Эволюция акустического излучения ансамбля вихревых колец в воздухе

Д. Ю. Черкасов[a], Ф. В. Шугаев[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] dre21@yandex.ru, [b] shugaev@phys.msu.ru

Статья поступила 20.03.2017, подписана в печать 19.06.2017.

Исследована эволюция акустического излучения от ансамбля вихревых колец в воздухе на основе нестационарных уравнений Навье–Стокса. Использованы разложения искомых функций в ряд по степеням начальной завихренности, которая считается малой величиной. Система уравнений Навье–Стокса сводится к параболической системе с постоянными коэффициентами при старших производных. Задача ставится следующим образом. Завихренность определена внутри тороида при $t = 0$. Остальные параметры газа полагаются постоянными во всем пространстве в начальный момент времени. Решение выражается через кратные интегралы, которые рассчитываются с помощью сеток Коробова. Исследованы колебания плотности. Результаты показывают, что спектр частот зависит от времени, а именно при малых временах наблюдаются высокочастотные колебания, затем появляются низкочастотные колебания. В то же время амплитуда высокочастотных колебаний уменьшается по сравнению с низкочастотными. Таким образом, происходит переход энергии от высокочастотного спектра к низкочастотному. Представленные результаты могут быть полезны для моделирования затухающей сеточной турбулентности.

Ключевые слова: ансамбль вихревых колец, акустическое излучение, уравнения Навье–Стокса, переход энергии от высокочастотных колебаний к низкочастотным.

УДК: 534-13. PACS: 47.32.–y.

Введение

Вихревые структуры (вихревые кольца и цилиндрические вихри) играют важную роль в излучении звука в газовых потоках. Излучение звука вихревыми структурами было детально рассмотрено в [1, 2]. Исследование акустического излучения от системы двух вихревых колец выполнено в [3, 4]. Влияние вихревого кольца на свойства турбулентного потока подтверждено многочисленными экспериментами [5, 6] и расчетами [7, 8]. Акустическое излучение изолированного вихревого кольца в воздухе проанализировано в [9]. Мы исследовали эволюцию акустического излучения, испускаемого ансамблем вихревых колец в воздухе. Анализ основан на нестационарных уравнениях Навье–Стокса. Используются разложения искомых функций в ряд по степеням малого параметра. Уравнения Навье–Стокса сводятся к параболической системе с постоянными коэффициентами. В результате мы получаем решение в виде степенного ряда с кратными интегралами при постоянных коэффициентах. Первый член ряда определяет свойства акустического излучения при малой начальной завихренности, которая служит малым параметром. Далее анализируется эволюция излучения с течением времени.

1. Основные уравнения

Используется разложение Гельмгольца поля скоростей на потенциальную и соленоидальную части.

Уравнения Навье–Стокса в безразмерной форме могут быть представлены в виде [9]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_i}{\partial t} &= \exp[w + 0.75h]\,\Delta\Omega_i + \\
&+ \frac{3}{4} e_{ijk} \exp[w + 0.75h] \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_m} - \\
&- v_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - s\Omega_i + f_{1i}, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + s, \qquad (1) \\
\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{e^h}{\gamma}\,\Delta w + \frac{4}{3} \exp[w + 0.75h]\,\Delta s - \\
&- \left(\frac{1}{\gamma} e^h + 0.5 s \exp[w + 0.75h] \right) \Delta h + \\
&+ 1.5 \exp[w + 0.75h] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} + f_2, \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\gamma}{Pr} \exp[w + 0.75h]\,\Delta h - (\gamma - 1)\, s - v_j \frac{\partial h}{\partial x_j} - \\
&- \frac{2}{3}\gamma(\gamma - 1) \exp[w - 0.25h]\, s^2 + f_3,
\end{aligned}$$

$$\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad s = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad w = -\ln \rho, \quad h = \ln T,$$

$$\nu = \mu/\rho, \quad \Pr = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i},$$

$$i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3.$$

Здесь v_i — компонента скорости, e_{ijk} — антисимметричный тензор, ρ, T, $\mathbf{v}$ — безразмерные вели-

чины плотности, температуры, скорости (деленные на $\rho_0 = 1.225$ кг/м^3, $T_0 = 300$ K, c_0 соответственно), μ, ν, λ — коэффициенты динамической вязкости, кинематической вязкости и теплопроводности, c — низкочастотная скорость звука, c_0 — скорость звука в воздухе, γ — показатель адиабаты, Pr — число Прандтля, c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Значения времени и координат отнесены к соответствующим характеристическим величинам: характеристической длине $l_0 = \nu_0/c_0$ и характеристическому времени $t_0 = \nu_0/c_0^2$.

