Квантовые состояния нейтрального массивного фермиона с аномальным магнитным моментом во внешнем электрическом поле

В. Р. Халилов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: khalilov@phys.msu.ru

Статья поступила 04.05.2017, подписана в печать 19.06.2017.

Изучается квантовая динамика нерелятивистского нейтрального массивного фермиона, обладающего аномальным магнитным моментом (АММ), во внешнем электрическом поле бесконечно длинной, тонкой, однородно заряженной нити в плоскости с нормалью, направленной вдоль нити. Гамильтониан уравнения Дирака–Паули для нейтрального фермиона с АММ в рассматриваемом внешнем поле существенно сингулярен и требует дополнительного доопределения для того, чтобы рассматривать его как самосопряженный квантово-механический оператор. Найдены все однопараметрическими самосопряженные расширения гамильтониана уравнения Дирака–Паули в рассматриваемом внешнем поле в нерелятивистском приближении. Для каждого самосопряженного расширения гамильтониана указано соответствующее гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, включающее точку сингулярности гамильтониана. Волновые функции свободных и связанных состояний. а также дискретные уровни энергий найдены методом самосопряженных расширений и обсуждается их соответствие с аналогичными величинами, полученными методом физической регуляризации. Показано что уровни энергий связанных состояний являются простыми полюсами амплитуды рассеяния, которую необходимо доопределить введением в нее параметра самосопряженного расширения. Получены выражения для амплитуды и поперечного сечения рассеяннния, зависящие от ориентации спина фермиона в начальном состоянии.

Ключевые слова: сингулярный гамильтониан, самосопряженные граничные условия, физическая регуляризация, аномальный магнитный момент, связанные состояния, амлитуда и сечение рассеяния, эффект Ааронова–Кашера.

УДК: 539.1. PACS: 03.65.-w, 03.65.Ge, 03.65.Nk.

Введение

Постоянный интерес к различным квантовым эффектам в двумерных системах фермионов связан с возможностью применения полученных для них результатов при изучении квантового эффекта Ааронова–Бома [1], квантового эффекта Холла [2] и высокотемпературной сверхпроводимости [3]. Решения двумерного уравнения Дирака в потенциале Ааронова–Бома применялись для описания движения фермионов в поле космической струны [4].

Квантовый эффект Ааронова–Бома [1] — квантовое физическое явление, демонстрирующее, в частности, важность векторных потенциалов внешних полей в квантовой механике. При движении электрона в области, где магнитного поля нет, но векторный потенциал (генерирующий магнитный поток внутри соленоида) отличен от нуля, волновая функция электрона приобретает (геометрическую) фазу, зависящую от магнитного потока. Эффект, производимый векторным потенциалом, может стать наблюдаемым, так как относительная (калибровочно-инвариантная) фаза волновой функции электрона коррелирует с (являющимся чистой калибровкой) векторным потенциалом в области, где магнитное поле отсутствует [5].

Интересным и важным следствием эффекта приобретения геометрической фазы электроном в поле Ааронова–Бома является фаза, приобретаемая волновой функцией нейтрального массивного фермиона, обладающего магнитным моментом, при его движении во внешнем электрическом поле бесконечно длинной, тонкой, однородно заряженной нити в плоскости, нормаль к которой направлена вдоль нити. Фаза, приобретаемая волновой функцией фермиона, влияет на характеристики движения фермиона и в итоге приводит к эффектам, зависящим от спина фермиона и напряженности электрического поля, которые можно наблюдать при рассеянии фермионов в электрическом поле заряженной нити (эффект Ааронова–Кашера [6]).

Гамильтониан уравнения Дирака–Паули для нейтрального фермиона с АММ в рассматриваемом внешнем поле существенно сингулярен и требует дополнительного доопределения для того, чтобы рассматривать этот гамильтониан как самосопряженный квантово-механический оператор. Это необходимо для того, чтобы корректно определить физические наблюдаемые как самосопряженные операторы в подходящем гильбертовом пространстве. Сначала необходимо найти все самосопряженные расширения исходного оператора и затем выделить корректный самосопряженный гамильтониан с помощью физически приемлемых граничных условий в точке сингулярности гамильтониана. Другими словами, для каждого самосопряженного расширения гамильтониана, нужно определить подходящее гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, включающее точку сингулярности исходного гамильтониана. Оказывается, что в рассматриваемом случае существует целое семейство самосопряженных гамильтонианов.

