Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоксовом приближении

Е. А. Михайлов[1,a], И. О. Тепляков[2,b]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Объединенный институт высоких температур РАН (ОИВТ РАН). Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2.*
E-mail: [a] *ea.mikhajlov@physics.msu.ru,* [b] *igor.teplyakov@mail.ru*

Статья поступила 31.05.2017, подписана в печать 27.06.2017.

Получено аналитическое решение стационарного, осесимметричного уравнения движения для течения, вызванного неоднородным электрическим током, распространяющимся через электропроводную жидкость. Задача решена в переменных для завихренности и векторного потенциала скорости в полусферической геометрии с учетом конечного размера электродов. Использовались стоксово и электродинамическое приближениия.

Ключевые слова: скорость, проводящая среда, электрический ток, магнитное поле, векторный потенциал, завихренность.

УДК: 537.84. PACS: 47.65.–d.

Введение

Электровихревое течение возникает в результате взаимодействия неоднородного электрического тока, распространяющегося в электропроводной среде, с собственным магнитным полем. Данный вид задач возникает при моделировании электрометаллургических процессов, например электродугового и электрошлакового переплавов металла или электросварки.

Задачу о классическом ЭВТ в полусферическом контейнере можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим проводящую среду между двумя концентрическими полусферическими электродами. От малого электрода с радиусом a к большому электроду с радиусом b распространяется электрический ток I с плотностью $\mathbf{J}$. Ток создает магнитное поле $\mathbf{B}$, и в объеме жидкости возникает электромагнитная сила $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, приводящая жидкость в движение.

Логично начинать моделирование электровихревого течения с малых чисел Рейнольдса, используя так называемое «стоксово» приближение, тогда в уравнении Навье–Стокса можно отбросить нелинейные члены и ограничиться вязкими, что в некоторых случаях позволяет получить аналитическое решение. Заметим, что успехи в развитии вычислительной техники привели к тому, что на сегодняшний день бóльшая часть задач в гидродинамике решается численными методами, тем не менее аналитические решения могут быть использованы для верификации численных расчетов и к тому же представляют самостоятельный математический интерес.

Данная задача вызывает интерес исследователей с 70-х годов прошлого века. Аналитическое решение с точечным (бесконечно малым) центральным электродом в стоксовом приближении приведено в [2], а решение полного уравнения Навье–Стокса выполнено в той работе численно. В [3] численно-аналитическими методами получено решение задачи в обобщенной осесимметричной постановке с плоским малым электродом. В дальнейшем численное решение уравнений Навье–Стокса (с нелинейными членами) для электровихревого течения было проделано в большом количестве работ разных авторов. Говоря об исследованиях ЭВТ в целом, следует отметить цикл работ рижских исследователей из латвийского Института физики, выполненных в 1970-е — 1980-е гг., где исследовались ЭВТ во многих аспектах преимущественно теоретически (обобщением этих исследований стала монография [1]), и работы ОИВТ РАН, ведущиеся по настоящее время — преимущественно экспериментальные, для примера [4–6]. В прикладных аспектах исследования по этой теме также ведутся в ИМСС УрО РАН [7], МГТУ им. Г. И. Носова [8]. Из недавних зарубежных работ можно отметить работы [9, 10] которые были проведены при участии российских специалистов. Мы надеемся, что наша работа восполняет имеющийся пробел в исследованиях ЭВТ в возможных аналитических постановках.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в сферических координатах двумерную осесимметричную задачу об электровихревом течении [1, 6, 9]. Найдем выражение для электромагнитной силы $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, действующей в жидкости. Закон Ома для движущейся среды имеет вид $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$, при малом магнитном числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = UL\sigma\mu_0$ (для относительно малых

токов и малых скоростей) справедливо электродинамическое приближение, когда влиянием движения среды на электрический ток можно пренебречь, и тогда уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right)=-\nabla p+\rho\nu\Delta\mathbf{V}+\mathbf{F}. \qquad (1)$$

