О возможности неявной перенормировки энергии Казимира

А. И. Дубиковский[1,a], П. К. Силаев[2,b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, [1] кафедра квантовой статистики и теории поля; [2] кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] dubikovs@physics.msu.ru, [b] silaev@bog.msu.ru

Статья поступила 24.06.2017, подписана в печать 11.07.2017.

Предложена процедура перенормировки энергии Казимира, которая делает неявными те шаги, которые используются в стандартной процедуре перенормировки — регуляризацию, вычитание и снятие регуляризации. Предложенная процедура основывается на вычислении некоторого набора сходящихся сумм, каждая из которых связана с исходной расходящейся суммой для неперенормированной энергии Казимира. Далее строится система линейных уравнений, которая связывает этот набор сходящихся сумм с перенормированной энергией Казимира. Собственно искомая перенормированная энергия Казимира получается в результате решения этой системы уравнений. При этом как вычисление сходящихся сумм, так и последующее решение системы линейных уравнений выполняется в пределах некоторой (вообще говоря, произвольной) заказанной точности, так что полученный ответ также является приближенным. Предложенная процедура оказывается, во-первых, более вычислительно эффективной, чем стандартная, во-вторых, применима не только для задач, где можно выписать трансцендентное уравнение для спектра, но и для задач, где спектр известен только численно.

Ключевые слова: квантованные поля, вакуум квантовой теории поля, нулевые колебания, эффект Казимира.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.–z, 11.10.Gh.

Введение

Начиная с пионерской работы Г. Казимира [1] было предложено большое число методов регуляризации и перенормировки энергии Казимира, от самых наивных, которые использовались в первых работах, включая [1] — вводится экспоненциальная функция обрезания, после чего производится минимальное вычитание, т. е. отбрасываются сингулярные по параметру обрезания члены; использования формулы Абеля–Плана [2, 3], для применения которой необходимо явное выражения для спектра, до регуляризации с помощью дзета-функции [5–8], использования функции Грина [9–12], коэффициентов разложения ядра уравнения теплопроводности [13, 14] (этот метод до некоторой степени эквивалентен методу с использованием дзета-функции) и многих других. В тривиальных случаях — плоские границы, разделенные тела и т. п. — все упомянутые методы дают совпадающие ответы. Это связано с тем, что перенормировка сводится, в сущности, к минимальному вычитанию, а характер сингулярностей для разных регуляризаций оказывается в той или иной степени аналогичным. В более сложных случаях ситуация меняется. Так, при решении задачи в шаре [14] оказывается, что члены, не содержащие сингулярностей при регуляризации с помощью дзета-функции, оказываются сингулярными при использовании других регуляризаций. Более того, при решении задачи о энергии Казимира в модели мешков при использовании разных методов были получены как минимум три разных ответа, причем один из ответов [17, 18] отличается от двух других, полученных соответственно в [15, 16] и в [19], по знаку. Следует также упомянуть задачу о диэлектрическом шаре. Распространить известное решение задачи о бесконечно тонкой проводящей сфере [20, 21] на случай диэлектрического шара удается только при наложении определенных условий на диэлектрическую и магнитную проницаемость самого шара и внешней среды [22, 23]. Альтернативное решение этой задачи возможно в пределе малого возмущения, когда относительная диэлектрическая проницаемость близка к единице [24–27]. Другой способ выбора точки нормировки для энергии Казимира в шаре, позволяющий решить задачу о диэлектрическом шаре (этот способ не опирается на задачу о бесконечно тонкой проводящей сфере), был предложен в [28, 29].

В последнее время интерес к эффекту Казимира вновь значительно возрос, что связано с развитием новых методов прецизионных измерений — в частности удалось измерить силу Казимира противоположного знака, т. е. отталкивающую [30] (она возникает в случае определенного соотношения между диэлектрическими проницаемости тел и среды, в которую эти тела погружены [31, 32]), удалось исследовать зависимость силы Казимира, действующей между двумя телами, от их формы [33, 34], исследуются также эффекты, связанные со взаимодействием макроскопического объекта и микроскопического (атома). Поэтому особенную актуальность приобретают те не до конца разрешенные задачи, которые были упомянуты выше. С формальной точки зрения их решение сводится к выбору точки нормировки при перенормировке энергии или давления Казимира и доказательству того, что полученный ответ не зависит от выбора регуляризации (как правило, при этом приходится ограничиваться некоторым классом регуляризирующих функций).