При выводе системы (1) учтено уравнение Менделеева–Клапейрона, а также считается, что зависимости вязкости μ и теплопроводности λ от температуры выражаются степенным законом:

$$\mu/\mu_0 = T^{0.75}, \quad \lambda/\lambda_0 = T^{0.75}.$$

Функции f_{1i}, f_2, f_3 — нелинейные члены по отношению к первым производным по координатам. Индекс «0» относится к начальному состоянию, которое должно быть однородным.

1.1. Начальные данные задачи

Как известно, сеточная турбулентность в максимальной степени близка к однородной изотропной турбулентности. Сеточная турбулентность возникает при прохождении газового потока через систему отверстий в плоской пластине. В результате в потоке образуются вихревые кольца. В наших расчетах ансамбль вихревых колец состоит из двух слоев по четыре кольца в каждом и в некоторой мере моделирует сеточную турбулентность.

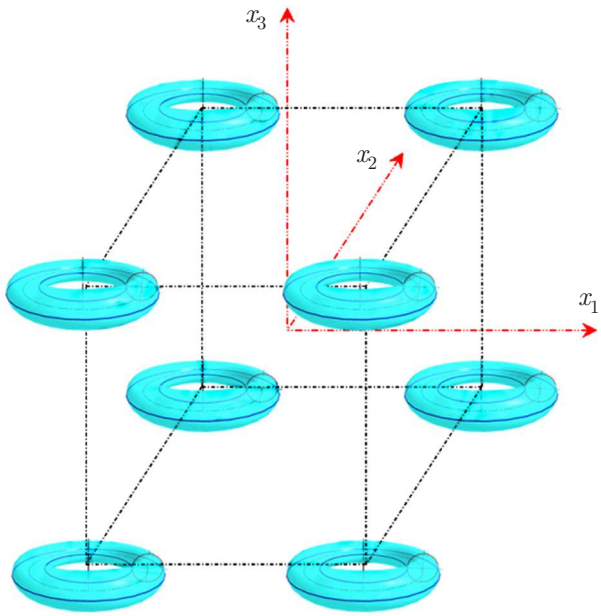

Рис. 1. Ансамбль из восьми вихревых колец

В начальный момент завихренность имеет ненулевое значение только внутри восьми газовых тороидов (рис. 1). Уравнение отдельного вихревого кольца имеет вид [10]

$$\begin{aligned} x_1' &= \left(r_{00}u_1' \sin u_2' + R_c\right) \cos u_3', \\ x_2' &= \left(r_{00}u_1' \sin u_2' + R_c\right) \sin u_3', \\ x_3' &= r_{00}u_1' \cos u_2', \\ 0 &< u_1' < 1, \quad 0 < u_2', \quad u_3' < 2\pi, \end{aligned} \tag{2}$$

где r_{00}, R_c — начальные размеры вихревого кольца, r_{00} — радиус сечения, R_c — радиус кольца. Считается, что безразмерная начальная завихренность мала: $\omega_0 \ll 1$, $\omega_0 = \mathrm{const}$. Начальные условия имеют вид

$$\Omega_1' = -\omega_0 \sin u_3', \quad \Omega_2' = \omega_0 \cos u_3', \quad \Omega_3' = 0, \tag{3}$$

внутри начального тороида и

$$w(\mathbf{x}, 0) = s(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}, 0) = 0 \tag{4}$$

во всем остальном пространстве.

1.2. Решение задачи

Уравнения (1) являются нелинейной параболической системой. Мы ищем решение параболической системы в виде разложения в степенной ряд. Учитывая уравнение (1) и начальные условия, получим

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon\, \Omega_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2\, \Omega_\alpha^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3\, \Omega_\alpha^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \ldots, \\ \Omega_3(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_3^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3\, \Omega_3^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4\, \Omega_3^{(4)}(\mathbf{x}, t) + \ldots, \\ v_i(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon\, v_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2\, v_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 v_i^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \ldots, \\ \varepsilon &= \omega_0, \quad \alpha = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнения (1), имеем

