

Генерация второй гармоники под воздействием гравитационного поля Земли

А. Ф. Королев^а, Н. Н. Кошелев^б

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра фотоники и физики микроволн.*

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^а korolev_phys@mail.ru, ^б n.koshelev@mail.ru

Статья поступила 06.04.2017, подписана в печать 10.05.2017.

В работе произведена оценка гравитационного воздействия на слабoreлятивистский электрон, участвующий в процессе генерации микроволнового излучения. Показано, что такое воздействие приводит к генерации второй гармоники.

Ключевые слова: гравитация, электрон, дрейфовая трубка, микроволновое излучение.

УДК: 531.51. PACS: 04.20.-q, 04.40.-b.

Введение

В 1967 г. в работе [1] были приведены результаты эксперимента по изучению гравитационных свойств электронов. В этих экспериментах измерялось время пролета свободно движущихся медленных электронов (с энергией $W_{el} = 10^{-9}$ эВ) внутри медной трубки под действием гравитационного поля Земли. В стенках проводящей трубки из-за действия гравитационной силы свободные электроны перераспределялись, создавая однородное электрическое поле порядка $mg/e_0 = 5.6 \cdot 10^{-11}$ В/м, где m — инертная масса электрона, g — гравитационное ускорение макроскопической нейтральной материи и e_0 — абсолютное значение электрического заряда электрона.

В силу непрерывности касательной составляющей вектора $\mathbf{E}$ на границах раздела сред такое же электрическое поле должно существовать и в вакуумной области, окруженной медной трубкой. Поэтому в эксперименте [1] суммарная сила, действующая на медленно движущийся электрон, должна быть равной нулю.

Эксперимент показал, что вертикальная составляющая суммарной силы, действующей на электрон, падающий вдоль оси вертикальной медной трубки диаметром 5 см, меньше $0.09 mg$.

Однако этот результат, как справедливо отмечено в работе [2], не позволяет ничего сказать о гравитационной массе электрона, так как внутри проводящей дрейфовой трубки гравитационная сила, действующая на электрон, полностью компенсируется электрической силой, вызванной перераспределением свободных электронов в стенке дрейфовой трубки под действием того же внешнего гравитационного поля. Так как такая компенсация происходит при любом значении отношения гравитационной массы электрона к его инертной массе (даже при равном нулю или отрицательном!), то этот эксперимент оказывается нечувствительным ни к величине гравитационной массы электрона, ни к ее знаку.

Поэтому результатом гравитационных экспериментов [1] с электронами является лишь утверждение [2], что сила гравитации, действующая на электроны в стенке дрейфовой трубки, такая же, как и сила гравитации, действующая на свободные электроны, находящиеся в вакууме на оси дрейфовой трубки.

Этот пример наглядно демонстрирует важность полной и всесторонней теоретической разработки экспериментов по изучению гравитационных свойств элементарных частиц и прежде всего разработки такого эксперимента, который позволяет проверить гравитационные свойства электрона и измерить отношение его гравитационной массы к инертной массе.

Поэтому возникает необходимость провести расчеты и выяснить, при каких условиях гравитационные свойства электронов могут наиболее ярко проявиться и к каким эффектам приведет влияние гравитационного поля Земли на электроны в различных электронных устройствах.

В научной литературе были многочисленные предложения по проведению и других экспериментов по изучению гравитационных свойств фотонов [3–10], нейтрино [11–13], антипротонов [14] и ионов [15, 16] во внешних электромагнитных и гравитационных полях, однако для электронов их пока нет.

В настоящей работе будет рассмотрена возможность использования генераторов микроволнового электромагнитного излучения для изучения гравитационных свойств слабoreлятивистских электронов (с энергией $W_{el} \sim 1$ кэВ).

В большинстве таких генераторов основным действующим лицом является электрон. Именно потоки электронов, двигаясь во внешних электромагнитных полях, создают это излучение. Конструктивно это могут быть клистроны, магнетроны, лампы бегущей волны и другие вакуумные электронные устройства. Так как эти устройства находятся в гравитационном поле Земли, то на электроны должна действовать

сила притяжения к Земле $F_g = m_g g$, где m_g — гравитационная масса электрона, g — ускорение свободного падения.