Возникает вопрос, можно ли обойти эту проблему, сделав неявными три стандартных действия, выполняемых при перенормировке: регуляризацию, вычитание и снятие регуляризации, при выполнении которых, собственно, и возникает неоднозначность? Разумеется, в такой процедуре все равно с неизбежностью будет происходить как регуляризация, так и вычитание, но они будут неявными. Это значит, что не потребуется явным образом определять конкретную регуляризирующую функцию (принадлежащую определенному классу) и задавать явным образом контрчлен (становящийся сингулярным при снятии регуляризации), который мы будем вычитать при перенормировке. В настоящей работе мы предлагаем именно такую процедуру. Она является своего рода комбинацией известных методов перенормировки, адаптированных к задаче об энергии Казимира. В методе дисперсионных соотношений для обеспечения сходимости интегралов применяют линейные комбинации, построенные из подынтегральной функции [35, 36], при перенормировках в квантовой теории поля часто используют конечно-разностное или обычное дифференцирование по одному из параметров теории. Мы применяем эти методы к задаче, в которой в некотором смысле отсутствует «хорошо определенная» точка нормировки (например, обычная нормировка на физические значения констант теории).

Мы проиллюстрируем предлагаемую процедуру на простом примере, который с легкостью может быть решен стандартными методами. Это позволит нам убедиться, что предложенная процедура действительно позволяет получить правильный и хорошо известный ответ. Выбор граничных условий в рассматриваемом примере обусловлен тем, что они приводят к спектру, который до некоторой степени аналогичен тем спектрам, которые возникают в многомерных задачах с ненулевой кривизной границ (в частности, в шаре). Для таких спектров логарифмические расходимости в энергии Казимира возникают не только из-за массы поля (как это было бы для задачи с нулевыми граничными условиями), но и из-за собственно свойств спектра.

Сходящиеся суммы, связанные с энергией Казимира

Рассмотрим простейший пример — скалярное поле на отрезке $[0, a]$ в одномерном (1+1) пространстве со смешанными граничными условиями. Лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\partial_0\varphi(t,x))^2 - \frac{1}{2}(\partial_1\varphi(t,x))^2 - \frac{m^2}{2}(\varphi(t,x))^2,$$

а граничные условия выберем в виде

$$\varphi(t,0) = 0, \quad \partial_1\varphi(t,a) + \lambda\varphi(t,a) = 0.$$

В этой задаче отсутствует явное аналитическое выражение для спектра, так что выражение для энергии Казимира

$$E = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k_n^2 + m^2} \tag{1}$$

содержит величины k_n, которые являются корнями трансцендентного уравнения

$$k_n\cos(k_n a) + \lambda\sin(k_n a) = 0.$$

Одна из стандартных процедур перенормировки для таких случаев заключается в следующем [8]: выполним интегрирование по комплексной плоскости k

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C dk\,\sqrt{k^2+m^2}\,\frac{f'(k)}{f(k)}\,\Phi(k),$$

где $f(k)$ — уравнение, определяющее корни k_n:

$$f(k) \equiv \cos(ka) + \lambda\sin(ka)/k.$$

Здесь функция $\Phi(k)$ — это обрезающая функция, которая регуляризует интегралы и суммы, а в качестве контура C можно выбрать любой из двух описанных ниже контуров (выбор контура будет влиять лишь на требования, накладываемые на функцию регуляризации $\Phi(k)$, окончательные ответы в обоих случаях совпадут). Первый из контуров идет вдоль мнимой оси, разрезы (связанные с квадратным корнем $\sqrt{k^2+m^2}$) и полюс (у функции f при $\lambda < 0$ может существовать корень на мнимой оси — «дискретный» уровень) обходятся справа. Этот контур замыкается справа дугой полуокружности бесконечного радиуса. Второй из контуров, напротив, идет вдоль вещественной оси, огибая полюса (корни функции f) сверху, и замыкается сверху дугой полуокружности бесконечного радиуса, с обходом разреза, идущего вдоль мнимой оси от $k = im$ до $k \to i\infty$. Для первого из контуров функция Φ должна достаточно быстро (не хуже $1/k^\gamma$, $\gamma > 2$) убывать при $k \to +\infty$ и не иметь полюсов справа от мнимой оси. Так что вполне приемлемой будет даже полиномиальная регуляризация $\Phi(k) = 1/(1+\epsilon k)^\gamma$ (где $\epsilon > 0$, $\gamma > 2$, причем снятие регуляризации осуществляется при $\epsilon \to 0$).