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2\, w^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3\, w^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4\, w^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \ldots, \\ s(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2\, s^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3\, s^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4\, s^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \ldots, \\ h(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2\, h^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3\, h^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4\, h^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \ldots\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Для функций наинизшего порядка уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_i^{(1)}}{\partial t} &= \Delta\, \Omega_i^{(1)}, \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} &= s^{(1)}, \\ \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} &= \frac{1}{\gamma} \Delta w^{(1)} + \frac{4}{3}\, \Delta s^{(1)} - \frac{1}{\gamma} \Delta h^{(1)} + \psi_3^{(1)}, \\ \frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}} \Delta h^{(1)} - (\gamma - 1)\, s^{(1)} + \psi_4^{(1)}, \\ \psi_3^{(1)} &= \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_m}, \quad \psi_4^{(1)} = \frac{\gamma}{2} (\gamma - 1)\, D_{mj} v^{(1)}\, D_{mj} v^{(1)}, \\ D_{mj} v^{(1)} &= \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_m}. \end{aligned} \tag{7}$$

Из уравнения (1) следует:

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{0.03125}{\pi^{5/2} t^{3/2}} \int\limits_{R^3} d\boldsymbol{\xi} \int\limits_0^\infty dr' \int\limits_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} d\phi'\, \Omega^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, 0) \times \mathbf{n} \exp\left(-\frac{0.25}{t} |\mathbf{x} + \mathbf{x}' - \boldsymbol{\xi}|^2\right),$$

$$\mathbf{n} = \{\sin\theta'\cos\phi', \sin\theta'\cos\phi', \cos\theta'\},$$
$$\mathbf{x}' = \{r'\sin\theta'\cos\phi', r'\sin\theta'\cos\phi', r'\cos\theta'\}. \quad (8)$$

Система (7) состоит из трех однородных параболических уравнений относительно $\Omega_i^{(1)}$ и неоднородной параболической подсистемы. Все уравнения имеют постоянные коэффициенты при старших производных. Решение системы может быть получено с помощью преобразования Фурье. Первое уравнение из (8) дает

$$\Omega_i^{(1)}(\mathbf{x},t) = \frac{0.125}{(\pi t)^{3/2}} \int\limits_{R^3} \Omega_i^{(1)}(\boldsymbol{\xi},0) \exp\left(-\frac{0.25}{t}|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^2\right) d\boldsymbol{\xi}. \quad (9)$$

Уравнения (9) позволяют определить члены $\psi_3^{(1)}$, $\psi_4^{(1)}$. Преобразование Фурье однородной параболической подсистемы (8) дает

$$\frac{d\widetilde{w}^{(1)}}{dt} = \widetilde{s}^{(1)},$$
$$\frac{d\widetilde{s}^{(1)}}{dt} = -\frac{k^2}{\gamma}\widetilde{w}^{(1)} - \frac{4}{3}k^2\widetilde{s}^{(1)} + \frac{k^2}{\gamma}\widetilde{h}^{(1)}, \quad (10)$$
$$\frac{d\widetilde{h}^{(1)}}{dt} = -k^2\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\widetilde{h}^{(1)} - (\gamma-1)\,\widetilde{s}^{(1)}.$$

Тильда означает преобразование Фурье с волновым числом k. Характеристическим уравнением для системы (10) будет

$$f^3 + k^2\left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right) f^2 + k^2\left(\frac{4\gamma}{3\,\mathrm{Pr}}k^2 + 1\right) f + \frac{k^4}{\mathrm{Pr}} = 0. \quad (11)$$

При $0 < k < k_*$, $k_* \approx 1$ для воздуха, корни уравнения (11) таковы:

$$f_1 = \sigma_1(k), \quad f_{2,3} = \sigma_2(k) \pm i\,\omega_r(k), \quad \sigma_1, \sigma_2 < 0. \quad (12)$$

При $k > k_*$ все корни быстро затухают, поэтому этот случай не рассматривается. Дисперсионная кривая $\omega_r(k)$ при $0 < k < k_*$ имеет две ветви. Мы рассматриваем ветвь, относящуюся только к меньшим величинам коэффициентов затухания σ_1, σ_2 $(0 < k < k_1 < k_*)$. Для функции $w^{(1)}$ имеем

$$w^{(1)}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^3} d\mathbf{k} \int\limits_{R^3} d\boldsymbol{\xi}\, \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) \times$$
$$\times \left\{a_{12}\psi_3^{(1)}(\boldsymbol{\xi},\tau) + a_{13}\psi_4^{(1)}(\boldsymbol{\xi},\tau)\right\}. \quad (13)$$

Здесь a_{12}, a_{13} — элементы фундаментальной матрицы решений системы (10). Соответствующие формулы даны в приложении.