Согласно принципу эквивалентности Эйнштейна [17] гравитационная масса любого материального объекта совпадает с его инертной массой m_{ik} . Так как для электрона $m_{ik} = m_g$, то $F_g = 0.9 \cdot 10^{-24}$ г·см/с². Эта сила по земным меркам очень мала, однако при определенных условиях она может оказать влияние на спектральные характеристики микроволнового излучения.

Целью настоящей работы является оценка изменения спектра излучения слабoreлятивистского электрона под действием гравитационного взаимодействия.

Постановка задачи

Предположим, что в лаборатории, расположенной на поверхности Земли, покоится генератор микроволнового излучения, например квазиоптический гиротрон. Поместим начало декартовой системы координат в центр Земли.

Ориентируем оси этой системы координат так, чтобы ось Ox проходила через точку на поверхности Земли, в которой расположен генератор микроволнового излучения, а ось Oz была параллельна вектору $\mathbf{B}_0$, создаваемому соленоидом этого генератора. Ось Oy направляем так, чтобы система координат была правая. Будем считать, что создаваемое соленоидом магнитное поле $\mathbf{B}_0$ является постоянным и однородным в той области, где слабoreлятивистский электрон движется в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Радиус-вектор электрона в этой системе координат будем обозначать через $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$.

Уравнения движения электрона с массой m_0 и зарядом $e = -e_0 = -1.6 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ во внешнем электромагнитном и гравитационном полях в четырехмерной записи [18] имеют вид

$$m_0 c \left\{ \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kn}^i u^k u^n \right\} = \mathcal{F}^i, \quad (1)$$

где c — скорость света, $ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$ — интервал, $u^i = dx^i/ds$ — четырехвектор скорости, Γ_{kn}^i — символы Кристоффеля второго рода, $\mathcal{F}^i$ — четырехвектор силы, действующий на частицу, g_{ik} — метрический тензор с ковариантными (нижними) индексами.

Существует и обратный ему метрический тензор с контравариантными (верхними) индексами g^{ik} , определяемый из системы уравнений

$$g^{ik} g_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k, \\ 0, & \text{если } n \neq k. \end{cases}$$

Мы будем использовать правило суммирования Эйнштейна: по двум индексам, обозначенным одной и той же буквой, если один из них расположен сверху, а другой — внизу, предполагается сумми-

рование по всей совокупности значений, которые может принимать эта буква. У нас буквы латинского алфавита ($i, j, k, n, \dots$) могут принимать значения (0, 1, 2, 3), а греческого алфавита — (1, 2, 3).

Символы Кристоффеля второго рода получаем [18] дифференцированием метрического тензора:

$$\Gamma_{kn}^i = \frac{1}{2} g^{ip} \left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{pn}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^p} \right]. \quad (2)$$

Четырехмерная сила, действующая в электромагнитном поле на частицу с зарядом e , имеет вид

$$F^i = \frac{e}{c} F_{\bullet k}^i u^k, \quad (3)$$

где $F_{ik} = -F_{ki}$ — тензор электромагнитного поля.

Согласно [18] компоненты этого тензора связаны с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ соотношениями $E_\alpha = F_{0\alpha}$, $B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$.

Поэтому тензор F_{ik} можно представить в виде матрицы, элементами которой являются компоненты этих векторов:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Однако в такой постановке уравнения движения (1) имеют чрезвычайно громоздкий вид.

В случае слабoreлятивистского движения электрона эти уравнения можно разложить по степеням малого параметра, равного отношению величины гравитационной силы к величине магнитной части силы Лоренца.

В качестве гравитационного поля мы будем рассматривать гравитационное поле Земли на ее поверхности, которое будем считать сферически симметричным (приведенные квадрупольный момент и высшие мультипольные моменты Земли, как известно [19], не превышают 10^{-3} и в нашей задаче могут не учитываться).