Аналогично для второго контура полюсов не должно быть над вещественной осью, так что их можно переместить на отрицательную часть мнимой оси: $\Phi(k) = 1/(1+i\epsilon k)^\gamma$. В обоих случаях интеграл по дуге полуокружности бесконечного радиуса оказывается нулевым. Мы рассмотрим только случай первого контура, для второго контура все рассмотрение можно провести совершенно аналогичным образом. Учитывая, что справа от мнимой оси внутри контура лежат как раз те полюса, которые соответствуют сумме (1), получаем

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa\sqrt{(i\kappa+0)^2+m^2}\,\frac{f'(i\kappa)}{f(i\kappa+0)}\,\Phi(i\kappa)= \\ =\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k_n^2+m^2}\,\Phi(k_n).$$

Заметим, что в полученном выражении невозможно реализовать гладкий предел по $\lambda\to\infty$, поскольку в этом случае (нулевое граничное условие на правом конце отрезка) в знаменателе появился бы лишний корень при $k=0$, так что этот случай следует рассматривать отдельно. Впрочем, все рассмотрение в случае $\lambda\to\infty$ проводится совершенно аналогичным образом и приводит к появлению одного дополнительного слагаемого.

Теперь обратимся к задаче перенормировки. Выбирая за точку нормировки точку $a\to\infty$, получим

$$\frac{f'(i\kappa)}{f(i\kappa)}\bigg|_{a\to\infty}= \\ =\frac{-ia\operatorname{sh}(\kappa a)-ia\lambda\operatorname{ch}(\kappa a)/\kappa+i\lambda\operatorname{sh}(\kappa a)/\kappa^2}{\operatorname{ch}(\kappa a)+\lambda\operatorname{sh}(\kappa a)/\kappa}\bigg|_{a\to\infty}= \\ =-i\operatorname{sign}(\kappa)\frac{a(1+\lambda/|\kappa|)-\lambda/\kappa^2}{1+\lambda/|\kappa|}.$$

Следовательно, при таком выборе точки нормировки мы вычитаем слагаемые, пропорциональные первой и нулевой степени a. Остающееся выражение убывает с ростом $|\kappa|$, так что регуляризация может быть снята:

$$E^{\rm ren}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa\,\sqrt{(i\kappa+0)^2+m^2}\times \\ \times\left[\frac{f'(i\kappa+0)}{f(i\kappa+0)}-\frac{f'(i\kappa+0)}{f(i\kappa+0)}\bigg|_{a\to\infty}\right].$$

Учитывая, что функция f'/f нечетная и что квадратный корень на правых берегах двух разрезов $[im,i\infty]$ и $[-im,-i\infty]$ имеет противоположные знаки, получаем, что вклад от интегралов по берегам разрезов удваивается, а по интервалу $[-im,im]$ исчезает. Окончательно получаем

$$E^{\rm ren}(a)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{m}^{\infty} d\kappa\,\sqrt{\kappa^2-m^2}\,\frac{a-\lambda/(\kappa^2-\lambda^2)}{e^{2\kappa a}(\kappa+\lambda)/(\kappa-\lambda)+1}. \tag{2}$$

В этом выражении при отрицательных λ, вообще говоря, может возникнуть особенность, связанная с обращением знаменателя в ноль. Однако это соответствует нефизическому случаю экспоненциально «взрывающегося» поля, когда не только существует «дискретный» (с мнимым волновым числом κ_0) уровень в спектре, но и величины массы m не хватает, чтобы сделать вещественной соответствующую частоту $\omega_0=\sqrt{-\kappa_0^2+m^2}$.

Полученное выражение экспоненциально убывает с ростом массы поля (или с ростом длины отрезка a), согласуется с ответом для силы, действующей на левую границу отрезка (этот ответ легко получить, если найти не вакуумное среднее величины T_{00}, а вакуумное среднее величины T_{11}) и имеет гладкий предел при $\lambda\to 0$. Что касается предела при $\lambda\to\infty$, то, как уже было упомянуто выше, гладкого предела здесь быть не должно и полученный ответ будет отличаться от стандартного на величину $m/4$. Это различие исчезнет, если провести отдельное рассмотрение и учесть «лишний» полюс при $k=0$.