Введем новую переменную:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \quad (14)$$
$$\mathbf{X} = \{R_1\sin\theta_1\cos\varphi_1,\ R_1\sin\theta_1\sin\varphi_1,\ R_1\cos\theta_1\}.$$

Замена переменных дает

$$w^{(1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{k_1} k\,dk \int\limits_0^{\infty} \sin(kR_1)\,R_1\,dR_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta_1\,d\theta_1 \times$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \left\{a_{12}\psi_3^{(1)}(\mathbf{x}+\mathbf{X},\tau) + a_{13}\psi_4^{(1)}(\mathbf{x}+\mathbf{X},\tau)\right\}. \quad (15)$$

Аналогичные выражения можно написать для функций $s^{(1)}(\mathbf{x},t)$, $h^{(1)}(\mathbf{x},t)$.

Отклонение плотности от ее начального значения может быть записано в виде

$$(\rho_d - \rho_0)/\rho_0 \approx -w \approx -\omega_0^2 w^{(1)}. \quad (16)$$

Здесь индекс d обозначает размерную величину.

Функция $w^{(1)}$ не зависит от ω_0, как и частота колебаний плотности. Функции $w^{(n)}(\mathbf{x},t)$, $s^{(n)}(\mathbf{x},t)$, $h^{(n)}(\mathbf{x},t)$, $n > 1$ могут быть получены аналогично:

$$y_j^{(n)}(\mathbf{x},t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{k_*} k\,dk \int\limits_{R^n} R_1\,dR_1 \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 \times$$
$$\times \sin kR_1\, c_j^{(n-1)}, \quad (17)$$

$$c_j^{(n)} = a_{j1}(k,t-\tau)\,Q_2^{(n)}(\mathbf{x}+\mathbf{X},\tau) +$$
$$+ a_{j2}(k,t-\tau)\,Q_3^{(n)}(\mathbf{x}+\mathbf{X},\tau) + a_{j3}(k,t-\tau)Q_4^{(n)}(\mathbf{x}+\mathbf{X},\tau), \quad (18)$$
$$w^{(n)}(\mathbf{x},t) = y_1^{(n)}, \quad s^{(n)}(\mathbf{x},t) = y_2^{(n)}, \quad h^{(n)}(\mathbf{x},t) = y_3^{(n)}, \quad (19)$$

$$Q_2^{(2)} = -v_j^{(1)}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x_j},$$
$$Q_3^{(2)} = -2\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j}\frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i} + 1.5\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 h^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} - v_m^{(1)}\frac{\partial s^{(1)}}{\partial x_m} -$$
$$- \varepsilon_{imk}\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega_j^{(1)}}{\partial x_m} + 1.5\frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega_k^{(1)}}{\partial x_m}\right), \quad (20)$$
$$Q_4^{(2)} = -v_m^{(1)}\frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_m} +$$
$$+ \gamma(\gamma-1)\left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i}\right).$$

Значения $Q_2^{(n)}$, $Q_3^{(n)}$, $Q_4^{(n)}$ при $n > 2$ имеют громоздкий вид и поэтому не приводятся.

Таким образом, уравнения Навье–Стокса были сведены к параболической системе с постоянными коэффициентами при производных. В результате мы получаем степенной ряд по ω_0. Коэффициенты ряда являются известными функциями $\mathbf{x}$, t (кратные интегралы). Первые члены ряда могут быть использованы для анализа спектра частот колебаний плотности для случая малой завихренности.

Уравнение (15) использовалось для изучения осцилляций плотности. Кратный интеграл был рассчитан с помощью сеток Коробова [12]. Поле плотности было рассмотрено вблизи ансамбля вихревых колец. Параметры каждого кольца таковы: $R_c = 0.15$ см, $r_{00} = 0.03$ см, отношение радиуса поперечного сечения кольца к радиусу кольца равно 0.2, расстояние между центрами соседних колец равно 0.72 см. При вычислениях использовалось значение $\omega_0 = 0.0001$. Значения плотности рассматривались в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2. Результаты

Расчеты выполнены для ансамбля из восьми вихревых колец. Схема их расположения показана на рис. 1. Исследовались осцилляции плотности в воздухе. Значения параметров таковы: $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.71$, число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 171$. В качестве характеристической длины в выражении для числа Re взят начальный диаметр кольца.