Безразмерный гравитационный потенциал Земли $U \sim 10^{-9}$, поэтому при $R \sim R_\oplus$ его можно записать в виде $U = GM/(c^2 R)$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли.

Метрический тензор псевдориманова пространства-времени для нашей задачи запишем в постньютоновском [20] виде

$$g_{00} = 1 - 2U, \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} [1 + 2\gamma U], \quad (5)$$

где γ — постньютоновский параметр, который в общей теории относительности Эйнштейна равен единице, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Остальные компоненты метрического тензора g_{ik} равны нулю.

Закон движения слабoreлятивистского электрона в электромагнитном и гравитационном полях

В рассматриваемой задаче на слабoreлятивистский электрон действуют постоянное и однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$, гравитационное

поле $\mathbf{F}_g$ и электрическое поле $\mathbf{E}_g$, создаваемое в вакуумной области перераспределением электронов в проводящей оболочке, окружающей квазиоптический гиротрон.

Так как поля, излучаемые этой лампой, пропорциональны $d^2\mathbf{r}/dt^2$, то для определения влияния гравитационного поля Земли на спектр излучения нам необходимо найти решение уравнения (1).

Для этого нам надо в первую очередь определить напряженность электрического поля, создаваемого перераспределением свободных электронов в металлической оболочке под действием гравитационного поля. Рассмотрим какой-либо электрон оболочки. В установившемся режиме он находится в покое в некоторой точке $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$. Так как для покоящейся частицы четырехвектор скорости [18] имеет вид $u^i = \{u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}, 0, 0, 0\} = \{1/\sqrt{1-2U}, 0, 0, 0\}$, то из уравнений (1) найдем компоненты тензора электромагнитного поля, соответствующие компонентам вектора напряженности электрического поля внутри металлической оболочки:

$$F_{\bullet 0}^{\alpha\bullet} = -\frac{m_0}{e_0} \frac{GMX^\alpha}{R^3(1+2\gamma U)\sqrt{1-2U}}. \quad (6)$$

В силу непрерывности касательной составляющей вектора $\mathbf{E}_g$ на границах раздела сред такое же электрическое поле должно существовать и во всех точках вакуумной области, окруженной металлической трубкой.

Рассмотрим теперь электрон, движущийся в вакуумной области под действием постоянного и однородного магнитного поля $\mathbf{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$, гравитационного поля $\mathbf{F}_g$ и электрического поля $\mathbf{E}_g$.

Комбинируя временную ($i = 0$) и пространственные ($i = \alpha$) компоненты четырехмерного уравнения (1), учитывая соотношения (2)–(6), приведем его к привычному трехмерному виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = & -\frac{e_0[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]}{m_0c(1+2\gamma U)}\sqrt{1-2U-\beta^2(1+2\gamma U)} + \\ & + \left\{ \frac{GM(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{v}}{c^2R^3} \left[\frac{2}{(1-2U)} - \frac{\sqrt{1-2U-\beta^2(1+2\gamma U)}}{(1-2U)^{3/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\gamma}{(1+2\gamma U)} \right] + \frac{GMR}{R^3(1+2\gamma U)} \left[\frac{\sqrt{1-2U-\beta^2(1+2\gamma U)}}{(1-2U)^{1/2}} - 1 - \gamma\beta^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\beta = v/c$, $\mathbf{g} = \{g = GM/R_\oplus^2, 0, 0\}$.

Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части уравнения (7), представляет поправку первого порядка малости по отношению к остальным слагаемым правой части. Поэтому решение этих уравнений будем искать также в виде разложения [21] по этому малому параметру:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\oplus + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1,$$

где $\mathbf{R}_\oplus$ — радиус-вектор центра вакуумной полости; $\mathbf{R}_0$ — часть вектора $\mathbf{R}$; вызываемая движением электрона в магнитном поле; $\mathbf{R}_1$ — часть вектора $\mathbf{R}$, возникающая из-за действия на электрон гравитационной силы и поля $\mathbf{E}_g$.