Зададимся вопросом, существует ли возможность в некотором смысле обойти стандартную процедуру перенормировки с регуляризацией и выбором точки нормировки. Иными словами, можно ли построить процедуру, в которой оба стандартных шага при перенормировке окажутся неявными? Эта процедура будет иметь дело только со сходящимися суммами, связанными с энергией Казимира, и не использовать функцию регуляризации $\Phi(k)$ явным образом. Следует подчеркнуть, что при обосновании предложенной процедуры, а именно при установлении связи построенной сходящейся суммы с исходной расходящейся суммы для энергии Казимира мы вынуждены вводить регуляризацию, но собственно при вычислении ответа для энергии Казимира функция регуляризации $\Phi(k)$ нигде не возникает.

На первый взгляд, построение такой процедуры должо быть эквивалентно исключению слагаемых, пропорциональных первой и нулевой степени длины отрезка a. Однако это верно только для регуляризованного выражения; процедуры вычитания таких слагаемых и снятия регуляризации не коммутируют.

В сумме

$$E(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{(k_n(a))^2+m^2} \tag{3}$$

присутствуют линейно расходящиеся слагаемые, пропорциональные $\pi n/a$, логарифмически расходящиеся слагаемые, связанные с массой поля, пропорциональные $am^2/(2\pi n)$, и логарифмически расходящиеся слагаемые, связанные с граничным условием третьего рода, которые пропорциональны $\lambda/(\pi n)$.

Если произвести «минимальное вычитание», т. е. вычесть из суммы (3) все перечисленные выше расходящиеся слагаемые, то получившийся конечный ответ будет содержать слагаемые, пропорциональные $\ln a$ и $a\ln a$. Эти слагаемые растут с ростом a и должны быть исключены в процессе перенормировки.

В том случае, когда сумма регуляризована, вклад от линейно расходящихся слагаемых будет пропорционален $1/\varepsilon^2$, а от логарифмически расходящихся — $\ln(\varepsilon)$, где ε — параметр регуляризации. Оба расходящихся слагаемых, как уже было отмечено выше, пропорциональны нулевой и первой степени a. Кроме того, в результате регуляризации возникает дополнительный конечный вклад, который полностью компенсирует слагаемое, пропорциональное $a\ln a$. Поэтому в регуляризованном выражении достаточно исключить слагаемые вида a^0 и a^1, а в нерегуляризованном следует исключить слагаемые, пропорциональные a^{-1}, a^0, a^1, $\ln a$ и $a \ln a$.

Рассмотрим набор сумм (3) для 6 различных a_i. Не ограничивая общности, можно положить $a_i = a_0 + i$, где $i = 0, \ldots, 5$. Мы могли бы рассмотреть и другой набор a_i, но этот простейший набор окажется удобным при последующих рассуждениях. Рассмотрим линейную комбинацию

$$E_6(a_0) = \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) E(a_i). \tag{4}$$

Очевидно, что за счет выбора произвольных констант c_i можно исключить в выражении (4) не только расходящиеся слагаемые, пропорциональные a^{-1}, a^0 и a^1, но и слагаемые, подлежащие устранению в ходе перенормировки, т. е. $\ln a$ и $a \ln a$. Для этого достаточно потребовать выполнения условий

$$\sum_{i=0}^{5} c_i(a_0)/a_i = \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) = \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) a_i = \\ = \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) \ln a_i = \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) a_i \ln a_i = 0. \tag{5}$$

Ввиду линейной независимости пяти функций, входящих в эту систему уравнений, мы можем удовлетворить (5), выразив константы $c_1, \ldots, c_5$ через c_0. До этого момента мы выписывали расходящиеся выражения (3) и (4), которым следовало придавать смысл посредством регуляризации. Теперь мы имеем возможность выписать сходящуюся сумму:

$$E_6(a_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) \sqrt{(k_n(a_i))^2 + m^2}, \tag{6}$$

которая во введении явной функции регуляризации Φ не нуждается.