Для тока I, растекающегося в полусферу от точечного источника, выражение для единственной радиальной компоненты плотности тока J в сферических координатах выглядит следующим образом:

$$J(r)=\frac{I}{2\pi r^2}.$$

Магнитное поле найдем из решения уравнения Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}.$$

Записав уравнение для компоненты поля

$$(\nabla\times B_\varphi)_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(B_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\right)$$

и проинтегрировав, учтя, что на оси магнитное поле равно нулю, получаем

$$B(r,\theta)=-\frac{\mu_0 I(1-\cos\theta)}{2\pi r\sin\theta}.$$

Тогда выражение для электромагнитной силы запишется как

$$F_\theta(r,\theta)=-\frac{\mu_0 I^2(1-\cos\theta)}{4\pi^2 r^3\sin\theta}.$$

При малых скоростях, что соответствует малому току в ЭВТ и малому числу Рейнольдса, в уравнении Навье–Стокса можно отбросить нелинейные, инерционные члены и рассмотреть так называемое «стоксово» течение, иногда его еще называют «ползущим». Для стационарного ЭВТ уравнение будет иметь вид

$$\nabla p-\rho\nu\Delta\mathbf{V}=\mathbf{F}.$$

От неизвестного давления в двумерной задаче удобно избавляться, решая задачу в переменных завихренность — векторный потенциал скорости [9]. Введем векторный потенциал скорости $\boldsymbol{\psi}$ такой, что

$$\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\mathbf{V},$$

и завихренность $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{V}.$$

Дальнейший вывод вполне стандартен, приведем его из методических соображений. Подставив эти выражения в уравнение неразрывности ($\nabla\cdot\mathbf{V}=0$), получим

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\psi})=0.$$

Подставим выражение для векторного потенциала в выражение для завихренности:

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{V}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\psi}). \qquad (2)$$

Поскольку для поля скорости существует векторный потенциал, то поле потенциала соленоидально и, значит, $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$. Заменив двойной ротор отрицательным лапласианом в выражении (2), получим уравнение, связывающее векторный потенциал и завихренность:

$$\Delta\boldsymbol{\psi}=-\boldsymbol{\omega}.$$

Предположим, что левой частью уравнения (1) можно пренебречь. Применим к правой части уравнения операцию ротора, тогда

$$\nabla\times(\nabla p)=\nabla\times(\rho\nu\Delta\mathbf{V})+\nabla\times\mathbf{F}.$$

Левая часть, очевидно, равна нулю, в правой можно поменять порядок дифференцирования и тогда получаем уравнение для завихренности

$$\Delta\omega=-\frac{1}{\rho\nu}\nabla\times\mathbf{F}. \qquad (3)$$

Пока мы не вводили предположений о размерности задачи. Если задача осесимметрична, т. е. $\frac{\partial\ldots}{\partial\varphi}=0$, то в сферических координатах векторный потенциал скорости и завихренность будут иметь только одну компоненту:

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(0,0,\psi_\varphi(r,\theta)),\quad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(0,0,\omega_\varphi(r,\theta)).$$

Заметим, что при таком способе ввода функция тока и завихренность по определению являются векторными величинами, хотя и имеющими одну компоненту в рассматриваемой постановке, а значит, к ним следует применять правила преобразования для векторов, что актуально при использовании криволинейных систем координат — в дифференциальных операторах появляются добавки, обусловленные векторностью, и тогда исходное уравнение движения (1) сводится к решению уравнений Пуассона, где лапласиан — векторный.

Далее индекс φ опустим, т. е. полагаем, что скалярные величины $\omega\equiv\omega_\varphi$ и $\psi\equiv\psi_\varphi$.