Не ограничивая общности, будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ электрон находился в окрестности точки $\mathbf{R}_\oplus = \{R_\oplus, 0, 0\}$ и скорость электрона в этот момент времени была равна $\mathbf{v}_{(0)}(0) = \{v_0 \cos \Psi, v_0 \sin \Psi, 0\}$. Тогда в качестве начальных условий для уравнения (7) запишем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(0)}(0) &= \{X_0, Y_0, 0\}, \quad \mathbf{R}_{(1)}(0) = \{0, 0, 0\}, \\ \mathbf{v}_{(1)}(0) &= \{0, 0, 0\}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем $X_0^2 + Y_0^2 \ll R_\oplus^2$.

По порядку величины справедливы оценки $|\mathbf{R}_0|/R_\oplus \sim 10^{-7}$, $|\mathbf{R}_{(1)}| \ll |\mathbf{R}_{(0)}|$. Поэтому $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{(0)} + \mathbf{v}_{(1)}$ и с требуемой точностью можно записать:

$$\begin{aligned} U &= U_\oplus \left[1 - \frac{(\mathbf{R}_{(0)}\mathbf{R}_\oplus)}{R_\oplus^2} \right] = U_\oplus + \frac{(\mathbf{g}\mathbf{R}_{(0)})}{c^2}, \\ \mathbf{v}^2 &= \mathbf{v}_{(0)}^2 + 2(\mathbf{v}_{(0)}\mathbf{v}_{(1)}). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (7) и разлагая его в ряд по малому параметру, в невозмущенном приближении получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(0)} = \frac{d^2\mathbf{R}_{(0)}}{dt^2} = & -\frac{e_0[\mathbf{v}_{(0)}\mathbf{B}_0]}{m_0c(1+2\gamma U_\oplus)}\sqrt{1-2U_\oplus-\beta_{(0)}^2(1+2\gamma U_\oplus)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $U_\oplus = -GM/(c^2R_\oplus)$ — гравитационный потенциал в центре вакуумной области, $v_{(0)} = dR_{(0)}/dt$, $\beta_{(0)} = v_{(0)}/c$.

В силу начальных условий (8) решение уравнения (9) имеет вид

$$\begin{aligned} X_{(0)}(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \Psi) + X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi, \\ Y_{(0)}(t) &= -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \Psi) + Y_0 + \frac{v_0}{\omega} \cos \Psi, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\omega = \frac{e_0B_0\sqrt{1-2U_\oplus-\beta_{(0)}^2(1+2\gamma U_\oplus)}}{m_0c(1+2\gamma U_\oplus)} = \text{const.}$

В следующем приближении уравнение (7) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(1)} = \frac{d^2\mathbf{R}_{(1)}}{dt^2} = & -\frac{e_0[\mathbf{v}_{(1)}\mathbf{B}_0]}{m_0c(1+2\gamma U_\oplus)}\sqrt{1-2U_\oplus-\beta_{(0)}^2(1+2\gamma U_\oplus)} - \\ & - \left\{ \frac{(\mathbf{v}_{(0)}\mathbf{g})\mathbf{v}_{(0)}}{c^2} \left[\frac{2}{1-2U_\oplus} - \frac{\sqrt{1-2U_\oplus-\beta_{(0)}^2(1+2\gamma U_\oplus)}}{(1-2U)^{3/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\gamma}{(1+2\gamma U_\oplus)} \right] + \frac{\mathbf{g}}{(1+2\gamma U_\oplus)} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\sqrt{1-2U_\oplus-\beta_{(0)}^2(1+2\gamma U_\oplus)}}{\sqrt{(1-2U_\oplus)}} - 1 - \gamma\beta_{(0)}^2 \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{e_0 [\mathbf{v}_{(0)} \mathbf{B}_0]}{m_0 c \sqrt{1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})}} \times \\ \times \left\{ \frac{(\mathbf{gR}_0)}{c^2} \frac{1 + \gamma \beta_{(0)}^2}{(1 + 2\gamma U_{\oplus})} + \frac{(\mathbf{v}_{(0)} \mathbf{v}_{(1)})}{c^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma (\mathbf{gR}_0)}{c^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})^2} [1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})] \right\}.$$

