций»*, ибо вероятность $\mathrm{Pr}^{\xi}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{|\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i| \geqslant \varepsilon\}\right) = 1 - \mathrm{Pr}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{|\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i| < \varepsilon\}\right) < \varepsilon$ всех остальных реализаций при достаточно больших n можно считать сколь угодно малой. При этом согласно условиям (19) вероятность каждой «типичной реализации» $a^{n\sum_{i=1}^{k}\nu_i^{(n)}\log_a \mathrm{pr}_i} \in \left[a^{-n(H(\mathrm{pr.})-\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\log_a \mathrm{pr}_i)}, a^{-n(H(\mathrm{pr.})+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\log_a \mathrm{pr}_i)}\right]$ и при $\varepsilon \ll \min_{1\leqslant i\leqslant k}\mathrm{pr}_i$ сколь угодно близка к $a^{-nH(\mathrm{pr.})}$, а их число близко к $a^{nH(\mathrm{pr.})}$ и ровно столько же различных сообщений (информации) можно закодировать типичными последовательностями при достаточно большом n. Точнее, дело обстоит следующим образом [28].

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathrm{pr}_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, $0 < \varepsilon < 1$, $D(\varepsilon, n)$ — *множество реализаций длины* n, *удовлетворядщих условиям* (19), $N(D(\varepsilon, n))$ — *число реализаций в* $D(\varepsilon, n)$, $\mathrm{Pr}(\zeta^{(n)})$ — *вероятность реализации* $\zeta^{(n)} \in D(\varepsilon, n)$. *Тогда* $\exists n(\varepsilon)$ $\forall n > n(\varepsilon)$ $\exp(n(H-\varepsilon)) \leqslant N(D(\varepsilon_1, n)) \leqslant \exp(n(H+\varepsilon))$, $\zeta^{(n)} \in D(\varepsilon, n)$, *где* $H = H(\mathrm{pr.})$ *в* (18) *при* $a = e$, $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \varepsilon/(-2\sum_{i=1}^{k}\ln \mathrm{pr}_i)\}$, *и* $\mathrm{Pr}(D(\varepsilon_1, n)) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

[1] Чем меньше pr_i, тем больше неопределенность события $\{x_i\}$, тем больше мера $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ неопределенности, *относительная*, ибо $\log_a(\cdot) = (\log_a b)\cdot\log_b(\cdot)$, $b > 1$, $i = 1, \dots, k$.

[2] Чем меньше pr_i, тем неожиданнее событие $\{x_i\}$, тем больше в наблюдении $\{x_i\}$ информации $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, \dots, k$.

2.2. Энтропии субъективных распределений неопределенного элемента, моделирующего неопределенные высказывания МИ, как меры их информативности/неопределенности

Определим как формальные аналоги шенноновской энтропии (18) энтропии распределений $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ НОЭ $\widetilde{x}$, моделирующего неопределенные высказывания (но. в.) МИ об истинности его значений $x_1,\ldots,x_k$ (в первом варианте мер Pl и Bel),

$$H(t^{\widetilde{x}}) = \max_{x\in X}\min\{t^{\widetilde{x}}(x), \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\} = \\ = \mathop{+}_{x\in X}(t^{\widetilde{x}}(x)\times\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{pl}_{t^{\widetilde{x}}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)), \tag{20}$$

$$\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) = \min_{x\in X}\max\{\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x), t^{\widetilde{x}}(x)\} = \\ = \mathop{\widehat{+}}_{x\in X}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\,\widehat{\times}\, t^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}^{\widetilde{x}}}(t^{\widetilde{x}}(\cdot)). \tag{21}$$

В (20) $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *информативность* (аналог $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ в (18)) *но. в. МИ, согласно которому* $\widetilde{x}=x_i$, $t^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *правдоподобие* (аналог pr_i в (18)) *его истинности*, $i=1,\ldots,k$, а $H(t^{\widetilde{x}})$ — *относительная информативность но. в. о правдоподобии истинности равенств* $\widetilde{x}=x_i$, $i=1,\ldots,k$, которую назовем *информативностью* но. в., моделью которого является НОЭ $\widetilde{x}$, или, короче, — *информативностью* $\widetilde{x}$.

В (21) $t^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *неопределенность* (аналог $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ в (18)) *но. в. МИ, согласно которому* $\widetilde{x}\neq x_i$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *доверие* (аналог pr_i в (18)) *его истинности*, $i=1,\ldots,k$, а $\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}})$ — *относительная неопределенность но. в. о довериях истинности неравенств* $\widetilde{x}\neq x_i$, $i=1,\ldots,k$, которую назовем *неопределенностью* но. в., моделью которого является НОЭ $\widetilde{x}$, или *неопределенностью* $\widetilde{x}$.

Если меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ дуально изоморфны, т. е. если для некоторой функции $\theta(\cdot)\in\Theta$ $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)=\theta\circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, то энтропии

$$H(t^{\widetilde{x}}) = H_\theta(t^{\widetilde{x}}) = \mathop{+}_{x\in X}(t^{\widetilde{x}}(x)\times\theta\circ t^{\widetilde{x}}(x)) = \\ = \mathrm{pl}_{t^{\widetilde{x}}}(\theta\circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)), \tag{22}$$

$$\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) = \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) = \mathop{\widehat{+}}_{x\in X}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\,\widehat{\times}\,\theta^{-1}\circ\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)) = \\ = \mathrm{bel}_{\widehat{t}^{\widetilde{x}}}(\theta^{-1}\circ\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)). \tag{23}$$

Замечание 2.1. В определениях энтропий (22), (23) использованы две шкалы: L и $\widehat{L}=\theta L$. Если при переходе к шкалам γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$ $\theta(\cdot)\in\Theta$ выбирается произвольно, то $\widehat{\gamma}(\cdot)\in\{\theta'\circ\gamma\circ\theta'^{-1}(\cdot),\ \theta'\in\Theta\}$ и если, в частности, преобразование $\theta(\cdot)$, связывающее шкалы L и $\widehat{L}$, остается неизменным, то $\widehat{\gamma}(\cdot)=\theta\circ\gamma\circ\theta^{-1}(\cdot)$ и, как нетрудно проверить, $H_\theta(t^{\widetilde{x}})\to H_\theta(\gamma\circ t^{\widetilde{x}})$. Если же шкалы преобразуются одинаково, $L\to\gamma L$, $\widehat{L}\to\gamma\widehat{L}$, то $\theta(\cdot)\to\theta_\gamma(\cdot)=\gamma\circ\theta\circ\gamma^{-1}(\cdot)$ и $H_\theta(t^{\widetilde{x}})\to H_{\theta_\gamma}(\gamma\circ t^{\widetilde{x}})=\gamma(H_\theta(t^{\widetilde{x}}))$.