Практическая ценность полученной величины $E_6(a_0)$ заключается в том, что она достаточно быстро (экспоненциально) убывает с ростом a_0. Чтобы доказать это утверждение, достаточно вновь повторить те рассуждения, которые позволили нам получить перенормированное выражение для энергии (2). Действительно, мы можем регуляризовать сумму (6), тогда возможно будет менять порядок суммирования по n и по i; при этом «перенормировка» в двойной сумме произойдет автоматически, благодаря условиям (5), наложенным на константы c_i. Поэтому регуляризацию можно будет снять и мы получим

$$E_6(a_0) = \sum_{i=0}^{5} c_i(a_0) E^{\text{ren}}(a_i).$$

Каждое из слагаемых $E^{\text{ren}}(a_i)$ убывает экспоненциально с ростом a_0, так что и вся сумма будет экспоненциально убывать с ростом a_0.

Теперь рассмотрим набор $a_i = a_0 + i$, где $i = 0, \ldots, \infty$. Предположим, что для каждого из этих a_i мы вычислили $E_6(a_i)$ совершенно таким же образом, как для a_0. (Еще раз подчеркнем, что равномерный шаг $h = 1$ в наборе a_i выбран исключительно для простоты рассуждений.) Тогда мы получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{5} c_i(a_j) E^{\text{ren}}(a_{j+i}) = E_6(a_j),$$

где правая часть ($E_6(a_j)$, $j = 0, \ldots, \infty$) известна. Следовательно, искомые величины $E^{\text{ren}}(a_i)$ являются точным решением этой бесконечной системы уравнений. Вопрос о единственности решения и практической возможности решить бесконечную систему уравнений мы обсудим ниже.

Тут следует заметить, что к выражению для энергии Казимира можно было бы применить не конечно-разностный, а дифференциальный оператор, который также позволил бы исключить все 5 упомянутых выше слагаемых. Разумеется, такой подход был бы предпочтителен для задач, допускающих точное аналитическое решение, но при решении задач, в которых спектр находится только численно, он оказался бы неэффективным. Действительно, при использовании предложенного нами метода достаточно вычислить величины $E_6(a_j)$ для дискретного набора значений $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, в то время как при применении дифференциального оператора для получения $E^{\text{ren}}(a_0)$ пришлось бы решать дифференциальное уравнение на интервале $[a_0, \infty]$, для чего в свою очередь пришлось бы вычислить $E_6(a)$ для всех точек этого интервала $a \in [a_0, \infty]$.

Теперь обратимся к вопросу о решении бесконечной системы уравнений. Еще раз подчеркнем, что только достаточно быстрое (в нашем случае экспоненциальное) убывание правой части системы линейных уравнений придает ей практический смысл. Именно благодаря экспоненциальному убыванию для каждой заданной точности δ можно указать такое i_0, что $E^{\text{ren}}(a_i) < \delta$ при $i > i_0$. Тогда мы получим следующую (обрезанную на индексе i_0) систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=0}^{5} c_i(a_j) E^{\text{ren}}(a_{j+i}) = E_6(a_j), \tag{7}$$

где $j = 0, \ldots, i_0$. Правая часть этой системы, т. е. $E_6(a_j)$, вычисляется непосредственно, согласно соотношению (6), а неизвестными мы полагаем $E^{\text{ren}}(a_j)$ при $j = 0, \ldots, i_0$. Величины $E^{\text{ren}}(a_j)$ при $j = i_0{+}1, \ldots, i_0{+}5$, по нашему предположению, меньше δ, и мы полагаем их равными нулю.

Следует заметить, что при практическом проведении вычислений целесообразно вычислить характерную скорость убывания $\xi \equiv E_6(a_{j+1})/E_6(a_j)$ и полагать $E^{\text{ren}}(a_{i_0+j}) = E^{\text{ren}}(a_{i_0})\xi^j$ при $j = 1, \ldots, 5$. Это позволяет заметно уменьшить то значение i_0, при котором достигается сходимость. Мы полагаем, что сходимость при данном i_0 достигнута, если ответ для $E^{\text{ren}}(a_0)$ не меняется (в пределах заданной точности) при дальнейшем увеличении i_0.

Следует заметить, что, на первый взгляд, следовало бы привести доказательство того, что при фиксированном a_0 и i_0 выписанная нами система (7) не является сингулярной. Однако в этом нет никакой практической необходимости. Действительно, детерминант, очевидно, будет функцией шага h между последовательными a_i. (В нашем случае шаг h выбран равным 1.) Если детерминант при данном шаге оказывается нулевым, то, изменив значение шага h, мы можем сделать его отличным от нуля. С точки зрения конкретных вычислений это означает, что если спектр матрицы (7) по тем или причинам имеет собственные значения, которые существенно разнятся по величине (что и означает сингулярность матрицы с вычислительной точки зрения), то мы можем сделать систему (7) регулярной (с вычислительной точки зрения), просто изменив выбранный шаг h.