Вводя обозначения

$$A_1 = \beta_{(0)}^2 \left[\frac{2}{1 - 2U_{\oplus}} - \frac{\sqrt{1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})}}{(1 - 2U_{\oplus})^{3/2}} + \frac{2\gamma}{(1 + 2\gamma U_{\oplus})} \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{(1 + 2\gamma U_{\oplus})} \times \\ \times \left[\frac{\sqrt{1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})}}{\sqrt{(1 - 2U_{\oplus})}} - 1 - \gamma \beta_{(0)}^2 \right],$$

$$A_3 = \frac{e_0 \beta_0 B_0}{m_0 c^2 \sqrt{1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})}} \times \\ \times \left\{ \frac{1 + \gamma \beta_{(0)}^2}{(1 + 2\gamma U_{\oplus})} + \frac{2\gamma}{(1 + 2\gamma U_{\oplus})^2} [1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})] \right\},$$

$$A_4 = \frac{e_0 \beta_0^2 B_0}{m_0 c \sqrt{1 - 2U_{\oplus} - \beta_{(0)}^2 (1 + 2\gamma U_{\oplus})}},$$

спроецируем это уравнение на оси Ox и Oy :

$$\ddot{X}_{(1)} + \omega \dot{Y}_{(1)} = gA_1 \cos^2(\omega t + \Psi) + gA_2 - \\ - gA_3 \left[\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \Psi) + X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi \right] \sin(\omega t + \Psi) + \\ + A_4 [\dot{X}_{(1)} \cos(\omega t + \Psi) + \dot{Y}_{(1)} \sin(\omega t + \Psi)] \sin(\omega t + \Psi), \quad (11)$$

$$\ddot{Y}_{(1)} - \omega \dot{X}_{(1)} = gA_1 \cos(\omega t + \Psi) \sin(\omega t + \Psi) + \\ + gA_3 \left[\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \Psi) + X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi \right] \cos(\omega t + \Psi) - \\ - A_4 [\dot{X}_{(1)} \cos(\omega t + \Psi) + \dot{Y}_{(1)} \sin(\omega t + \Psi)] \cos(\omega t + \Psi),$$

где точка обозначает производную по времени.

Умножая первое уравнение системы (11) на $\cos(\omega t + \Psi)$, а второе на $\sin(\omega t + \Psi)$ и складывая их, получим

$$\frac{d}{dt} [\dot{X}_{(1)} \cos(\omega t + \Psi) + \dot{Y}_{(1)} \sin(\omega t + \Psi)] = \\ = g(A_1 + A_2) \cos(\omega t + \Psi).$$

Отсюда следует, что

$$\dot{X}_{(1)} \cos(\omega t + \Psi) + \dot{Y}_{(1)} \sin(\omega t + \Psi) = \\ = C_0 + \frac{g(A_1 + A_2)}{\omega} \sin(\omega t + \Psi), \quad (12)$$

где C_0 — константа интегрирования.

Умножим теперь первое уравнение системы (11) на $-\sin(\omega t + \Psi)$, а второе на $\cos(\omega t + \Psi)$ и сло-

жим их. Учитывая соотношение (12), в результате получим

$$\frac{d}{dt} [-\dot{X}_{(1)} \sin(\omega t + \Psi) + \dot{Y}_{(1)} \cos(\omega t + \Psi)] = \\ = -gA_2 \sin(\omega t + \Psi) + \\ + gA_3 \left[\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \Psi) + X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi \right] - \\ - A_4 C_0 - \frac{gA_4(A_1 + A_2)}{\omega} \sin(\omega t + \Psi).$$

Поэтому

$$-\dot{X}_{(1)} \sin(\omega t + \Psi) + \dot{Y}_{(1)} \cos(\omega t + \Psi) = \\ = C_1 + \frac{g}{\omega^2} [A_2 \omega - A_3 v_0 + A_4(A_1 + A_2)] \cos(\omega t + \Psi) + \\ + \left[gA_3(X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi) - A_4 C_0 \right] t, \quad (13)$$

где C_1 — константа интегрирования.