В скалярном виде в сферических координатах стационарные уравнения для этих величин выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)-\frac{\psi}{r^2\sin^2\theta}=-\omega,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)-\frac{\omega}{r^2\sin^2\theta}=$$
$$=\frac{\mu_0 I^2(\cos\theta-1)}{2\pi^2\rho\nu r^4\sin\theta}.$$

Выражения для скорости могут быть найдены из компонент ротора векторного потенциала:

$$V_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\psi),\quad V_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}.$$

С целью обобщения можно привести уравнения к безразмерному виду, для этого введем следующие масштабы (величины с индексами «0»): линейный размер — радиус большого электрода b, плотность тока $J_0=I/b^2$, магнитное поле $B_0=\mu_0 I/b$, электромагнитная сила $F_0=\mu_0 I^2/b^3$, скорость $V_0=\sqrt{F_0 b/\rho}=I/b\sqrt{\mu_0/\rho}$, давление $p_0=\rho U_0^2$. Тогда можно получить

следующие безразмерные параметры: число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \sqrt{F_0 b^3/(\rho\nu^2)} = I/\nu\sqrt{\mu_0/\rho}$ и так называемый «параметр электровихревого течения» $S = \mathrm{Re}^2 = \mu_0 I^2/(\rho\nu^2)$, и уравнение (1) примет вид [9]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V} - \frac{1-\cos\theta}{4\pi^2 r^3 \sin\theta}\mathbf{e}_\theta. \quad (4)$$

Здесь величины p и $\mathbf{V}$ уже безразмерные, $\mathbf{e}_\theta$ — единичный вектор.

Уравнение (3) запишется как

$$\Delta\omega = -\,\mathrm{Re}\,\nabla\times\mathbf{F}. \quad (5)$$

На электродах, т. е. на твердых стенках, должно быть задано условие прилипания ($\mathbf{V} = 0$), на оси (при $\theta = 0$) условие симметрии. На поверхности (при $\theta = \pi/2$) может быть задано либо прилипание, либо условие свободной поверхности. В экспериментах на эвтектическом сплаве In–Ga–Sn на воздухе образуется пленка окисла и реализуется первый вариант, а в экспериментах на ртути — второй.

Для уравнений в переменных завихренность — векторный потенциал легко указать граничные условия для потенциала: $\psi = 0$, а для завихренности какие-либо очевидные физические соображения, позволяющие задать значение на стенке, отсутствуют. Тем не менее многие авторы для простоты полагают значение ω на стенке равным нулю, что не является достаточно обоснованным, но позволяет позволяет получить аналитическое решение. В численном расчете для завихренности можно использовать граничные условия Тома, Вудса, Фромма, Пирсона, Грязнова–Полежаева и др., удовлетворение которым происходит итеративно.

2. Аналитическое решение

Сначала нас будет интересовать решение уравнения

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right) - \frac{\omega}{r^2\sin^2\theta} = -f(r,\theta), \quad (6)$$

где

$$f(r,\theta) = \frac{A(1-\cos\theta)}{r^4\sin\theta}, \quad A = \frac{\mathrm{Re}}{2\pi^2}. \quad (7)$$

В качестве граничных условий возьмем следующие:

$$\omega|_{r=a} = \omega|_{r=b} = \omega|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

Для того чтобы воспользоваться в дальнейшем собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля в сферических координатах, введем вспомогательную функцию:

$$u(r,\theta,\varphi) = \omega(r,\theta)\cos\varphi.$$

Вычислим оператор Лапласа от данной функции:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(\omega\cos\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(\omega\cos\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\omega\cos\varphi) =$$
$$= \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right) - \frac{\omega}{r^2\sin^2\theta}\right\}\cos\varphi.$$

Таким образом, можно домножить обе части (6) на $\cos\varphi$ и получить уравнение для u

$$\Delta u = f\cos\varphi \quad (8)$$

с граничными условиями

$$u|_{r=a} = u|_{r=R} = u|_{\theta=\pi/2} = 0. \quad (9)$$

Решение мы будем искать в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля [11, 12] для полушарового слоя:

$$u_{nkm}(r,\theta,\varphi) = R_{nk}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