Нетрудно убедиться, что энтропии (20)–(22) обладают свойствами, формально подобными свойствам энтропии (18). Например, если $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y) = t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times t^{\widetilde{y}}(y)$, $x\in X$, $y\in Y=\{y_1,\ldots,y_m\}$, где $t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot)$ — распределение условного правдоподобия, то, согласно (22), подобно шенноновской энтропии, $H_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}) = \mathop{+}_{x\in X,\,y\in Y}(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)\times\theta\circ t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)) = H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}) + H_\theta(t^{\widetilde{y}})$, где $H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}) = \mathop{+}_{y\in Y}((H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y)))\times t^{\widetilde{y}}(y))$ — условная энтропия, $H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y))$ — энтропия условного распределения, $y\in Y$, а если НОЭ $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ независимы, $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)=t^{\widetilde{x}}(x)\times t^{\widetilde{y}}(y)$, $x\in X$,, $y\in Y$, то информативность модели пары НОЭ $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$

$$H_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}) = H_\theta(t^{\widetilde{x}})+H_\theta(t^{\widetilde{y}}) = \max\{H_\theta(t^{\widetilde{x}}), H_\theta(t^{\widetilde{y}})\}. \tag{24}$$

Поэтому для *независимых* копий $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ НОЭ $\widetilde{x}$

$$H_\theta(t^{\widetilde{x}_1}\times t^{\widetilde{x}_2}) = H_\theta(t^{\widetilde{x}}), \tag{25}$$

т. е. независимо повторенное но. в. не несет дополнительной информации, в то время как в подобной ситуации информация (18) удваивается: $\sum_{i,j=1}^{k}\mathrm{pr}_i\mathrm{pr}_j\log_a(1/(\mathrm{pr}_i\mathrm{pr}_j)) = 2\sum_{i=1}^{k}\mathrm{pr}_i\log(1/\mathrm{pr}_i)$. Аналогично для неопределенности модели пары $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ независимых[1] копий $\widetilde{x}$

$$\widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}\,\widehat{\times}\,\widehat{t}^{\widetilde{y}}) = \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}})\,\widehat{+}\,\widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{y}}) = \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}), \tag{26}$$

т. е. независимо повторенные но. в. не уменьшают неопределенности уже высказанного суждения.

Дело в том, что в данном варианте теории мер Pl, Bel и pl-, bel-интегралов нет аналога ЗБЧ. Например, НОЭ $\widetilde{y}^{(n)}=\widetilde{x}^1+\ldots+\widetilde{x}^n$ и $\widetilde{z}^{(n)}=\widetilde{x}^1\times\ldots\times\widetilde{x}^n$, где $\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^n$ суть взаимно независимые копии НОЭ $\widetilde{x}$ со значениями в $X=\{x_1,\ldots,x_k\}$ распределены как НОЭ $\widetilde{x}$, а именно $t^{\widetilde{y}^{(n)}}(y) = \max\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} t^{\widetilde{x}}(x^i),\ x^1,\ldots\ldots,x^n\in X,\ \mathop{+}_{j=1}^{n}x^j = y\} = t^{\widetilde{x}}(y)$, $y\in X$, $t^{\widetilde{z}^{(n)}}(z) = \max\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} t^{\widetilde{x}}(x^i),\ x^i,\ldots,x^n\in X,\ \mathop{\times}_{j=1}^{n}x^j = z\} = t^{\widetilde{x}}(z)$, $z\in X$, $n=1,2,\ldots$.

Что касается «типичных» последовательностей, то если значения $x_1,\ldots,x_k$ НОЭ $\widetilde{x}$ упорядочены так, что $1=\mathrm{pl}_1\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{pl}_k>0$, где $\mathrm{pl}_i=t^{\widetilde{x}}(x_i)$, $i=1,\ldots,k$, и $\widetilde{x}^{(n)}$ — последовательность n *взаимно субъективно независимых* копий НОЭ $\widetilde{x}$, то ее правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}^{(n)}) = \min\{\underbrace{\mathrm{pl}_1,\ldots,\mathrm{pl}_1}_{n_1},\ldots\ldots,\underbrace{\mathrm{pl}_k,\ldots,\mathrm{pl}_k}_{n_k}\}$, а последовательность $\widetilde{x}^{(n)}$ следует считать «типичной», если $n_k>0$, ее правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}^{(n)})=\mathrm{pl}_k$. Вероятность $\mathrm{Pr}^{\xi^{(n)}}$, с которой максимально согласована мера $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}^{(n)}}$, где $\xi^{(n)}$ — последовательность *статистически зависимых* случайных элементов $\xi^1,\ldots,\xi^n$, определяет вероятность

[1] Напомним, что $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)=t^{\widetilde{x}}(x)\times t^{\widetilde{y}}(y) \Leftrightarrow \widehat{t}^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)=\theta\circ t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)=\theta(t^{\widetilde{x}}(x)\times t^{\widetilde{y}}(y))=\theta\circ t^{\widetilde{x}}(x)\,\widehat{\times}\,\theta\circ t^{\widetilde{y}}(y)=\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\,\widehat{\times}\,\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y)$, $x\in X$, $y\in Y$.

$\overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)} = (k^n - (k-1)^n)\mathrm{pr}_k^{(n)} = 1 - \sum_{m=1}^{k-1}(m^n - (m-1)^n)\mathrm{pr}_m^{(n)}$ *всех* $k^n - (k-1)^n$ *подпоследовательностей* $\xi^{(n)}$, *содержащих исходы* $\xi^i = x_k$, $i = 1, \dots, n$ (см. [32, лемма 3]), *определившие правдоподобие* pl_k *типичной последовательности* $\widetilde{x}^{(n)}$. Так как при $n \to \infty$ $\overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)} \log_a \overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)} + (1 - \overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)}) \log_a(1 - \overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)}) \to 0$, то интерпретация энтропий (20), (21) существенно отличается от интерпретации шенноновской энтропии (18), оценивающей относительное количество информации, которое можно закодировать типичными последовательностями. Заметим, что если правдоподобие Pl определяет субъективную модель вероятностной случайности $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{Pl}$, то, согласно теореме 1.1, если частота события x_i $\nu_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{pr}_i$, то вероятностный ЗБЧ «индуцирует» субъективный ЗБЧ $\gamma_e(\nu_i^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma_e(\mathrm{pr}_i) = \mathrm{pl}_i$, $i = 1, \dots, k$, и субъективную энтропию шенноновского типа $\sum_{i=1}^{k} \gamma_e(\mathrm{pr}_i) \log_a(\gamma_e(1/\mathrm{pr}_i))$, которую, однако, выбирая γ_e, можно сделать сколь угодно близкой как к ее максимальному значению $\log_a(1/k)$, так и к минимальному 0.

Замечание 2.2. Согласно исследованиям информативности распределения возможностей значений нечеткого элемента *информативность распределения* НОЭ следует определять «относительной степенью локализации» его значений: если $t_1^{\widetilde{x}}(x) \leqslant t_2^{\widetilde{x}}(x)$, $x \in X$, то распределение $t_1^{\widetilde{x}}(\cdot)$ не менее информативно, чем $t_2^{\widetilde{x}}(\cdot)$, несет не меньше информации, *позволяющей локализовать возможные значения* НОЭ $\widetilde{x}$, чем $t_2^{\widetilde{x}}(\cdot)$ [17, 33]. В данном случае такое определение информативности не позволит локализовать возможные значения $\widetilde{x}$, поскольку, как правило, распределения $t_1^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $t_2^{\widetilde{x}}(\cdot)$ заданы в разных шкалах и поточечное сравнение их значений лишено смысла, ибо все распределения $\gamma \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, эквивалентны. Бóльшую информативность (specificity) распределения $t_1^{\widetilde{x}}$ можно охарактеризовать строгим включением его носителя $\{x \in X,\ t_1^{\widetilde{x}}(x) > 0\} \subset \{x \in X,\ t_2^{\widetilde{x}}(x) > 0\}$, но и в этом случае такая точка зрения не имеет ничего общего с числом типичных последовательностей событий как носителей информации.

В данном варианте мер правдоподобия и доверия информация, используемая в задаче оптимизации решения, может быть определена как *непосредственно определяющая качество решения*, подобно информации Р. Фишера, определяющей качество несмещенного параметрического оценивания (см. [38, с. 103 и п. 3.7]).

Обзор исследований мер неопределенности и информативности дан в [17].