Различные значения параметра самосопряженного расширения приводят, вообще говоря, к неэквивалентным физическим системам [7], поэтому физическая интерпретация каждого самосопряженного расширения является чисто физической проблемой в том смысле, что каждое расширение, вероятно, можно получить с помощью подходящей физической регуляризации и последующего предельного перехода (снятия регуляризации) [8].

Следует отметить, что проблема существования связанных состояний фермионов во внешних полях вида Ааронова–Бома исследовалась в работах [7–13]. Самосопряженные гамильтонианы с различными сингулярными потенциалами изучались во многих работах (см., например, обзор [8] и ссылки, в которых задачи рассмотрены с кулоновским потенциалом, с суперпозицией потенциала Ааронова–Бома и однородного магнитного поля, с потенциалом Калоджеро и [14–17]). Отметим также, что квантовая динамика нейтрального фермиона, обладающего магнитным моментом, в пространстве-времени космической струны анализировалась методом самосопряженных расширений в [18].

В настоящей работе мы находим все квантово-механические состояния (волновые функции свободных и связанных состояний) для всех самосопряженных гамильтонианов уравнения Дирака–Паули во внешнем электрическом поле бесконечно длинной, тонкой, заряженной нити в нерелятивистском приближении. Показано, что уровни энергий связанных состояний являются простыми полюсами амплитуды рассеяния, которую необходимо доопределить введением в нее параметра самосопряженного расширения. Чтобы понять соответствие исследуемой модели реальной физической ситуации, мы решаем задачу, используя физическую регуляризацию, применяемую в квантовой механике. Мы находим волновые функции свободных и связанных состояний фермиона, а также дискретные уровни энергии методом физической регуляризации и устанавливаем, каким значениям параметра самосопряженного расширения соответствуют найденные этим методом величины. Получены выражения для амплитуды и поперечного сечения рассеяннния, зависящие от ориентации спина фермиона в начальном состоянии, которые демонстрируют существенную роль спина фермиона в эффекте Ааронова–Кашера.

В работе используется система единиц, в которой $c=\hbar=1$.

1. Самосопряженные гамильтонианы

Уравнение Дирака–Паули для нейтрального фермиона с массой m и АММ M во внешнем электрическом поле можно записать в форме уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H_{DP}\Psi. \tag{1}$$

Здесь

$$H_{DP}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P}+iM\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}+\beta m \tag{2}$$

— гамильтониан, $\mathbf{P}=-i\nabla$ — оператор импульса, Ψ — биспинор, $\gamma^\mu=(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{\alpha}$ — матрицы Дирака, $\mathbf{E}$ — напряженность внешнего электрического поля. В нерелятивистском приближении, представляя Ψ в виде

$$\Psi=e^{-imt}\begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где ψ и χ — спиноры, получим

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{(\mathbf{P}-\mathbf{E}\times\mathbf{M})^2-M^2\mathbf{E}^2+M\nabla\cdot\mathbf{E}}{2m}\psi. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{M}=M\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, $\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$, ρ — плотность заряда.

Напряженность электрического поля бесконечно длинной, прямой (ось z), тонкой, однородно заряженной нити с плотностью заряда $a/2$ есть

$$E_x=\frac{ax}{r^2},\quad E_y=\frac{ay}{r^2},\quad E_z=0,\quad E_r=\frac{a}{r},\quad E_\varphi=0, \tag{5}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\arctan(y/x)$, z — цилиндрические координаты.

Считая, что фермион движется в плоскости xy и, следовательно, проекция импульса фермиона на ось z равна нулю: $p_z=0$, уравнение (4) в поле (5) запишем как

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\Big(P_x^2+P_y^2+2M\sigma_3(E_xP_y-E_yP_x)+ +M^2(E_x^2+E_y^2)+M\nabla\cdot\mathbf{E}\Big)\psi. \tag{6}$$

Так как радиальная компонента (макроскопического) поля определяется средней плотностью заряда как $\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$, величина $\rho=a\,\delta(r)/4\pi r$ хорошо аппроксимирует плотность заряда. Решения уравнения (6) ищем в виде

$$\psi(t,r,\varphi)=\frac{\exp(-iEt+ik\varphi)}{\sqrt{2\pi r}}F_E(r), \tag{7}$$

где E — энергия фермиона, k — целое число, а $F_E(r)$ — спинор.