Численные результаты представлены на рис. 2–8.

Колебания плотности на ранней стадии представлены на рис. 2. Видно, что возникают высокочастотные колебания, модулированные низкочастотным сигналом. Высокая частота равна 117 кГц, низкая низкая частота равна 3.5 кГц (рис. 3). Как можно видеть, имеются только два значения частоты,

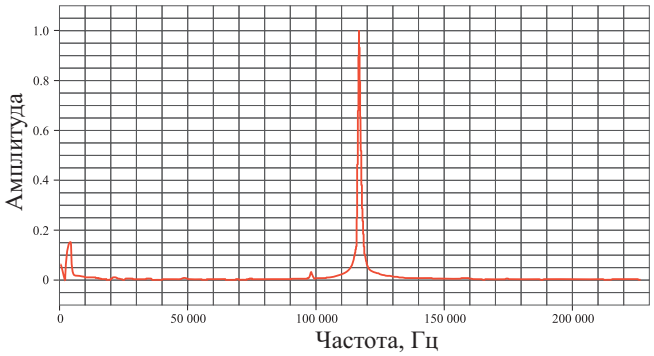

Рис. 3. Спектр частот колебаний плотности вблизи ансамбля вихрей, $t = 0.19$–1.2 мс (ранняя стадия)

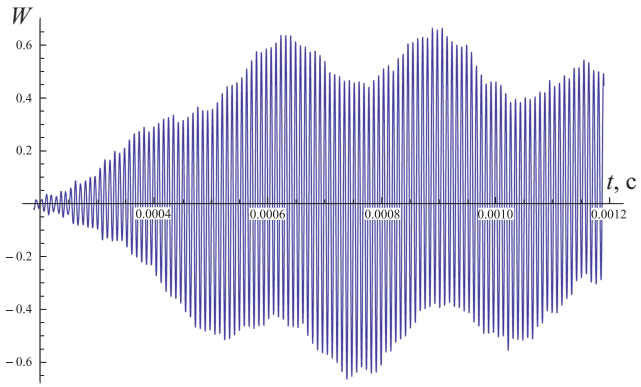

Рис. 2. Колебания плотности вблизи ансамбля вихревых колец (восемь колец, $R_c = 0.15$ см, $r_{00} = 0.03$ см, ранняя стадия)

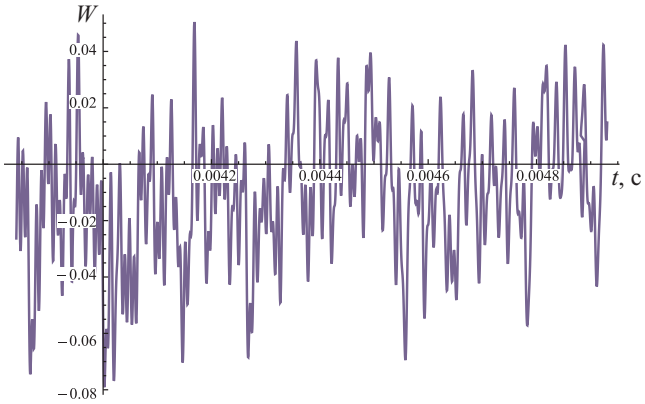

Рис. 4. Колебания плотности вблизи ансамбля вихревых колец (восемь колец, $R_c = 0.15$ см, поздняя стадия)