2.3. Энтропии распределений неопределенного элемента $\widetilde{x}$ в третьем варианте

В третьем варианте (см. [36, п. 1.9.2]) есть *«собственный»* ЗБЧ и аналоги центральной предельной теоремы в теории вероятностей (см. [3, п. 4.4]). Есть и ЗБЧ, *индуцированный* вероятностным ЗБЧ для вероятности, субъективной моделью которой является пространство с правдоподобием и доверием, поскольку, согласно (11), $\mathrm{pl}_i = (\mathrm{pr}_i/\mathrm{pr}_1)^{\beta_i}$ и $(n_i/n_1)^{\beta_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{pl}_i$, где $n_i/n_1 = \nu_i^{(n)}/\nu_1^{(n)}$, отношение частоты события $\{x_i\}$ к частоте события $\{x_1\}$, $i = 2, \dots, k$. Этот факт будет использован несколько позже, а сейчас, чтобы сравнить с результатами исследования энтропий, полученными в п. 2.2, определим в третьем варианте, подобно (22), (23), относительную информативность распределения правдоподобий НОЭ $\widetilde{x}$ равенством

$$H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}}(X)) = \mathop{+'}_{x\in X}(t^{\widetilde{x}}(x) \times {}'\theta'_\beta \circ t^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{pl}'_{t^{\widetilde{x}}}(\theta'_\beta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \\ = \max_{x\in X}(t^{\widetilde{x}}(x) \otimes \log_\beta(t^{\widetilde{x}}(x))^{-1}), \quad (27)$$

относительную неопределенность распределения доверий НОЭ $\widetilde{x}$

$$H_{\theta'^{-1}_\beta}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(X)) = \mathop{\widehat{+}'}_{x\in X}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \widehat{\times}' \theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)) = \\ = \mathrm{bel}'_{\widehat{t}^{\widetilde{x}}}(\theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \min_{x\in X}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \oplus \beta^{-\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)}) = \\ = \min_{x\in X}(\log_\beta(t^{\widetilde{x}}(x))^{-1} \oplus t^{\widetilde{x}}(x)), \quad (28)$$

где $\oplus$ и $\otimes$ — символы «обычных» сложения и умножения. Подобно (22), (23), энтропии (27), (28) *определены для пары шкал* L' *и* $\widehat{L}' = \theta'_\beta L'$, и если при пребразованиях $L' \to \gamma'_\alpha L'$, $\widehat{L}' \to \widehat{\gamma}'_{\alpha'} \widehat{L}'$, $\alpha, \alpha' > 0$, $\theta'_\beta(\cdot)$, $\beta > 1$, выбирается произвольно, то должно быть выполнено включение $\widehat{\gamma}'_{\alpha'}(\cdot) \in \{\theta'_\beta \circ \gamma'_\alpha \circ \theta'_\beta(\cdot), \beta > 1\}$ (см. [36, п. 1.9.2]). Поскольку в данном случае $\forall \beta > 1$ $\theta'_\beta \circ \gamma'_\alpha \circ \theta'^{-1}_\beta(\cdot) = \widehat{\gamma}'_\alpha(\cdot)$, то, независимо от выбора $\beta > 1$, $\alpha' = \alpha$, $L' \to \gamma'_\alpha L'$, $\widehat{L}' \to \widehat{\gamma}'_{\alpha'} \widehat{L}'$ и $H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}}) \to H_{\theta'_\beta}(\gamma'_\alpha \circ t^{\widetilde{x}})$. Аналогично $H_{\theta'^{-1}_\beta}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) \to H_{\theta'^{-1}_\beta}(\widehat{\gamma}'_\alpha \circ \widehat{t}^{\widetilde{x}})$.

Однако в третьем варианте, в отличие от (25), (26), для Pl'-независимых[1] $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$

$$\max\{H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_1}(\cdot)), H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_2}(\cdot))\} \leqslant H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_1} \times {}'t^{\widetilde{x}_2}(\cdot,\cdot)) \overset{\mathrm{def}}{=} \\ \overset{\mathrm{def}}{=} \mathop{+'}_{x_1,x_2\in X}\left(t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \times {}'t^{\widetilde{x}_2}(x_2) \times {}' \log_\beta(t^{\widetilde{x}_1}(x) \times {}'t^{\widetilde{x}_2}(x))^{-1}\right) \leqslant \\ \leqslant \max_{x_1,x_2\in X}[t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \otimes t^{\widetilde{x}_2}(x_2) \otimes \log_\beta(t^{\widetilde{x}_1}(x_1))^{-1}] \oplus \\ \oplus \max_{x_1,x_2\in X}[t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \otimes t^{\widetilde{x}_2}(x_2) \otimes \log_\beta(t^{\widetilde{x}_2}(x_2))^{-1}] = \\ = H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_1}(\cdot)) \oplus H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_2}(\cdot)). \quad (29)$$

[1] Подобно определениям (18), (19) НОЭ $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ Pl'-независимы, если $t^{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2}(x_1, x_2) = t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \times {}'t^{\widetilde{x}_2}(x_2)$, Bel'-независимы, если $\widehat{t}^{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2}(x_1, x_2) = \widehat{t}^{\widetilde{x}_1}(x_1) \widehat{\times}' \widehat{t}^{\widetilde{x}_2}(x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Согласно (29) информативность пары независимых копий $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ НОЭ $\widetilde{x}$ не меньше информативности НОЭ $\widetilde{x}$, т. е. но. в., независимо высказанное МИ дважды, не менее информативно, чем высказанное один раз. Это можно интерпретировать как известный эффект, аналогичный эффекту подавления шума в подобной ситуации для информации (18): МИ *обращает внимание* на уже высказанное суждение. Но для относительной неопределенности и в этом варианте

$$\widehat{H}_{\theta'^{-1}_{\beta}}\big(\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}\,\widehat{\times}'\,\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(\cdot)\big) =$$

$$= \widehat{\sum_{x_1,x_2\in X}}{}' \Big(\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\,\widehat{\times}'\,\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\,\widehat{\times}'\,\theta'^{-1}_{\beta}\circ\big(\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\,\widehat{\times}'\,\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\big)\Big) =$$

$$= \widehat{\sum_{x_1,x_2\in X}}{}' \Big[\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\,\widehat{\times}'\,\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\,\widehat{\times}'\,\theta'^{-1}_{\beta}\circ\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\Big]\,\widehat{+}'$$

$$\widehat{+}'\Big(\widehat{\sum_{x_1,x_2\in X}}{}' \Big[\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\,\widehat{\times}'\,\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\,\widehat{\times}'\,\theta'^{-1}_{\beta}\circ\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\Big]\Big) =$$

$$= \min\Big\{\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\oplus\beta^{-\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)},\ \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\oplus\beta^{-\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)}\Big\} =$$

$$= \min\Big\{\widehat{H}_{\theta'^{-1}_{\beta}}\big(t^{\widetilde{x}_1}(\cdot)\big),\ \widehat{H}_{\theta'^{-1}_{\beta}}\big(t^{\widetilde{x}_2}(\cdot)\big)\Big\} = H_{\theta'^{-1}_{\beta}}\big(\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot)\big),$$

т. е. но. в., будучи независимо высказанным дважды, сохраняет его неопределенность.