Из начальных условий (7) следует, что

$$C_0 = -\frac{g(A_1 + A_2)}{\omega} \sin \Psi,$$

$$C_1 = -\frac{g}{\omega^2} [A_2 \omega - A_3 v_0 + A_4(A_1 + A_2)] \cos \Psi.$$

Разрешая соотношения (12) и (13) относительно $\dot{X}_{(1)}$ и $\dot{Y}_{(1)}$, найдем

$$\dot{X}_{(1)} = \frac{g}{2\omega^2} [A_1 \omega + A_3 v_0 - A_4(A_1 + A_2)] \sin 2(\omega t + \Psi) - \\ - \left[gA_3(X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi) - A_4 C_0 \right] t \sin(\omega t + \Psi) + \\ + C_0 \cos(\omega t + \Psi) - C_1 \sin(\omega t + \Psi),$$

$$\dot{Y}_{(1)} = \frac{g}{2\omega^2} [A_4(A_1 + A_2) - A_1 \omega - A_3 v_0] \cos 2(\omega t + \Psi) + \\ + C_0 \sin(\omega t + \Psi) + C_1 \cos(\omega t + \Psi) + \\ + \frac{g}{2\omega^2} [(A_1 + 2A_2)\omega - A_3 v_0 + A_4(A_1 + A_2)] + \\ + \left[gA_3(X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi) - A_4 C_0 \right] t \cos(\omega t + \Psi).$$

Интегрируя эти выражения еще раз, получим

$$X_{(1)} = C_2 - \\ - \frac{g}{4\omega^3} [A_1 \omega + A_3 v_0 - A_4(A_1 + A_2)] \cos 2(\omega t + \Psi) + \\ + \frac{1}{\omega^2} \left[gA_3(X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi) - A_4 C_0 \right] \times \\ \times [\omega t \cos(\omega t + \Psi) - \sin(\omega t + \Psi)] + \\ + \frac{1}{\omega} [C_0 \sin(\omega t + \Psi) + C_1 \cos(\omega t + \Psi)], \quad (14)$$

$$Y_{(1)} = \frac{g}{4\omega^3} [A_4(A_1 + A_2) - A_1 \omega - A_3 v_0] \sin 2(\omega t + \Psi) + \\ + \frac{1}{\omega} [C_1 \sin(\omega t + \Psi) - C_0 \cos(\omega t + \Psi)] + \\ + \frac{g}{2\omega^2} [(A_1 + 2A_2)\omega - A_3 v_0 + A_4(A_1 + A_2)] t + \\ + \frac{1}{\omega^2} \left[gA_3(X_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \Psi) - A_4 C_0 \right] \times \\ \times [\omega t \sin(\omega t + \Psi) + \cos(\omega t + \Psi)].$$

Соотношения (10) и (14) дают закон движения слабoreлятивистского электрона в первых двух приближениях теории возмущений. Следует, однако,

отметить, что уравнение (9) справедливо только при выполнении условия $v_{(1)} \ll v_0$. Поэтому и его решение (14) можно использовать, если и только если $|\dot{X}_{(1)}| \ll v_0$, $|\dot{Y}_{(1)}| \ll v_0$. Эти условия ограничивают применимость выражений (10) и (14) временным промежутком $0 \leq t \leq v_0/|gA_3(X_0 - v_0 \sin \Psi/\omega) - A_4 C_0|$.