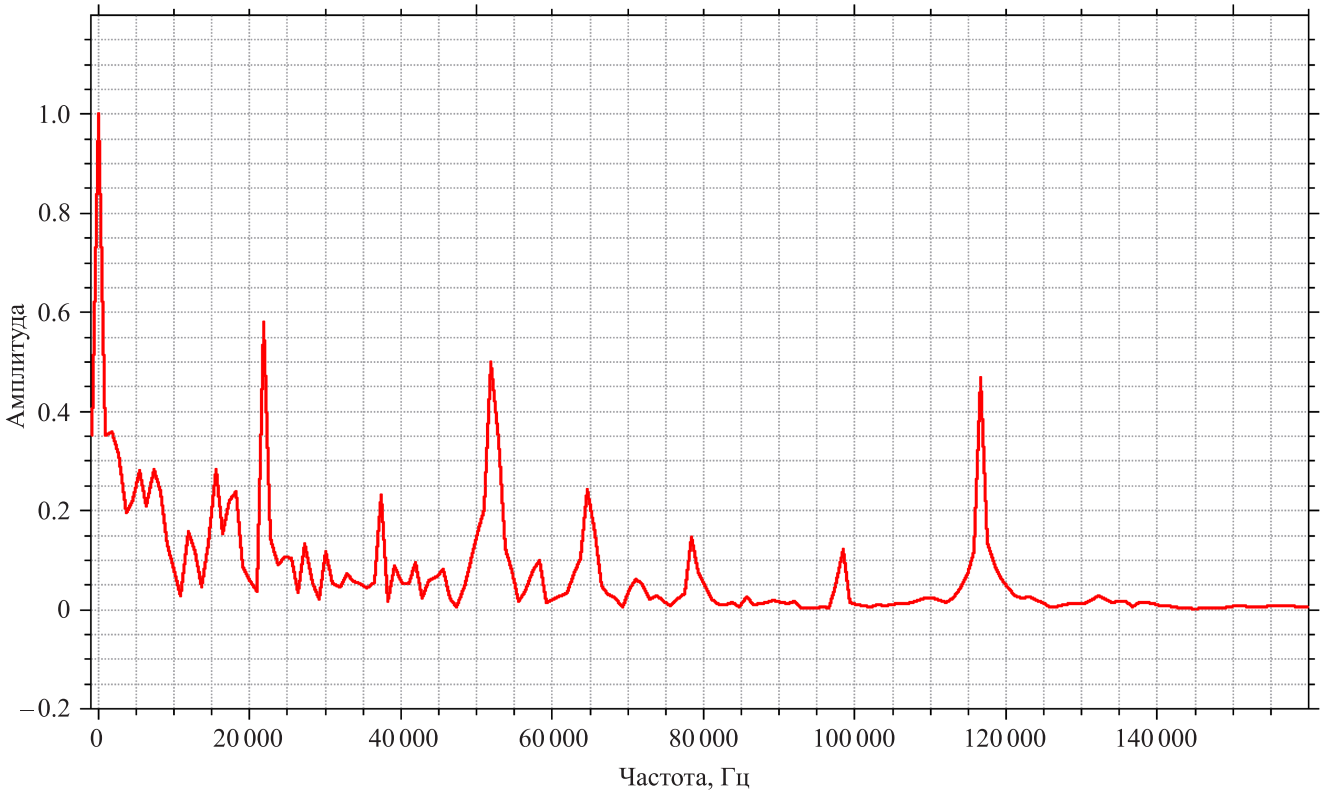

Рис. 5. Спектр частот колебаний плотности вблизи ансамбля вихревых колец, $t = 3.84$–4.93 мс (поздняя стадия)

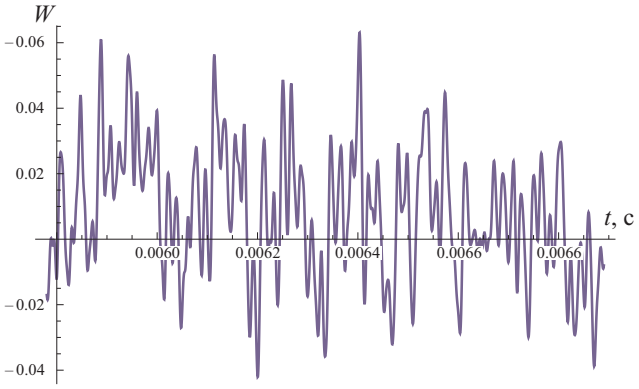

Рис. 6. Дальнейшая стадия осцилляций плотности вблизи ансамбля вихревых колец

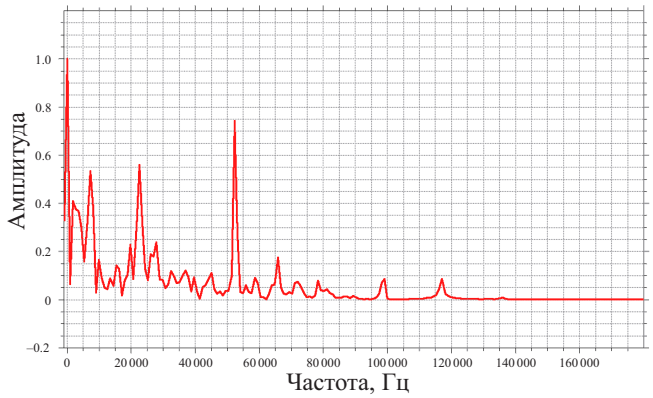

Рис. 7. Спектр частот осцилляций плотности вблизи ансамбля вихревых колец, $t = 5.78$–6.98 мс