Обратимся к ЗБЧ в третьем варианте, *индуцированным вероятностным* ЗБЧ, и покажем, что *если* Pl', Bel' *определяют субъективную модель вероятностной случайности*, т. е. максимально согласованы с Pr, то *любая последовательность* $\widetilde{x}^{(n)}$ *взаимно* Pl-*независимых одинаково распределенных НОЭ* $\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^n$ *может быть представлена как максимально* $\overline{\Gamma}'$-*согласованная* (см. п. 1.3) *со случайной последовательностью* $\xi^{(n)}$ *взаимно независимых одинаково распределенных сл. э.* $\xi^1,\ldots,\xi^n$, *т. е. что в шкале* L' *правдоподобий*

$$\forall\, n=1,2,\ldots\ \exists\,\delta^{(n)}>0\ \mathrm{pl}_1^{n_1}\ldots\mathrm{pl}_k^{n_k} = (\mathrm{pr}_1^{n_1}\ldots\mathrm{pr}_k^{n_k})^{\delta^{(n)}}, \tag{30}$$

где $\mathrm{pl}_j=\mathrm{Pl}(\widetilde{x}^i=x_j)$, $\mathrm{pr}_j=\mathrm{Pr}(\xi^i=x_j)$, n_j — *число равенств* $\xi^i=x_j$ *в последовательности* $\xi^1,\ldots,\xi^n$, $j=1,\ldots,k$, $n_1+\ldots+n_k=n$, $i=1,2,\ldots$.

Действительно, согласно (11) равенство (30) эквивалентно равенству

$$(\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1 n_1/n}\ldots(\mathrm{pr}_k/\mathrm{pr}_1)^{\beta_k n_k/n} = (\mathrm{pr}_1^{n_1/n}\ldots\mathrm{pr}_k^{n_k/n})^{\delta^{(n)}}, \tag{31}$$

а поскольку левая его часть и произведение в скобках справа содержатся в $(0,1)$, найдется $\delta^{(n)}\in(0,\infty)$, обеспечивающее равенство левой и правой частей в (31). Перепишем (31) в шкале $\widehat{L}'$ значений доверия (см. [36, п. 1.9.2])

$$\theta'_a\big((\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1 n_1/n}(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2 n_2/n}\ldots(\mathrm{pr}_k/\mathrm{pr}_1)^{\beta_k n_k/n}\big) = \theta'_a\left((\mathrm{pr}_1^{n_1/n}\ldots\mathrm{pr}_k^{n_k/n})^{\delta^{(n)}}\right), \tag{32}$$

где $\theta'_a(u)=\log_a u^{-1}$, $0<u\leqslant 1$, $\theta'_a(0)=0$, $a>1$, и, устремив в (32) n к бесконечности, получим равенство:

$$\sum_{j=1}^{k}\beta_j\mathrm{pr}_j\log_a(\mathrm{pr}_j/\mathrm{pr}_1)^{-1} = \delta^{(\infty)}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{pr}_j\log_a\mathrm{pr}_j^{-1}, \tag{33}$$

где $\delta^{(\infty)}=\lim\limits_{n\to\infty}\delta^{(n)}=\delta(\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_k)<1$ и учтено, что $n_j/n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}}\mathrm{pr}_j$, $j=1,\ldots,k$.

Согласно (11) и (18) равенство (33) можно записать как $\sum\limits_{j=1}^{k}\mathrm{pr}_j\log_a\mathrm{pl}_j^{-1}=\delta^{(\infty)}H(\mathrm{pr.})$, где слева — *математическое ожидание меры субъективной информативности/неопределенности* $\log_a(1/\mathrm{pl}_j)$ события x_j, $j=1,\ldots,k$,: чем меньше правдоподобие pl_j события $\{x_j\}$, тем оно неожиданнее, тем больше мера $\log_a(1/\mathrm{pl}_j)$ субъективной информативности события $\{x_j\}$. Чем меньше правдоподобие pl_j события $\{x_j\}$, тем больше его неопределенность, тем больше мера $\log_a(1/\mathrm{pl}_j)$ субъективной неопределенности события $\{x_j\}$ (ср. с (27), (28)).

Замечание 2.3. Автору неизвестны работы, в которых рассматривается подобный вариант мер правдоподобия и доверия и энтропии их распределений.

3. Идентификация состояний неопределенного нечеткого объекта. Оптимальное субъективное правило идентификации

Рассмотрим *задачу идентификации неизвестного состояния* $k\in K$ неопределенного нечеткого объекта (НО. НЧ. О.)[1], в которой его модель $M(x)=(Z,\mathcal{P}(Z),\mathrm{P}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;x)$, $\mathrm{N}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;x))$ и схема наблюдения за ним заданы зависящим от *неизвестного* параметра $x\in X$ распределением возможностей $g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)$, $z\in Z$, $k\in\{1,\ldots,q\}=K$, значений пары[2] ζ, $\varkappa$ неопределенных нечетких элементов (но. нч. э.) «наблюдение, состояние», первый из которых наблюдаем, а второй — нет. В задаче идентификации требуется по наблюдению $\zeta=z$ принять (четкое, см. [1, п. 4.2]) решение $d(z;x)\in K$ о состоянии объекта, если известно, что МИ готов предложить свою *субъективную модель значений* $x\in X$, а возможность «потерь», сопутствующих решению $d(z;x)$ о состоянии НО. НЧ. О., находящегося в состоянии $k\in K$, равна $\mathrm{pl}_{k,d(z;x)}$, $z\in Z$.

Рассмотрим модель идентификации. Для определения функции $\mathrm{pl}_{\cdot,\cdot}\colon K\times K\to L$ субъект, принимающий решения (с. п. р.), задает семейство пространств с возможностью $(\Lambda,\mathcal{P}(\Lambda),\mathrm{P}(\cdot|\cdot;d))$, $d\in K$, в котором Λ — пространство элементарных «потерь», $\mathcal{P}(\Lambda)$ — класс всех подмножеств Λ, $\mathrm{P}(\cdot\,|\cdot;d)\colon\mathcal{P}(\Lambda)\to L$ — переходная мера возможности для

[1] Неопределенным нечетким (НО. НЧ.) называется объект (элемент), моделью которого является нечеткое пространство (см. [1, замечание 1.1]), зависящее от неизвестного параметра.

[2] Далее для простоты будем считать, что $\mathrm{P}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;x)$ и $\mathrm{N}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;x)$ при любом $x\in X$ дуально согласованы, поэтому $M(x)=(Z,\mathcal{P}(Z),\mathrm{P}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot;x))$, $x\in X$.

$(K,\mathcal{P}(K))$ и $(\Lambda,\mathrm{P}(\Lambda))$ при любом $d\in K$. Далее с. п. р. *выделяет* множество $V\in\mathcal{P}(\Lambda)$ *существенных*, по его мнению, элементарных «потерь» и *полагает* $\mathrm{p}l_{k,d}=\mathrm{P}(V\,|\,k,d)$, $(k,d)\in K\times K$. Качество идентификации с. п. р. *оценивает* зависящей от известного с точностью до субъективных предположений МИ $x\in X$ *возможностью потерь* (см. [37, (30)])

$$\mathrm{P\,L}(d(\cdot;\cdot);x)=\sup_{z\in Z}\max_{k\in K}\min\{\mathrm{p}l_{k,d(z;x)},g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)\},\tag{34}$$

сопутствующих правилу идентификации, заданному зависящей от $x\in X$ решающей функцией $d(\cdot;x)\colon Z\to K$.