где

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi,$$

где $P_n^{(m)}$ — присоединенные функции Лежандра [12, 13]. С учетом вида (8) будут существенны лишь функции, для которых $m = 1$:

$$Y_n^{(1)}(\theta,\varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi.$$

Кроме того, граничные условия (9) при $\theta = \pi/2$ позволяют оставить среди слагаемых только четные $n = 2l$. Что касается радиальных функций $R_{nk}(r)$, то для них справедливо следующее представление [12]:

$$R_{nk}(r) = C_1\frac{J_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right)}{\sqrt{r}} + C_2\frac{N_{n+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_n^k}\right)}{\sqrt{r}},$$

где J — функция Бесселя, N — функция Неймана. Условие обращения в нуль при $r = a$ функции (9) дает нам соотношение

$$C_2 = -C_1 g_n(\lambda_n^k, a),$$

где

$$g_n = \frac{J_{n+1/2}\left(a\sqrt{\lambda_n^k}\right)}{N_{n+1/2}\left(a\sqrt{\lambda_n^k}\right)}.$$

Граничное условие при $r = b$ позволяет получить трансцендентное уравнение для собственных значений задачи Штурма–Лиувилля λ_n^k:

$$J_{n+1/2}\left(b\sqrt{\lambda_n^k}\right) - g_n(\lambda_n^k, a)N_{n+1/2}\left(b\sqrt{\lambda_n^k}\right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, можно представить функцию ω в виде суммы:

$$\omega = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Omega_{lk}}{\sqrt{r}}\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right) - g_n(\lambda_n^k, a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta).$$

Представим теперь правую часть уравнения (6) в виде аналогичного разложения:

$$f(r,\theta)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_{lk}}{\sqrt{r}}\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.$$
$$\left.-g_n(\lambda_n^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta).$$

Для коэффициентов в разложении можно получить

$$F_{lk}=\left\{\int_0^{\pi/2}\int_a^b\frac{f(r,\theta)}{\sqrt{r}}\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-g_n(\lambda_n^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\right\}\times$$
$$\times\left\{\int_0^{\pi/2}\int_a^b\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)^2\times$$
$$\left.\times(P_{2l}^{(1)}(\cos\theta))^2r\sin\theta\,dr\,d\theta\right\}^{-1}.$$

Интеграл в знаменателе вычисляется так:

$$S_{kl}=\int_0^{\pi/2}\int_a^b\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.$$
$$\left.-g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)^2\times$$
$$\times\left(P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)\right)^2r\sin\theta\,dr\,d\theta=$$
$$=\int_a^b\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.$$
$$\left.-g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)^2r\,dr\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}(P_{2l}^{(1)}(\cos\theta))^2\sin\theta\,d\theta=$$
$$=\frac{\pi l(2l+1)}{(4l+1)\lambda_{2l+1/2}^k}\left(b^2\left(J'_{2l+1/2}\left(b\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-g_{2l}(\lambda_{2l+1/2}^k,a)N'_{2l+1/2}\left(b\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}\right)\right)^2-$$
$$-a^2\left(J'_{2l+1/2}\left(a\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-g_{2l}(\lambda_{2l+1/2}^k,a)N'_{2l+1/2}\left(a\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k}\right)\right)^2\right).$$

С учетом явного вида функции (7) выражение для соответствующего интеграла несколько сложнее:

$$\int_0^{\pi/2}\int_a^b\frac{f(r,\theta)}{\sqrt{r}}\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.$$
$$\left.-g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta=$$
$$=AQ_{lk}M_l,$$

где

$$Q_{lk}=\int_a^b r^{-5/2}\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.$$
$$\left.-g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)dr,$$
$$M_l=\int_0^{\pi/2}P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)\,(1-\cos\theta)\,d\theta=\frac{(-1)^lC_{2l}^l}{2^{2l}}.$$