Так как гамильтониан содержит только матрицу σ_3, спинор $F_E(r)$ удовлетворяет уравнению $\sigma_3F_{E,s}(r)=sF_{E,s}(r)$, а собственные значения $s=\pm1$ соответствуют двум значениям проекции спина фермиона на ось z. Обозначая верхнюю и нижнюю компоненты спинора как $F_{E,s=1}(r)\equiv F_{E,1}(r)$ и $F_{E,s=-1}(r)\equiv F_{E,2}(r)$, скалярное произведение спиноров $F_E(r)$ и $G_E(r)$ определим формулой

$$(F_E(r),G_E(r))=\int\Big(F_{E,1}^*(r)G_{E,1}(r)+F_{E,2}^*(r)G_{E,2}(r)\Big)dr. \tag{8}$$

Здесь F^* — комплексно сопряженная функция. Таким образом, любое решение уравнения (6) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} AF_{E,1}(r) \\ BF_{E,2}(r) \end{pmatrix} = AF_{E,1}(r)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + BF_{E,2}(r)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где A, B — комплексные постоянные.

Решения $F_E(r)$ в поле (5) определяются уравнениями

$$h\begin{pmatrix} F_{E,1}(r) \\ F_{E,2}(r) \end{pmatrix} = 2mE\begin{pmatrix} F_{E,1}(r) \\ F_{E,2}(r) \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где

$$h = h^0 + Ma\frac{\delta(r)}{r}, \qquad (11)$$

$$h^0 = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k^2 + (Ma)^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2kMa}{r^2}\sigma_3. \qquad (12)$$

Из (9), (12) видно, что две компоненты спинора $F_{E,s=1}(r)$ и $F_{E,s=-1}(r)$ как функции координаты r фактически можно описать единой функцией $F_{E,s}(r)$, зависящей явно от s (см., например, [19]), что часто будет использоваться далее.

Радиальный гамильтониан h сингулярен. Поэтому сначала необходимо найти все расширения исходного гамильтониана h^0 и затем выделить корректный самосопряженный гамильтониан с помощью физических граничных условий в точке сингулярности гамильтониана. Другими словами, для каждого самосопряженного расширения гамильтониана мы должны указать область D в гильбертовом пространстве функций, квадратично-интегрируемых на полуоси $[0,\infty)$. Самосопряженные расширения нетрудно найти в случае, если исходный оператор Гамильтона является симметрическим. Оператор h — симметрический, если для любых его решений $F(r)$ и $G(r)$

$$\int_0^\infty G^*(r)hF(r)\,dr = \int_0^\infty [hG(r)]^*F(r)\,dr. \qquad (13)$$

Радиальный гамильтониан h содержит сингулярный член $(Ma\,\delta(r)/r)$, который, очевидно, влияет на поведение волновых функций при $r=0$; влияние этого члена будет учитываться путем асимптотических самосопряженных граничных условий в точке $r=0$.

Определим оператор h^0 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{L}^2(0,\infty)$ как

$$h^0\colon \begin{cases} D(h^0) = D(0,\infty), \\ h^0F(r) = h_0F(r), \end{cases}$$

где $D(0,\infty)$ — пространство гладких функций на $(0,\infty)$ исчезающих при $r\to\infty$. Очевидно, h^0 является симметрическим оператором.

Пусть h есть самосопряженное расширение h^0 в $\mathfrak{L}^2(0,\infty)$. Рассмотрим сопряженный оператор $h^\dagger$, заданный уравнением (12), но определенный как

$$h^\dagger\colon \begin{cases} D(h^\dagger) = F(r)\colon F(r) \text{ абсолютно} \\ \qquad \text{непрерывны на } (0,\infty), \\ \qquad F,\ h^0F \in \mathfrak{L}^2(0,\infty), \\ h^\dagger F(r) = h_0F(r), \end{cases} \qquad (14)$$

т. е. $D(h^0)\subset D(h^\dagger)$. Симметрический оператор h является самосопряженным, если область $D(h)$ совпадает с областью (его) сопряженного оператора $D(h^\dagger)\equiv D^\dagger$.