Пусть для каждых $(z;x)\in Z\times X$ функция $d^*(\cdot;\cdot)\colon Z\times X\to K$ определена как решение задачи

$$\mathrm{P}_d(z;x)\overset{\mathrm{def}}{=}\max_{k\in K}\min\{\mathrm{p}l_{k,d},g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)\}\sim\min_{d\in K}.\tag{35}$$

Для любой функции $d^*(\cdot;\cdot)\colon Z\times X\to K$ функция $d^*(\cdot;x)\colon Z\to K$ при любом $x\in X$ удовлетворяет условию

$$d^*(z;x)\in D^*(z;x)\overset{\mathrm{def}}{=}\{d\in K,\ \mathrm{P}_d(z;x)=\min_{d'\in K}\mathrm{P}_{d'}(z;x)\},\quad z\in Z,\tag{36}$$

и, согласно (34), (35), (36), как нетрудно увидеть, является решением задачи $\min\limits_{d(\cdot;\cdot)}\mathrm{P\,L}(d(\cdot;\cdot);x)=$ $=\mathrm{P\,L}(d^*(\cdot;x),x)=\sup\limits_{z\in Z}\mathrm{P}_{d^*(z;x)}(z;x)$, (полученным с. п. р.!), минимизирующим для каждого $x\in X$ возможность потерь (34) и *определяющим оптимальное для МИ субъективное правило идентификации* $\widetilde{d}^*(z)=d^*(z,\widetilde{x})$, $z\in Z$, *выбравшего* НОЭ $\widetilde{x}$ *в качестве своей субъективной модели неизвестного* $x\in X$.

Обозначим:

- $t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widetilde{t^{\widetilde{x}}}(x)$ заданные МИ правдоподобие и доверие истинности его субъективных суждений, согласно которым $\widetilde{x}=x$ и $\widetilde{x}\neq x$, $x\in X$;
- $\widetilde{(\zeta,\varkappa)}$ — но. нч. э., заданный субъективным распределением $g^{\widetilde{\zeta,\varkappa}}(z,k)\overset{\mathrm{def}}{=}g^{\zeta,\varkappa}(z,k;\widetilde{x})=\widetilde{g}^{\zeta,\varkappa}(z,k)$, $z\in Z$, $k\in K$, возможностей его значений;
- $\widetilde{d}^*(z)\overset{\mathrm{def}}{=}d^*(z;\widetilde{x})$, $z\in Z$, — соответствующее выбору МИ и с. п. р. оптимальное субъективное правило идентификации состояния НО. НЧ. О.;
- $\mathrm{p}l(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{P\,L}(d^*(\cdot;x);x)$ — неопределенную, минимальную для каждого $x\in X$, возможность потерь и $\widetilde{\mathrm{p}l}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{p}l(\widetilde{x})$ — *соответствующую ей субъективную минимальную возможность потерь*; тогда
- $t^{\widetilde{d}^*(z)}(d;z)=\sup\{t^{\widetilde{x}}(x)\mid x\in X,\,d^*(z;x)=d\}$ и $\widetilde{t^{\widetilde{d}^*(z)}}(d;z)=\inf\{\widetilde{t^{\widetilde{x}}}(x)\mid x\in X,\,d^*(z;x)=d\}$ суть правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений МИ и с. п. р., согласно которым $\widetilde{d}^*(z)=d$ и соответственно $\widetilde{d}^*(z)\neq d$, $d\in K$, $z\in Z$. Для *принятия* решения с. п. р., возможно, потребуется *статистическое моделирование* правила $\widetilde{d}^*(z)$, позволяющее *субъективное решение принимать как случайное* (см. [37, п. 2.1], [3]).

Для субъективной минимальной возможности «потерь» $\widetilde{\mathrm{p}l}$

$$\begin{aligned}t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p})&\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{\mathrm{p}l}=\mathrm{p})=\sup\{t^{\widetilde{x}}(x)\mid x\in X,\ \mathrm{p}l(x)=\mathrm{p}\},\\ \widetilde{t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}}(\mathrm{p})&\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{\mathrm{p}l}\neq\mathrm{p})=\inf\{\widetilde{t^{\widetilde{x}}}(x)\mid x\in X,\ \mathrm{p}l(x)=\mathrm{p}\}\end{aligned}\tag{37}$$

суть правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений МИ и с. п. р., согласно которым $\widetilde{\mathrm{p}l}=\mathrm{p}$ и $\widetilde{\mathrm{p}l}\neq\mathrm{p}$, $\mathrm{p}\in[0,1]$. *Качество* субъективного оптимального правила $\widetilde{d}^*(\cdot)=d^*(\cdot;\widetilde{x})\colon Z\to K$ *охарактеризуем значениями* $\mathrm{p}\in L$ *субъективной возможности «потерь», при которых равенство* $\widetilde{\mathrm{p}l}=\mathrm{p}$ *имеет максимальное правдоподобие, а неравенство* $\widetilde{\mathrm{p}l}\neq\mathrm{p}$ — *минимальное доверие*, а именно чем меньше значения $\operatorname{argmax}\limits_{\mathrm{p}\in[0,1]}t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p})$ и $\operatorname{argmin}\limits_{\mathrm{p}\in[0,1]}\widetilde{t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}}(\mathrm{p})$ в (37), тем лучше оптимальное субъективное правило решения $d^*(\cdot;\widetilde{x})$. Если $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X\to L$ полунепрерывна сверху, а $\widetilde{t^{\widetilde{x}}}(\cdot)\colon X\to\widehat{L}$ полунепрерывна снизу, то $\operatorname{argmax}\limits_{\mathrm{p}\in[0,1]}t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p})=\min\{\mathrm{p}l(x)|x\in X,\,t^{\widetilde{x}}(x)=1\}$, $\operatorname{argmin}\limits_{\mathrm{p}\in[0,1]}\widetilde{t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}}(\mathrm{p})=\min\{\mathrm{p}l(x)|x\in X,\,\widetilde{t^{\widetilde{x}}}(x)=0\}$.

Заметим, что оптимальное правило идентификации $d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot)$, отвечающее правдоподобию истинности $\mathrm{pl}\in\mathcal{L}$ модели НО. НЧ. О., определяется как решение задачи $\min\limits_{d(\cdot)}\sup\{\mathrm{PL}(d(\cdot);x)|x\in X_{\mathrm{pl}}\}=\mathrm{PL}(d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot))$, где $X_{\mathrm{pl}}\overset{\mathrm{def}}{=}\{t^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{pl}\}$ и $\mathrm{PL}(d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot))\geqslant\sup\{\mathrm{pl}(x)|x\in X_{\mathrm{pl}}\}$, $\mathrm{pl}\in\mathcal{L}$.

4. Экспертное построение распределений нечеткого и неопределенного нечеткого элементов

Рассмотрим вначале построение коллективной экспертной оценки распределения правдоподобий

$$\mathrm{p}_j=\mathrm{P}(\xi=x_j),\ j=1,\ldots,n,\tag{38}$$

нч. э. ξ, неформальная модель которого в той или иной степени известна экспертам.

4.1. Экспертное построение распределения нечеткого элемента

Рассмотрим метод построения распределения нч. э., в котором каждый из N экспертов представляет решение, указав перестановку $\pi(\cdot)\colon\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$, упорядочивающую, по его мнению, $\mathrm{p}_1,\ldots,\mathrm{p}_n$ в (38) по убыванию.

Пусть $\pi_i(\cdot)$ — перестановка, упорядочивающая, по мнению i-го эксперта, возможности в (38):

$$1=\mathrm{p}_{i_1}>\mathrm{p}_{i_2}>\ldots>\mathrm{p}_{i_n}>0,\tag{39}$$

где $\mathrm{p}_{i_k}=(\pi_i*\mathrm{p})_k=\mathrm{p}_{\pi_i^{-1}(k)}$, $k=1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,N$, и для простоты считается, что *эксперты обязаны использовать только строгие неравенства*.