Заключение

Из выражений (10) и (14) следует, что в рассматриваемых условиях электрон участвует в нескольких парциальных движениях. В асимптотически главном приближении он движется по окружности радиуса v_0/ω с частотой ω . В приближении малого сигнала он дрейфует со скоростью $g[(A_1 + 2A_2)\omega - A_3 v_0 + A_4(A_1 + A_2)]/(2\omega^2)$ в направлении, перпендикулярном векторам $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{g}$, движется с частотой ω по окружности, радиус которой растёт линейно со временем, а также совершает движение по окружности радиусом $|g[A_4(A_1 + A_2) - A_1\omega - A_3 v_0]|/(4\omega^3)$ с удвоенной частотой.

Таким образом, в излучении электрона будет присутствовать вторая гармоника, амплитуда которой пропорциональна $g\beta_0^2$, и эта гармоника является прямым проявлением влияния гравитационного поля на закон движения электрона.

Список литературы

1. Witteborn F.C., Fairbank W.M. // Phys. Rev. Lett. 1967. **19**. P. 1049.
2. Darling T.W., Rossi F., Opat G.I., Moorhead G.F. // Rev. of Modern Phys. 1992. **64**. P. 237.
3. Denisov V.I., Denisov M.I. // Physical Review D. 1999. **60**, N 4. P. 047301.
4. Denisov V.I., Denisova I.P., Sokolov V.A. // Theoretical and Mathematical Physics. 2012. **172**. P. 1321.
5. Тупышев В.Г. // УФН. 2009. **179**. С. 3.
6. Denisov V.I., Sokolov V.A., Vasili'ev M.I. // Phys. Rev. D. 2014. **90**, N 2. P. 023011.
7. Turyshev S.G., Williams J.G. // Intern. J. Mod. Phys. 2007. **D16**. P. 2165.
8. Denisov V.I., Ilyina V.A., Sokolov V.A. // Int. J. of Modern Physics D. 2016. **25**, N 11. 1640003.
9. Denisov V.I., Sokolov V.A. // JETP. 2011. **113**, N 6. P. 926.
10. Denisov V.I., Shvilkin B.N., Sokolov V.A., Vasili'ev M.I. // Phys. Rev. D. 2016. **94**. 045021.
11. Weber J. // Gravitational Measurements, Fundamental Metrology and Constant / Ed. by V. De Sabbata. Kluwer Academic Press, 1988. P. 467.
12. Rrauss L.M., Tremaine S. // Phys. Rev. Lett. 1988. **60**. P. 176.
13. Denisov V.I., Denisova I.P., Svertilov S.I. // Theoretical and Mathematical Physics. 2004. **138**, N 1. P. 142.
14. Andersen G.B. et al. (ALPHA Collaboration) // Phys. Rev. Lett. 2010. **105**. P. 013003.
15. Denisov V.I., Kravtsov N.V. // Quantum Electronics. 2002. **32**, N 9. P. 833.
16. Denisov V.I., Kravtsov N.V., Krivchenkov I.V. // Optics and Spectroscopy. 2006. **100**, N 5. P. 641.
17. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: Работы по теории относительности 1905–1920 / Под ред. И. Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б. Г. Кузнецова.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
19. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Недра, 1978.
20. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. Энергоатомиздат, 1985.
21. Дубошин Г.Н. Аналитические и качественные методы. 3-е изд. 1978.

Second harmonic generation under the influence of the Earth's gravitational field

A. F. Korolev^a, N. N. Koshelev^b

Department of Photonics and Physics of Microwaves, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^akorolev_phys@mail.ru, ^bn.koshelev@mail.ru.

The influence of the Earth's gravitational field on a weakly relativistic electron involved in the process of generation of microwave radiation is evaluated. It is shown that such exposure leads to the generation of a second harmonic.

Keywords: gravity, electron, drift tube, microwave radiation.

PACS: 04.20.-q, 04.40.-b.

Received 6 April 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 2. Pp. 168–172.

Сведения об авторах

1. Королёв Анатолий Фёдорович — канд. физ.-мат. наук, доцент, и. о. зав. кафедрой; тел. (495) 939-42-09, e-mail: korolev_phys@mail.ru.
2. Кошелев Николай Николаевич — инженер; e-mail: n.koshelev@mail.ru.