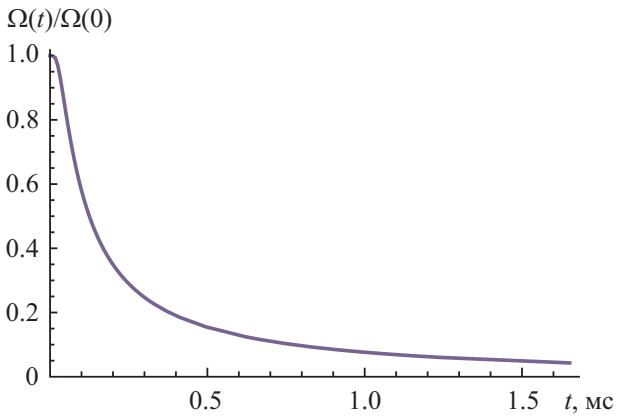

Рис. 8. Затухание завихренности в центре поперечного сечения одиночного вихревого кольца

амплитуда низкочастотных колебаний меньше, чем амплитуда высокочастотных. Картина существенно меняется с течением времени (рис. 4, 5). Наблюдается высокая частота и помимо этого низкочастотные колебания появляются при 23 кГц и при 53 кГц (рис. 5). Их амплитуда превышает амплитуду высокочастотных колебаний. Таким образом, имеется переход энергии от высокочастотных колебаний к низкочастотным. Высокую частоту можно считать собственной частотой ансамбля. С течением времени происходит дальнейшее изменение спектра осцилляций (рис. 6). Как можно заметить, амплитуда высокочастотных колебаний уменьшается еще больше, а низкочастотные колебания становятся выраженными все более ярко (рис. 7). График затухания завихренности в центре поперечного сечения кольца представлен на рис. 8. Более быстрое затухание высокочастотных осцилляций по сравнению с низкочастотными имеет простое объяснение. Как известно, величина диссипации зависит от производных скорости по координатам. Соответственно в первом случае диссипация больше, чем во втором, и, следовательно, высокочастотные осцилляции затухают быстрее низкочастотных.

Заключение

При малой начальной завихренности построено решение системы нестационарных уравнений Навье–Стокса для анализа вихревых колец в вязком теплопроводном газе, представимое в виде интеграла. Решение использовано для исследования эволюции ансамбля. Показано, что имеет место передача энергии от высокочастотных осцилляций к низкочастотным. Одновременно происходит хаотизация течения. Сравнение осцилляций плотности в случае одиночного кольца [9] и ансамбля показывает, что во втором случае частотный спектр имеет более сложный характер, а хаотизация наступает быстрее.

Приложение

Ниже приведены значения элементов фундаментальной матрицы решений системы (10):