Определим расстояние $r(\pi_i,\pi_s)$ между «мнениями» i-го и s-го экспертов равенством

$$r(\pi_i,\pi_s)=\left(\sum_{k=1}^{n}(\pi_i^{-1}(k)-\pi_s^{-1}(k))^2\right)^{1/2}\equiv$$
$$\equiv\left(\sum_{k=1}^{n}(i_k-s_k)^2\right)^{1/2}. \quad (40)$$

Пусть $\pi_*^{-1}(1),\ldots,\pi_*^{-1}(n)$ — номера, упорядочивающие (не обязательно строго) значения возможностей, которые указал бы «нейтральный» эксперт, выражая мнения N экспертов. Тогда перестановка π_* может быть определена как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{N}w_i^2r^2(\pi_i,\pi_*)=\min_{\pi}\sum_{i=1}^{N}w_i^2r^2(\pi_i,\pi), \quad (41)$$

в которой минимум вычисляется на множестве всех перестановок $\pi(\cdot)$.

В задаче (41), как и в задаче (29) в [36], можно получить в известном смысле полное решение, а именно найти коллективную экспертизу π_* и оценить, в какой степени ей следует доверять. Так как в (41), как и в [36, (29)],

$$\sum_{i=1}^{N}w_i^2r^2(\pi_i,\pi)=\sum_{i=1}^{N}w_i^2r^2(\pi_i,\overline{\pi})+r^2(\overline{\pi},\pi), \quad (42)$$

где $\overline{\pi}^{-1}(k)=\sum\limits_{i=1}^{N}w_i^2\pi_i^{-1}(k)$, $k=1,\ldots,n$, то задача (41) эквивалентна задаче отыскания перестановки π_*, ближайшей к функции $\overline{\pi}$: $r^2(\overline{\pi},\pi_*)=\min\limits_{\pi}r^2(\overline{\pi},\pi)$. Если для некоторой перестановки $\widehat{\pi}$ $\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(1))\leqslant\ldots\leqslant\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(n))$, то, очевидно, $\pi_*=\widehat{\pi}$, ибо $\sum\limits_{k=1}^{n}(\overline{\pi}^{-1}(k)-\widehat{\pi}^{-1}(k))^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(k))-k)^2$ и для любых целых $s,k=1,\ldots,n$, $1\leqslant s\leqslant s+k\leqslant n$, $\left(\overline{\pi}^{-1}\left(\widehat{\pi}(s)\right)-s\right)^2+\left(\overline{\pi}^{-1}\left(\widehat{\pi}(s+k)\right)-s+k\right)^2-\left(\overline{\pi}^{-1}\left(\widehat{\pi}(s+k)\right)-s\right)^2-\left(\overline{\pi}^{-1}\left(\widehat{\pi}(s)\right)-s+k\right)^2=2k\left(\overline{\pi}^{-1}\left(\widehat{\pi}(s)\right)-\overline{\pi}^{-1}\left(\widehat{\pi}(s+k)\right)\right)\leqslant 0$.

В *вероятностной модели экспертных решений*, согласно которой *эксперты некомпетентны и принимают решения «взаимно независимо и наугад»*, значение первого слагаемого в правой части (42) позволит судить, *насколько следует доверять* «коллективной экспертизе» π_*.

Обозначим $\omega=(\widetilde{\pi}_1,\ldots,\widetilde{\pi}_N)$ — кортеж N случайных взаимно независимых перестановок, Π^N — класс всех $(n!)^N$ таких ω, $\Pr(\{\omega\})=(n!)^{-N}$, $\omega\in\Pi^N$, — значения, определяющие вероятность $\Pr$ на $(\Pi^N,\ \mathcal{P}(\Pi^N))$. Вероятностное пространство $(\Pi^N,\mathcal{P}(\Pi^N),\Pr)$ моделирует заключения N экспертов, взаимно независимо принимающих решения наугад: все $(n!)^N$ возможных их экспертиз равновероятны.

Статистика $t(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{N}w_i^2r^2(\widetilde{\pi}_i,\overline{\pi})$, $\omega\in\Pi^N$, принимает значения в $T=\{t(\omega),\,\omega\in\Pi^N\}=\{t_1,\ldots,t_K\}$ с вероятностями $\mathrm{pr}_k=\Pr(\{\omega\in\Pi^N,\ \ t(\omega)=t_k\})$, $k=1,\ldots,K$, которые определим упорядоченными по убыванию: $\mathrm{pr}_1\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{pr}_K$. Если H — гипотеза, *согласно которой эксперты принимают решения наугад и взаимно независимо*, то критерий, отвергающий H ошибочно с вероятностью $\leqslant\varepsilon$, $\varepsilon>0$, определится критическим множеством $T_\varepsilon=\{t_{k(\varepsilon)},t_{k(\varepsilon)+1},\ldots,t_K\}$, где $k(\varepsilon)=\min\{k,t_k\in T,\ \mathrm{pr}_k+\ldots+\mathrm{pr}_K\leqslant\varepsilon\}$.

Поэтому включение $\sum\limits_{i=1}^{N}w_i^2r^2(\pi_i,\overline{\pi})\in T\setminus T_\varepsilon$ означает, что *«коллективной» экспертизе* π_* *доверять не следует в силу «патологической» несогласованности частных экспертиз*. Заметим, что эксперты могут сами выбирать значения $x_{i_1},\ldots,\ x_{i_{n_i}}$, $i=1,\ldots,N$, нч. э. ξ, но для определения *коллективной экспертизы* необходимо, чтобы они в своих заключениях *упорядочили возможности всех значений* ξ из $\bigcup\limits_{i=1}^{N}\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_i}}\}$.

4.2. Экспертное построение распределения неопределенного нечеткого элемента

Заметим, что решение задачи (41) позволило выразить недоверие к коллективной экспертизе, хотя *эксперты не имели математических средств для выражения правдоподобий собственных заключений*. Учесть мнения каждого эксперта о правдоподобии его собственного решения позволит конструкция *неопределенного нечеткого элемента* (но. нч. э.) (см. разд. 3 и [36, п. 2.1]).

Но. нч. э. со значениями в X называется функция $\widetilde{\xi}=q(\eta,\widetilde{s})$ нч. э. η и НОЭ $\widetilde{s}$, канонических для пространств $(Y,\mathcal{P}(Y),\ \mathrm{P}^{\eta})$ с возможностью $\mathrm{P}^{\eta}(\cdot)\colon\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{L}$ и $(S,\mathcal{P}(S),\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ с правдоподобием $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}$, при отображении $q(\cdot,\cdot)\colon Y\times S\to X$, рассматриваемом как нечеткий элемент с неопределенным распределением. В $(S,\mathcal{P}(S),\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ S — множество элементарных высказываний, $\mathcal{P}(S)$ — множество всех подмножеств S, каждое подмножество $E\subset S$ взаимно однозначно представляет высказывание[1] e как множество элементарных высказываний, каждое из которых влечет e: $e\leftrightarrow E=\bigcup\limits_{\substack{s\in S,\\ s\to e}}\{s\}\equiv\{s\in S,\,s\to e\}$, где $\leftrightarrow$ символизирует взаимно однозначное соответствие, а $s\to e$ означает «s влечет e»; $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\cdot)\colon\mathcal{P}(S)\to L$ — правдоподобие, значение $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\widetilde{s}\in E)=\sup\limits_{s\in E}t^{\widetilde{s}}(s)$, — правдоподобие истинности неопределенного высказывания (но. в.), согласно которому $\widetilde{s}\in E$, где $t^{\widetilde{s}}(s)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\widetilde{s}=s)$ — правдоподобие истинности но. в., согласно которому $\widetilde{s}=s$, $s\in S$ (см. [36, п. 1.2]).