Можно показать, что первый из интегралов выражается при помощи гипергеометрической функции [14]:

$$Q_{lk}=\frac{{}_2F_1\left(\frac{2l-1}{2},\frac{2l+1}{2},\frac{4l+3}{2},-\frac{1}{4}b^2\lambda_{2l}^k\right)\left(b\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+1/2}}{2^{2l+1/2}(2l-1)b^{3/2}\Gamma(2l+3/2)}-$$
$$-\frac{{}_2F_1\left(\frac{2l-1}{2},\frac{2l+1}{2},\frac{4l+3}{2},-\frac{1}{4}a^2\lambda_{2l}^k\right)\left(a\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+1/2}}{2^{2l+1/2}(2l-1)a^{3/2}\Gamma(2l+3/2)}-$$
$$-2^{2l-1/2}g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)\frac{{}_2F_1\left(-(l+1),-\frac{4l-1}{2},-l,-\frac{1}{4}b^2\lambda_{2l}^k\right)}{\left(b\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+1/2}(l+1)b^{3/2}\Gamma(1/2-2l)}+$$
$$+2^{2l-1/2}g_{2l}(\lambda_{2l}^k,a)\frac{{}_2F_1\left(-(l+1),-\frac{4l-1}{2},-l,-\frac{1}{4}a^2\lambda_{2l}^k\right)}{\left(a\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+1/2}(l+1)a^{3/2}\Gamma(1/2-2l)}.$$

Если разбить уравнение (6) на компоненты суммы, то мы получим, что

$$-\lambda_{2l}^k\Omega_{lk}=-F_{lk}.$$

Тогда

$$\Omega_{lk}=\frac{F_{lk}}{\lambda_{2l}^k}.$$

Перейдем теперь ко второму уравнению:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)-\frac{\psi}{r^2\sin^2\theta}=-\omega. \tag{11}$$

Можно представить решение в виде

$$\psi=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_{lk}}{\sqrt{r}}\left(J_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)-\right.$$
$$\left.-g_n(\lambda_n^k,a)N_{2l+1/2}\left(r\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)\right)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta).$$

Действуя аналогично, для коэффициентов получим следующее выражение:

$$\Psi_{lk}=\frac{F_{lk}}{(\lambda_{2l}^k)^2}.$$

3. Приближенное решение

Рассмотрим приближенное решение, взяв старший порядок ($l=1$, $k=1$) и полагая, что $a\ll b$.

В таком случае при малых a можно полагать, что [12]

$$J_{2l+1/2}\left(a\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right) \cong \frac{\left(a\sqrt{\lambda_2^1}\right)^{5/2}\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}},$$

$$N_{2l+1/2}\left(a\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right) \cong \frac{3\sqrt{2}}{\left(a\sqrt{\lambda_2^1}\right)^{5/2}\sqrt{\pi}}.$$

Поэтому

$$g_{2l}(\lambda_2^1, a) \cong \frac{1}{5}\left(a\sqrt{\lambda_2^1}\right)^5.$$

Если a достаточно мал, то (10) можно приближенно свести к виду

$$J_{5/2}(b\sqrt{\lambda_2^1}) \cong 0.$$

Его решению соответствует

$$b\sqrt{\lambda_2^1} = 5.763.$$

Тогда S_{11} приблизительно будет равно

$$S_{11} \cong -\frac{3\pi}{5}b^2(J_{7/2}(5.763))^2 = -0.1897b^2.$$

Удерживая только слагаемые малости порядка не выше a^1, получим

$$Q_{11} \cong \frac{2.158}{b^{3/2}} - \frac{4.241}{a^{3/2}}\left(\frac{a}{b}\right)^{5/2}, \quad M_1 = -1/2.$$

Тогда

$$F_{11} = A\left(\frac{5.688}{b^{7/2}} - \frac{11.187a}{b^{9/2}}\right),$$

$$\Omega_{11} = A\left(\frac{0.1713}{b^{3/2}} - \frac{0.3368a}{b^{5/2}}\right),$$

$$\Psi_{11} = A\left(5.158\cdot 10^{-3}b^{1/2} - 1.0141\cdot 10^{-2}\frac{a}{b^{1/2}}\right).$$