$$a_{11} = c_{11}z_1 + c_{21}z_2 + c_{31}z_3,$$
$$a_{12} = c_{12}z_1 - c_{12}z_2 + c_{32}z_3,$$
$$a_{13} = c_{13}z_1 - c_{13}z_2 + c_{33}z_3,$$
$$a_{21} = c_{11}z_1 + (c_{21}\sigma_2 + c_{31}\omega_r)\, z_2 + (c_{31}\sigma_2 - c_{21}\omega_r)\, z_3,$$
$$a_{22} = c_{12}z_1 + (-c_{12}\sigma_2 + c_{32}\omega_r)\, z_2 + (c_{32}\sigma_2 - c_{12}\omega_r)\, z_3,$$
$$a_{23} = c_{13}z_1 + (-c_{13}\sigma_2 + c_{33}\omega_r)\, z_2 + (c_{33}\sigma_2 - c_{13}\omega_r)\, z_3,$$
$$a_{31} = c_{11}g_2z_1 + (c_{21}g_3 + c_{31}g_4)\, z_2 + (-c_{21}g_4 + c_{31}g_3)\, z_3,$$
$$a_{32} = c_{12}g_2z_1 + (-c_{12}g_3 + c_{32}g_4)\, z_2 + (c_{12}g_4 + c_{32}g_3)\, z_3,$$
$$a_{33} = c_{13}g_2z_1 + (-c_{13}g_3 + c_{33}g_4)\, z_2 + (c_{13}g_4 + c_{33}g_3)\, z_3,$$
$$c_{11} = \left(\gamma\left(\sigma_2^2 + \omega_r^2\right) - k^2\right)/g_1,$$
$$c_{12} = -2\left(\sigma_2 + 2k^2/3\right)/g_0,$$
$$c_{13} = k^2/g_1,$$
$$c_{21} = \left(\gamma\sigma_1(\sigma_1 - 2\sigma_2) + k^2\right)/g_1,$$
$$c_{31} = \left(\gamma\sigma_1\left(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 - \omega_r^2\right) + k^2(\sigma_1 - \sigma_2)\right)/(\omega_r g_1),$$
$$c_{32} = \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \omega_r^2 + 4k^2(\sigma_1 - \sigma_2)/3\right)/(\omega_r g_0),$$
$$c_{33} = k^2(\sigma_1 - \sigma_2)/(\omega_r g_1),$$
$$g_0 = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \omega_r^2, \quad g_1 = \gamma g_0,$$
$$g_2 = 1 + \gamma\sigma_1\left(4/k^2\right), \quad g_3 = 1 + \frac{\gamma}{k^2}\left(\sigma_2^2 - \omega_r^2\right) + 4\gamma\sigma_2/3,$$
$$g_4 = 2\gamma\omega_r\left(2/3 + \sigma_2/k^2\right),$$
$$z_1 = \exp[\sigma_1(t - \tau)],$$
$$z_2 = \exp[\sigma_2(t - \tau)]\cos[\omega_r(t - \tau)],$$
$$z_3 = \exp[\sigma_2(t - \tau)]\sin[\omega_r(t - \tau)].$$

Список литературы

1. *Lighthill M.J.* // Proc. Roy. Soc. A 1952. **211**. P. 564.
2. *Howe M.S.* Theory of vortex sound. Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2003.
3. *Verzicco R., Iafrati A., Riccardi G., Fatica M.* // J. Sound Vibr. 1997. **200.** P. 347.
4. *Inoue O.* // Phys. Fluids 2002. **14**. P. 3361.
5. *Maxworthy T.J.* // J. Fluid Mech. 1974. **64.** P. 227.
6. *Maxworthy T.J.* // J. Fluid Mech. 1977. **81**. P. 465.
7. *Liu C., Yan Y., Lu P.* // Comput. Fluids. 2014. **102**. P. 353.
8. *Yan Y., Chen C., Fu H., Liu C.* // J. Turbul. 2014. **15**. P. 1.
9. *Shugaev F.V., Cherkasov D.Y., Solenaya O.A.* // Aerospace 2015. **2**. P. 627.
10. *Morton T.S.* // J. Fluid Mech. 2004. **503**. P. 247.
11. *Truesdell C.* // J. Ration. Mech. Anal. 1953. **2**. P. 643.
12. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

The evolution of acoustic radiation by an ensemble of vortex rings in air

D. Yu. Cherkasov[a], **F. V. Shugaev**[b]

Department of Quantum Statistics and Filed Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *dre21@yandex.ru,* [b] *shugaev@phys.msu.ru.*

The evolution of acoustic radiation emitted by an ensemble of vortex rings in air is studied on the basis of nonstationary Navier–Stokes equations. We use the expansions of required functions into a power series of the initial vorticity which is a small value. The Navier–Stokes equation system reduces to a parabolic system with constant coefficients for the higher derivatives. The problem is posed as follows. The vorticity is defined inside the toroid at $t = 0$. The other parameters of the gas are assumed to be constant throughout the space at the initial instant of time. The solution is expressed in terms of multiple integrals, which are calculated using Korobov grids. The density oscillations were investigated. The results show that the frequency spectrum depends on time; high-frequency oscillations are observed at small times and low-frequency oscillations then occur. At the same time, the amplitude of high-frequency oscillations decreases in comparison with low-frequency oscillations. Thus, a transition of energy from the high-frequency spectrum to the lowfrequency spectrum occurs. These results can be useful for modeling decaying grid turbulence.

Keywords: ensemble of vortex rings, acoustic radiation, Navier–Stokes equations, transition of energy from high-frequency oscillations to low-frequency oscillations.
PACS: 47.32.–y.
Received 20 March 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2018. **72**, No. 2. Pp. 173–178.

Сведения об авторах

1. Черкасов Дмитрий Юрьевич — аспирант; e-mail: dre21@yandex.ru.
2. Шугаев Федор Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: shugaev@phys.msu.ru.