Все приведенные рассуждения были проверены путем непосредственных вычислений при различных m, a и λ. Во-первых, было проверено, что соотношения (7) выполняются для всех j, если правую часть $E_6(a_j)$ вычислять согласно (6), а величины $E^{\text{ren}}(a_j)$ вычислять согласно (2). Во-вторых, было проверено, что решение системы (7) действительно позволяет найти значение $E^{\text{ren}}(a_0)$, совпадающее со значением, вычисленным согласно (2), причем точность тем выше, чем больше значение индекса обрезания i_0.

В качестве иллюстрации приведем значения величин $E_6(a_i)$ (вычисленных согласно (6)) и перенормированной энергии $E^{\text{ren}}(a_i)$ (найденных из (7)) для значений $\lambda = 3$ и $m = 1$. Отличие от ответов для $E^{\text{ren}}(a_i)$, полученных согласно (2), определяется значением индекса обрезания $i_0 = 14$ и не превышает 10^{-12} (табл. 1).

Приведем также результаты, полученные для значений $\lambda = 1$ и $m = 1$. Отличие от ответов, полученных согласно (2), не превышает 10^{-15} при том же значении индекса обрезания $i_0 = 14$ (табл. 2).

Наконец, приведем результаты, полученные для значений $\lambda = 1/3$ и $m = 1$. Отличие от ответов, полученных согласно (2), не превышает 10^{-13} при том же значении индекса обрезания $i_0 = 14$ (табл. 3).

Заметим, что при заданных значениях m и λ нахождение энергий $E^{\text{ren}}(a_i)$ для всего набора величин a_i естественным образом реализуется за одно вычисление — посредством решения системы (7).

Заключение

Итак, мы показали, что (по крайней мере, для рассмотренного нами простейшего случая) может быть предложена процедура вычисления энергии Казимира, которая делает неявными те стандартные действия, которые применяются в традиционной процедуре перенормировки — регуляризация, вычитание и снятие регуляризации. Тем самым она позволяет несколько ограничить произвол, связанный с выбором конкретной регуляризации и выбором точки нормировки. Разумеется, регуляризация расходящихся сумм и вычитание расходящихся и нефизичных слагаемых все равно происходит, но оба действия оказываются неявными. Собственно в процессе вычислений регуляризующая функция не появляется и явного вычитания не происходит, поскольку предложенная процедура использует исключительно сходящиеся суммы, а эти суммы в свою очередь позволяют найти собственно «перенормированную» энергию Казимира. Следует, впрочем, подчеркнуть, что для обоснования связи построенных сумм с исходной расходящейся суммой для энергии Казимира регуляризация, разумеется, необходима.

С вычислительной точки зрения предложенная процедура оказывается достаточно эффективной (более эффективной, чем стандартная), по крайней мере, если сходящиеся суммы достаточно быстро

Таблица 1

a_i	1	2	3	4	5	6	7
$E_6(a_i)$	$-8.793 \cdot 10^{-5}$	$-4.458 \cdot 10^{-5}$	$-7.976 \cdot 10^{-6}$	$-1.202 \cdot 10^{-6}$	$-1.704 \cdot 10^{-7}$	$-2.345 \cdot 10^{-8}$	$-3.181 \cdot 10^{-9}$
$E^{\text{ren}}(a_i)$	$-1.831 \cdot 10^{-2}$	$-1.797 \cdot 10^{-3}$	$-2.001 \cdot 10^{-4}$	$-2.353 \cdot 10^{-5}$	$-2.854 \cdot 10^{-6}$	$-3.529 \cdot 10^{-7}$	$-4.424 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2

a_i	1	2	3	4	5	6	7
$E_6(a_i)$	$1.245 \cdot 10^{-4}$	$1.027 \cdot 10^{-5}$	$9.709 \cdot 10^{-7}$	$9.887 \cdot 10^{-8}$	$1.056 \cdot 10^{-8}$	$1.165 \cdot 10^{-9}$	$1.319 \cdot 10^{-10}$
$E^{\text{ren}}(a_i)$	$5.065 \cdot 10^{-3}$	$2.402 \cdot 10^{-4}$	$1.752 \cdot 10^{-5}$	$1.529 \cdot 10^{-6}$	$1.473 \cdot 10^{-7}$	$1.511 \cdot 10^{-8}$	$1.618 \cdot 10^{-9}$