Для решения получим

$$\omega = \frac{A}{\sqrt{r}}\left(\frac{0.5139}{b^{3/2}} - \frac{1.0104a}{b^{5/2}}\right)\times$$
$$\times\left(J_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right) - 1271.4\left(\frac{a}{b}\right)^5 N_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right)\right)\times$$
$$\times\sin\theta\cos\theta,$$

$$\psi = \frac{A}{\sqrt{r}}\left(1.547\cdot 10^{-2}b^{1/2} - 3.0423\cdot 10^{-2}\frac{a}{b^{1/2}}\right)\times$$
$$\times\left(J_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right) - 1271.4\left(\frac{a}{b}\right)^5 N_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right)\right)\times$$
$$\times\sin\theta\cos\theta.$$

Ему соответствуют такие компоненты скорости:

$$V_r = \frac{A}{r^{3/2}}\left(1.547\cdot 10^{-2}b^{1/2} - 3.0423\cdot 10^{-2}\frac{a}{b^{1/2}}\right)\times$$
$$\times\left(J_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right) - 1271.4\left(\frac{a}{b}\right)^5 N_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right)\right)\times$$
$$\times\left(3\cos^2\theta - 1\right).$$

$$V_\theta = -\frac{A}{r^{3/2}}\left(7.735\cdot 10^{-3}b^{1/2} - 1.5212\cdot 10^{-2}\frac{a}{b^{1/2}}\right)\times$$
$$\times\left(J_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right) - 1271.4\left(\frac{a}{b}\right)^5 N_{5/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right)\right)\times$$
$$\times\sin\theta\cos\theta -$$
$$-\frac{A}{\sqrt{r}}\left(1.547\cdot 10^{-2}b^{1/2} - 3.0423\cdot 10^{-2}\frac{a}{b^{1/2}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{2.882}{b}\left(J_{3/2}(5.763\frac{r}{b}) - J_{7/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right)\right) +\right.$$
$$\left.+\frac{3663.5}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^5\left(N_{7/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right) - N_{3/2}\left(5.763\frac{r}{b}\right)\right)\right)\times$$
$$\times\sin\theta\cos\theta.$$

Особую роль играет скорость на оси вращения сосуда, представленная на рис. 1. Векторы скорости движения жидкости представлены на рис. 2.