В модели объекта исследования (ОБ. И.), определенной но. нч. э. $\widetilde{\xi}$, пространство с возможностью $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}^{\eta})$ моделирует *нечеткость формулировок*, характеризующих *свойства* ОБ. И., отно-

[1] $a,b,\ldots$ — высказывания, $A,B,\ldots$ — представляющие их подмножества S.

сящуюся к их содержанию, пространство с правдоподобием $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ моделирует *субъективные суждения* (но.в.) эксперта *о правдоподобии нечетких формулировок*, *истинность* которых, разумеется, не абсолютна в силу принципиальной неполноты и недостоверности знания свойств ОБ. И. (см. разд. 3).

Для каждого $s \in S$ $\xi_s = q(\eta, s)$ — нч. э., $g^{\xi_s}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(\xi_s = x) = \sup\{g^{\eta}(y) \mid y \in Y,\, q(y,s) = x\}$, $x \in X$, — его распределение, понимаемое как значение *неопределенной функции* $g^{\xi_{\widetilde{s}}}(\cdot) = g^{\widetilde{s}}(\cdot)$ (т. е. функции $g^{\xi_{\widetilde{s}}}(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, зависящей от неопределенного элемента $\widetilde{s}$ как от параметра) при $\widetilde{s} = s$. Поэтому

$$t^{g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(g(\cdot)) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}\big(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g(\cdot)\big) = \\ = \sup\big\{t^{\widetilde{s}}(s) \mid s \in S,\ \forall x \in X\ \ g^{\xi_s}(x) = g(x)\big\}, \\ g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}, \quad (43)$$

— *относительное правдоподобие истинности но. в., согласно которому неопределенное распределение* $g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ *равно* $g(\cdot)$,

$$t^{g^{\widetilde{\xi}}(x)}(\mathrm{p}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}\big(g^{\widetilde{\xi}}(x) = \mathrm{p}\big) = \\ = \sup\{t^{\widetilde{s}}(s) | s \in S,\ g^{\xi_s}(x) = \mathrm{p}\} = \tau_x^{\widetilde{\xi}}(\mathrm{p}), \quad (44)$$

— *относительное правдоподобие истинности но. в., согласно которому возможность равенства* $\widetilde{\xi} = x \in X$ *равна* $\mathrm{p} \in [0,1]$.

Функция $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot)\colon X \times \mathcal{L} \to L$ называется *распределением (относительных) правдоподобий возможностей значений* но. нч. э. $\widetilde{\xi}$ соответственно $t^{g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(g(\cdot))$, $g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, — *распределение (относительных) правдоподобий распределений (относительных) возможностей значений* но. нч. э. $\widetilde{\xi}$, короче — *распределение* но. нч. э. $\widetilde{\xi}$, которое обозначим $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to L$.

Покажем, что задача экспертного построения распределения но. нч. э. $\widetilde{\xi}$ как задача построения функции $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to L$ или (и) функции $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot)\colon X \times \mathcal{L} \to L$ может быть решена подобно тому, как решены задачи (40), (41) построения распределения нч. э. ξ.

Рассмотрим случай, в котором каждый из N экспертов предлагает семейство, по его мнению, в той или иной степени правдоподобных вариантов (значений) неопределенного распределения возможностей $g^{\widetilde{\xi}}(x)$, $x \in X$, значений $\widetilde{\xi}$, а затем все N предложенных экспертами семейств объединяются в одно семейство $g^{\xi_{s_k}}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$, и каждый эксперт по своему усмотрению упорядочивает его по убыванию правдоподобий распределений возможностей. Если по мнению i-го эксперта

$$1 = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}\big(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_1}}}(\cdot)\big) > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}\big(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_2}}}(\cdot)\big) > \ldots > \\ > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}\big(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_n}}}(\cdot)\big) > 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad (45)$$

то он в качестве своей экспертизы сообщает перестановку $\pi_i^{-1}(k) = i_k$, $k = 1, \ldots, n$, упорядочивающую правдоподобия распределений семейства $g^{\xi_{s_k}}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$, по убыванию, $i = 1, \ldots, N$.

Коллективное заключение о распределении $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)$ (43), которое может быть получено аналогично решению задачи (40), (41), определит перестановку π_*, упорядочивающую подобно (45) правдоподобия распределений возможностей

$$1 = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(1)}}}(\cdot)) > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(2)}}}(\cdot)) > \\ > \ldots > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(n)}}}(\cdot)) > 0,$$

согласно коллективной экспертизе, и оценит, в какой степени ей следует доверять. Задача экспертного восстановления распределения $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ (44) решается аналогично.

Замечание 4.1. Автору неизвестны публикации, в которых рассмотрены подобные методы экспертного построения моделей нч. э. и но. нч. э.

Заключение

В статье предложены и исследованы методы суб. моделирования вероятностной случайности, свойственной данным наблюдений за эволюционирующим стохастическим объектом (Э. Ст. О.). Показано, что субъективной моделью дискретного вероятностного пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr})$ является заданное МИ пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ максимально согласованы с Pr, причем вероятности Pr, с каждой из которых максимально согласованы $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, образуют класс *суб. эквивалентных* вероятностей, а $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ является суб. моделью Э. Ст. О., в вероятностной модели которого вероятность может произвольно эволюционировать в пределах класса суб. эквивалентных.

Показано, что суб. модель такого Э. Ст. О. при достаточно естественных условиях может быть безошибочно восстановлена на основе конечного числа данных событийно-частотных наблюдений, в то время как *произвольно эволюционирующая* в пределах класса суб. эквивалентных вероятность в его вероятностной модели при любом числе данных наблюдений может быть восстановлена лишь с точностью до включения в класс суб. эквивалентных.

Рассмотрена суб. модель $(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{Pl}, \mathrm{Bel})$ абсолютно непрерывного вер. пр. $(\mathcal{R}^n,\ \mathcal{L}^{(n)}, \mathrm{Pr})$, в которой распределения Pl и Bel *суб. согласованы* с плотностью вероятности Pr (распределения Pl и Bel измеримы относительно минимальной сигма-подалгебры сигма-алгебры $\mathcal{L}^{(n)}$, относительно которой измерима плотность Pr). Показано, что и в этом случае суб. модель, единственная с точностью до эквивалентности, является таковой для каждой вероятностной модели из класса суб. эквивалентных, что позволяет суб. моделировать Э. Ст. О., в вероятностной модели которого вероятность произвольно эволюционирует в пределах класса суб. эквивалентных.

Рассмотрена суб. модель вероятностной случайности в третьем варианте мер правдоподобия и доверия, которые наследуют некоторые черты вероятности и психофизики, в частности закон больших чисел (ЗБЧ), наличие которого существенно для эффективности энтропий шенноновского типа распределений правдоподобий и доверий. В частности, рассмотрены меры правдоподобия Pl' и доверия Bel', максимально согласованные с дискретной вероятностью, и исследованы классы взаимно Γ'-эквивалентных правдоподобий. Полученные результаты использованы в исследованиях информативности и неопределенности суб. суждений МИ.

Исследована проблема информативности и неопределенности суб. суждений как информативности и неопределенности энтропий суб. распределений значений неопределенного элемента $\widetilde{x}$, моделирующего суждения МИ. Определена и исследована пара энтропий, формально аналогичных шенноновской, названных информативностью но. в. и неопределенностью но. в. Показано, что энтропии обладают свойствами, формально подобными свойствам шенноновской энтропии, но в силу отсутствия ЗБЧ их содержательная интерпретация существенно отличается от интерпретации шенноновской информации, оценивающей число «типичных последовательностей» событий как носителей информации.