Таблица 3

a_i	1	2	3	4	5	6	7
$E_6(a_i)$	$2.402 \cdot 10^{-4}$	$5.919 \cdot 10^{-5}$	$9.422 \cdot 10^{-6}$	$1.351 \cdot 10^{-6}$	$1.862 \cdot 10^{-7}$	$2.521 \cdot 10^{-8}$	$3.379 \cdot 10^{-9}$
$E^{\text{ren}}(a_i)$	$2.510 \cdot 10^{-2}$	$2.148 \cdot 10^{-3}$	$2.263 \cdot 10^{-4}$	$2.583 \cdot 10^{-5}$	$3.075 \cdot 10^{-6}$	$3.756 \cdot 10^{-7}$	$4.668 \cdot 10^{-8}$

убывают при возрастании размера области (в нашем примере это убывание оказалось экспоненциальным). Единственным неудобством является необходимость выполнять вычисления с повышенным количеством верных знаков, чтобы обеспечить нужную точность при решении результирующей системы линейных уравнений.

Следует заметить, что предложенная процедура может быть применена для любой расходящейся суммы. В частности, она может быть применена в тех случаях, когда не только нет явного выражения для спектра, но и не может быть выписано трансцендентное уравнение на спектр (ситуация, достаточно типичная для многомерных задач, не сводящихся к квазиодномерным). Однако при этом должны быть известны выражения не только для коэффициентов при расходящихся членах (обыкновенно асимптотические выражения для спектра могут быть найдены, так что эта задача не вызовет затруднений), но и для нефизичных слагаемых (в нашем случае это выражения, пропорциональные $a \ln a$ и $\ln a$). Может показаться, что деление слагаемых на «физичные» и «нефизичные» является произвольным действием, соответствующим выбору точки нормировки в стандартной процедуре. Однако это не вполне так. Во-первых, в предложенной процедуре полностью исключена зависимость ответа от регуляризации, поскольку регуляризация является неявной. Во-вторых, поскольку вычитание также является неявным, в нашей процедуре исключен произвол, возникающий при выборе явного вида контрчлена, который мы вычитаем при стандартной перенормировке, — контрчлен, вообще говоря, определен с точностью до произвольного «физичного» слагаемого. Сказанное позволяет надеяться, что предложенный метод несколько приблизит нас к разрешению «проблемы диэлектрического шарика» и других проблем, упомянутых во введении. Следует, впрочем, заметить, что нахождение выражений для нефизичных слагаемых в общем случае представляет собой отдельную задачу, требующую дополнительного рассмотрения.