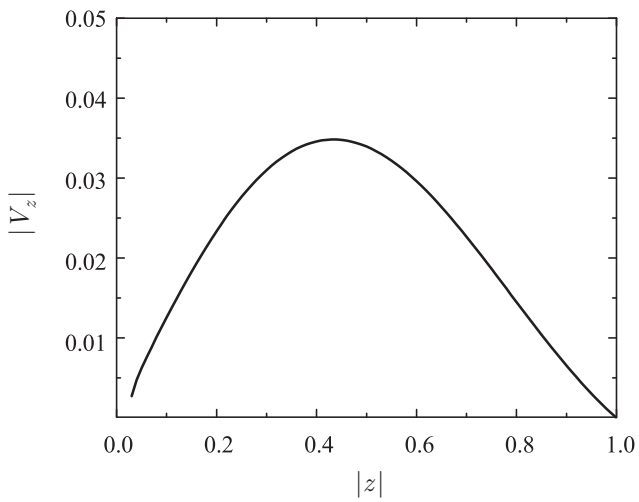

Рис. 1. Скорость жидкости на оси вращения сосуда при $a = 0.01$, $b = 1.00$

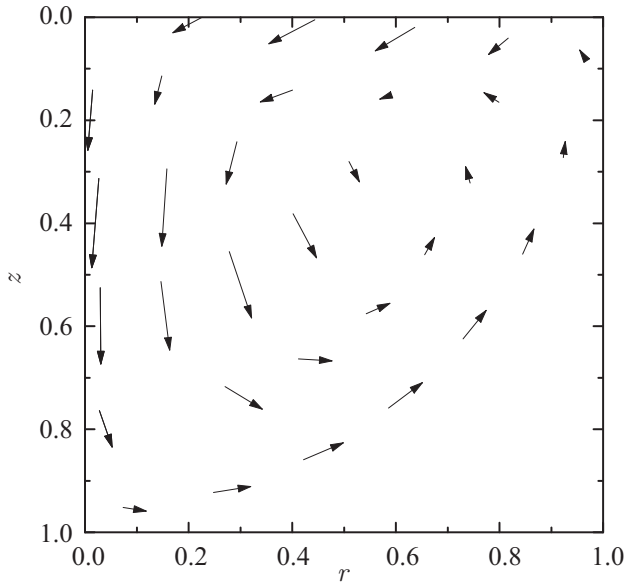

Рис. 2. Движение жидкости при $a = 0.01$, $b = 1.00$

Заключение

В ходе проведенного исследования получено аналитическое решение задачи об ЭВТ в полусфере, получена старшая мода для решения. Построенная модель может быть использована как для дальнейшего теоретического исследования электровихревого течения в полусферическом сосуде, так и для более полного понимания проводимых экспериментов.

Стоит отметить ряд ограничений, вытекающих из использованных модельных предположений. Так, использование только старшей моды для решения несколько искажает результат: численный расчет показывает, что центр вихря расположен несколько ближе к оси вращения. Затем использованные граничные условия, хотя и воспроизводят основные свойства задачи, соответствуют не твердым стенкам, а свободным границам. Наконец, решение в стоксовом приближении применимо при числе $S < 10^3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант №17-19-01745).

Список литературы

1. *Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И.* и др. // Электровихревые течения / Под ред. Э. В. Щербинина. Рига, 1985.
2. *Sozou C., Pickering W.M.* // J. Fluid Mech. 1976. **73**, Pt 4. P. 641.
3. *Sozou C., Pickering W.M.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. **362**. P. 509.
4. *Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Игумнов В.С., Оксман А.А.* // ТВТ. 1995. **33**, №1 С. 5.
5. *Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О.* // ТВТ. 2011. **47**, № 6 С. 957.
6. *Ivochkin Yu.P., Teplyakov I.O., Vinogradov D.A.* // Magnetohydrodynamics. 2016. **11**, N 1–2. P. 11.
7. *Ячиков И.М., Карандаева О.И., Ларина Т.П.* Моделирование электровихревых течений в ванне электродуговой печи постоянного тока. Магнитогорск, 2008.
8. *Хрипченко С.Ю.* // Электровихревые и магнитовихревые течения в плоских каналах технологических устройств: Дисс. ... д-ра техн. наук. Пермь: Пермский гос. ун-т, 2007.
9. *Shatrov V., Gerbeth G.* // Magnetohydrodynamics. 2012. **48**, N 3. P. 469.
10. *Kharicha A., Teplyakov I., Ivochkin Yu.* et al. // Experimental Thermal and Fluid Science. 2015. **62**. P. 192.
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
12. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Наука, 1993.
13. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трасцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Analytical solution of the problem of the electrovortex flow in the hemisphere with finite size electrodes in the Stokes approximation

E. M. Mikhailov[1,a], **I. O. Teplyakov**[2,b]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[2] *Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences. Moscow 125412, Russia.*
E-mail: [a] *ea.mikhajlov@physics.msu.ru,* [b] *igor.teplyakov@mail.ru.*

An analytical solution was obtained for a stationary axisymmetric motion equation for a flow caused by an inhomogeneous electric current propagating through an electrically conducting liquid. The problem was solved in the variables for vorticity and velocity vector potential in hemispherical geometry with the finite size electrodes. Stokes and electrodynamic approximations were used.

Keywords: velocity, conductive medium, electric current, magnetic field, vector potential, vorticity.
PACS: 47.65.–d.
Received 31 May 2017.
English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2018. **72**, No. 2. Pp. 162–167.

Сведения об авторах

1. Михайлов Евгений Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.
2. Тепляков Игорь Олегович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 361-16-73, e-mail: igor.teplyakov@mail.ru.