Определены и исследованы энтропии суб. распределений НОЭ $\widetilde{x}$ в третьем варианте мер правдоподобия и доверия и их аналоги, основанные на ЗБЧ, индуцированном вероятностным ЗБЧ для вероятности, суб. моделью которой является пространство с правдоподобием и доверием. Показано, что в этом случае свойства энтропий аналогичны свойствам шенноновской энтропии, а для энтропии, определенной индуцированным ЗБЧ как математическое ожидание меры суб. информативности/неопределенности, получено равенство, связывающее математическое ожидание меры суб. информативности/неопределенности с шенноновской энтропией.

Рассмотрена оптимизация суб. решения в задаче идентификации состояния неопределенного нечеткого объекта, моделью которого является нечеткое пространство, зависящее от значения неизвестного параметра, определяющего его состояние.

Рассмотрены методы экспертного построения моделей нечеткого и неопределенного нечеткого элементов.

Автор выражает благодарность Ю. М. Нагорному и Д. А. Балакину за обсуждение статьи и за помощь при подготовке электронного варианта статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-07-00133а, 11-07-00722, 14-07-00441).

Список литературы

1. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 1. С. 3. (*Pyt'ev Yu.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 1. P. 1.)
2. *Пытьев Ю.П.* // Матем. моделирование. 2013. **25**, № 4. С. 102.
3. *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. М.: Физматлит, 2007; Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Физматлит, 2016.
4. *Пытьев Ю.П.* // Интеллектуальные системы. 2007. **11**, № 1–4. С. 277.
5. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006.
6. *Josang A., Hankin R.* // 15th Intern. Conf. of Information Fusion (FUSION 2012). Singapore, July 2012.
7. *Миронов А.М.* // Интеллектуальные системы. 2007. **11**. С. 201.
8. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. М.: Мир, 1993.
9. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р. Ягера. М.: Радио и связь, 1988.
10. *Балакин Д.А., Нагорный Ю.М., Пытьев Ю.П.* // Всеросс. конф. «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». М., 2014.
11. *Bhavsar V.C., Mironov A.M.* // Proc. of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications (MVLPA 2006). Seattle, WA. 2006. P. 73.
12. *Cowell R.G., Dawid A.P., Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.* Probabilistic Networks and Expert Systems. N. Y.: Springer-Verlag, 1999.
13. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976.
14. *Josang A.* Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic. 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11). Perugia, September 2011.
15. *Stevens S.S.* Psychophysics. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1975.
16. *Josang A.A.* // Int. J. Uncertain. Fuzz. 2001. **9**, N 3. P. 279.
17. *Klir G.J.* Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. Hoboken, NJ: John Wiley, 2006.
18. *Jaynes E.T.* // IEEE Trans. Sys. Sci. Cyb. 1968. **4**, N 3. P. 227.
19. *Jeffreys H.* // Proc. Roy. Soc. Lond. A. Math. 1946. **186**, N 1007. P. 453.
20. *Zadeh L.* // The AI Magazine. 1986. **7**, N 2. P. 85.
21. *Wang P.* // Proc. of the Tenth Conference on Uncertainty in Artifical Intelligence. 1994. P. 560.
22. *Yager R.R.* // Inf. Sci. 1987. March. **41**, N 2. P. 93.
23. *Inagaki T.* // IEEE Trans. Reliab. 1991. **40**, N 2. P. 182.
24. *Dubois D., Prade H.* // Reliability Data Collection and Analysis / Ed. by J. Flamm, T. Luisi. 1992. P. 213.
25. *Smarandache F.* // Int. J. Appl. Math. & Stat. 2004. **2**. P. 1.
26. *Klopotek M.A., Wierzchon' S.T.* // Belief Functions in Business Decisions / Ed. by R.P. Strivastava, T.J. Mock. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 2002. **88**. Studies in Fuzziness snd Soft Computing. P. 62.

27. *Балакин Д.А., Волков Б.И., Еленина Т.Г., Кузнецов А.С., Пытьев Ю.П.* // Интеллектуальные системы. 2014. **18**, № 2. С. 33.
28. *McMillan B.* // Ann. Math. Stat. 1953. N 24. P. 196.
29. *Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А.* Теория вероятностей, математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков. 2-е изд. М.: Физ. факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010.
30. *Dubois D., Nguyen H.T., Prade H.* // Fundamental of Fuzzy Sets / Ed. by D. Dubois, H. Prade. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
31. *Guiasu S.* Information Theory with Applications. McGrow-Hill. N. Y., 1977.
32. *Пытьев Ю.П., Животников Г.С.* // Интеллектуальные системы. 2002. **6**, № 1–4. С. 63.
33. *Yager R.R.* // Fuzz. Set. Sys. 1992. **50**, N 3. P. 279.
34. *Kyburg H.E., Jr., Smokler H.E.* Studies in subjective probability. N. Y.: John Wiley and Sons, 1964.
35. *Savage L.J.* The foundations of statistics. N. Y.: John Wiley and Sons, 1954.
36. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 1. С. 3. (*Pyt'ev Yu.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 1. P. 1.)
37. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 2. С. 15. (*Pyt'ev Yu.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 2. P. 113.)
38. *Пытьев Ю. П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2012.
39. *Пытьев Ю.П.* Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях. Математические и эмпирические основы, приложения. М.: Физматлит, 2018.

Mathematical methods of subjective modeling in scientific research. II. Applications

Yu. P. Pyt'ev

Department of Mathematical Modelling and Informatics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com.

This article considers applications of the formalism of subjective modeling proposed in [36], based on modeling of uncertainty reflecting unreliability of subjective information and fuzziness common of its content. A subjective model of probabilistic randomness is defined and studied. It is shown that a researcher–modeler (RM) defines a subjective model of a *discrete* probability space as a *space with plausibility and believability* that de facto turns out to be a subjective model of the class of subjectively equivalent probability spaces that model an arbitrary evolving stochastic object, and the same space with plausibility and believability is its subjective model. This enables us to empirically recover a subjective model of an evolving stochastic object accurately and using a finite number of event observations, while its probabilistic model cannot be empirically recovered. A similar connection is established between equivalence classes of plausibility and believability distributions and classes of *subjectively equivalent absolutely continuous* probability *densities*. For two versions of plausibility and believability measures, entropies of plausibility and believability distributions of the values of an uncertain element (UCE) that model RM's subjective judgments as characteristics of the information content and uncertainty of his judgments are considered. It is shown that in the first version entropies have properties that are formally similar to those of Shannon entropy but due to absence of the law of large numbers (LLN) their interpretation fundamentally differs from the interpretation of Shannon entropy. In the third version there is an analog of the LLN, and its connection to the Shannon entropy was obtained for the expected value of *subjective informational content/uncertainty*. A subjective model $M(\widetilde{x}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}^{\varsigma,\varkappa}(\cdot,\cdot;\widetilde{x}), \mathrm{N}^{\varsigma,\varkappa}(\cdot,\cdot;\widetilde{x}))$ of an uncertain fuzzy element is considered, and an optimal subjective rule of identification of its states using observation data is obtained and studied. Methods of expert-aided reconstruction of fuzzy and uncertain fuzzy element models are also considered.

Keywords: probability, randomness, possibility, necessity, fuzziness, plausibility, belief, uncertainty.
PACS: 07.05.Kf.
Received 26 August 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 2. Pp. 125–140.

Сведения об авторе

Пытьев Юрий Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой;
тел.: (495) 939-13-32, e-mail: yuri.pytyev@physics.msu.ru, yuri.pytyev@gmail.com.