Список литературы

1. *Casimir H.B.G.* // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 1948. **51**. P. 793.
2. *Мамаев С.Г., Трунов Н.Н.* // ТМФ. 1979. **38**, N 3. С. 345. (*Mamaev S.G., Trunov N.N.* // Theoret. and Math. Phys. 1979. **38**, N 3. P. 228.)
3. *Мамаев С.Г., Трунов Н.Н.* // Изв. вузов. Физика. 1979. **9**. С. 51. (*Mamaev S.G., Trunov N.N.* // Izv. Vuzov. Phys. 1979. **9**. C. 51. (In russian.))
4. *Мостепаненко В.М., Трунов Н.Н.* // УФН. 1988. **156**. С. 385. (*Mostepanenko V.M., Trunov N.N.* // Sov. Phys. Usp. 1988. **31**. P. 965.)
5. *Ambjorn J., Wolfram S.* // Ann. Phys. 1983. **147**. P. 1.
6. *Leseduarte S., Romeo A.* // Ann. Phys. 1996. **250**. P. 448.
7. *Milton K.A.* // The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy. Singapore: World Scientic, 2001.
8. *Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* // Phys. Rep. 2001. **353**. P. 1.
9. *Bender C.M., Milton K.A.* // Phys. Rev. D. 1994. **50**. P. 6547.
10. *Milton K.A., DeRaad L.L., Schwinger J.* // Ann. Phys. 1978. **115**. P. 388.
11. *Rodriguez A., Ibannescu M., Iannuzzi D.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2007. **99**. P. 80401.
12. *Rodriguez A., Ibannescu M., Iannuzzi D.* et al. // Phys. Rev. A. 2007. **76**. P. 032106.
13. *Bordag M., Elizalde E., Kirsten K.* // J. Math. Phys. 1996. **37**. P. 895.
14. *Bordag M., Elizalde E., Kirsten K., Leseduarte S.* Phys. Rev. D. 1997. **56**. P. 4896.
15. *Elizalde E., Bordag M., Kirsten K.* // J. Phys. A. 1998. **31**. P. 1743.
16. *Milton K.A.* // Ann. Phys. 1983. **150**. P. 432.
17. *Milton K.A.* // Phys. Rev. D. 1980. **22**. P. 1444.
18. *Milton K.A.* // Phys. Rev. D. 1982. **25**. P. 3441.
19. *Milton K.A.* // Phys. Rev. D. 1983. **27**. P. 439.
20. *Boyer T.H.* // Phys. Rev. 1968. **174**. P. 1764.
21. *Davies B.* // J. Math. Phys. 1972. **13**. P. 1324.
22. *Brevik I., Kolbenstvedt H.* // Phys. Rev. D. 1982. **25**. P. 1731.
23. *Klich I.* // Phys. Rev. D. 2000. **61**. P. 025004.
24. *Milton K.A., Jack Ng Y.* // Phys. Rev. E. 1998. **57**. P. 5504.
25. *Brevik I., Marachevsky V. N., Milton K. A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 3948.
26. *Lambiase G., Scarpetta G., Nesterenko V. V.* // Mod. Phys. Lett. A. 2001. **16**. P. 1983.
27. *Barton G.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. **32**. P. 525.
28. *Дубиковский А.И., Силаев П.К., Тимофеевская О.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014, № 6. С. 34. (*Dubikovsky A.I., Silaev P.K., Timofeevskaya O.D.* // Moscow University Physics Bulletin. 2014. **69**, N 6. P. 468.)
29. *Dubikovsky A.I., Silaev P.K., Timofeevskaya O.D.* // Mod. Phys. Lett. A. 2015. **30**, N 12. P. 1550067.
30. *Munday J. N., Capasso F., Parsegian V. A.* // Nature. 2009. **457**. P. 170.
31. *Mahanty J., Ninham B. W.* // Dispersion Forces. New York: Academic Press, 1976.
32. *Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. P. 1827.
33. *Chan H. B., Bao Y., Zou J.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. **101**. P. 030401.
34. *Bao Y., Guerout R., Lussange J.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2010. **105**. P. 250402.
35. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К.* // Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
36. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Хрусталев О.А.* // ЭЧАЯ. 1972. **3**. С. 515. (*Logunov A.A., Mestvirishvili M.A., Khrustalev O.A.* // Sov. J. Nucl. Phys. 1972. **3**. P. 1.)

On the possibility of the implicit renormalization of the Casimir energy

A. I. Dubikovsky[1,a], **P. K. Silaev**[2,b]

[1] *Department of of Quantum Statistics and Field Theory;*
[2] *Department of Quantum Theory and High Energy Physics,*
Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *dubikovs@physics.msu.ru,* [b] *silaev@bog.msu.ru.*

We propose a procedure for renormalizing the Casimir energy that makes the steps that are used in the standard renormalization procedure, that is, regularization, subtraction, and deregularization, implicit. The proposed procedure is based on the calculation of a set of convergent sums, each of which is related to the initial divergent sum of the non-renormalized Casimir energy. Next, we construct a system of linear equations that relates this set of convergent sums to the renormalized Casimir energy. The unknown renormalized Casimir energy is obtained as a result of solving this system of equations. In this case, both the calculations of the convergent sums and the subsequent solution of the system of linear equations are performed with a certain (generally speaking, arbitrary) ordered accuracy; thus, the result is also approximate. The proposed procedure is, first, more computationally effective than the standard one, and, second, applicable not only to the problems where a transcendental equation for the spectrum can be written, but also to the problems where the spectrum is known only numerically.

Keywords: quantized fields, vacuum in quantum field theory, zero oscillations, Casimir effect.
PACS: 11.10.–z, 11.10.Gh.
Received 24 June 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 3. Pp. 278–283.

Сведения об авторах

1. Дубиковский Андрей Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: dubikovs@physics.msu.ru.
2. Силаев Петр Константинович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: silaev@bog.msu.ru.