Интегрируя (13) по частям и проверив, что для любой функции $F(r)$ из $D(h^\dagger)$ $\lim\limits_{r\to\infty}F(r)=0$, получим

$$\left[(G^*)'F - G^*F'\right]\Big|_{r=0} = 0, \qquad (15)$$

где штрихом обозначена производная по r. Если (15) выполняется для любой функции $F(r)$ из области $D^\dagger$, то оператор $h^\dagger$ симметрический и поэтому самосопряженный. Это означает, что оператор h^0 существенно самосопряженный, т. е. его единственное самосопряженное расширение есть его замыкание, которое совпадает с сопряженным оператором $h=h^\dagger$. Если (15) не удовлетворяется, то самосопряженный оператор $h=h^\dagger$ можно найти как сужение оператора $h^\dagger$ на (максимально допустимую) область $D(h)\subset D^\dagger$. Таким образом, любая функция $F(r)$ из $D(h)\subset D^\dagger$ должна удовлетворять самосопряженному граничному условию

$$\left[(F^*)'F - F^*F'\right]\Big|_{r=0} = 0. \qquad (16)$$

Так как знаки a и M фиксированы, достаточно рассмотреть случай $Ma>0$. Представим Ma как

$$Ma = [Ma] + \mu \equiv n + \mu, \qquad (17)$$

где $n = 0,1,2,\ldots$ — целая часть Ma, т. е. наибольшее целое $\leqslant Ma$, а $1>\mu\geqslant 0$. Удобно заменить индекс k на $l\to k+sn$. Так как любое решение $F_E(r)$ уравнения (10) должно удовлетворять граничному условию (16), можно отделить три области значений $(l+s\mu)^2$.

В 1-й области $(l+s\mu)^2\geqslant 1$, или $l+s\mu\geqslant 1$ и $l+s\mu\leqslant -1$. Поскольку $-\infty<1<\infty$ и $1>\mu\geqslant 0$, нетрудно получить, что для $\mu>0$, $s=1$ ($\mu>0$, $s=-1$) допустимы все значения l, за исключением $l=-1,0$ ($l=0,1$), и только $l=0$, $s=\pm1$ не разрешены для $\mu=0$. Можно показать, что для таких l исходный симметрический гамильтониан h^0 существенно самосопряженный; его единственное самосопряженное расширение есть сопряженный оператор $h_1=h^\dagger$ с областью определения $D(h^\dagger)$

$$D(h^\dagger) = \Big\{F_E(r)\colon F_E(r),\ F_E'(r) \text{ абсолютно непрерывны в } (0,\infty),$$
$$F_E(r),\ h_0F_E(r)\in\mathfrak{L}^2(0,\infty),\ h_1F_E(r) = h_0F_E(r)\Big\}. \qquad (18)$$

Обобщенные собственные функции $F_E(r)$ радиального гамильтониана h^0 в 1-й области имеют вид

$$F_E(r) = \sqrt{r}J_\nu(pr), \qquad (19)$$

где $J_\nu(pr)$ — функция Бесселя порядка $\nu = |l + s\mu|$ и $p = \sqrt{2mE}$. Спектр энергий непрерывен с $E > 0$.

Во 2-й области $(l + s\mu)^2 < 1$. Видим, что только $l = 0$ допустимо для $\mu = 0$ и два значения $l = 0, \mp 1$ для $s = \pm 1$ допустимы при $\mu > 0$. В этой области для каждого $l = 0, \mp 1$ существует однопараметрическое $U(1)$-семейство самосопряженных радиальных гамильтонианов h_ξ, которое можно классифицировать действительным параметром $-\infty \leqslant \xi \leqslant \infty$ (или $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\xi = \tan(\theta/2)$); при этом значения $\xi = \pm\infty$, $\theta = 0, 2\pi$ эквивалентны. Области D_ξ этих самосопряженных радиальных гамильтонианов определены как

$$h_\xi\colon \begin{cases} D_\xi = \begin{cases} F_E\colon F_E,\ F_E' \text{ абсолютно} \\ \quad \text{непрерывны в } (0,\infty),\ h_\xi F \in \mathfrak{L}^2(0,\infty), \\ F_E(r) = A\left[(mr)^{1/2+\gamma_l} + \xi (mr)^{1/2-\gamma_l}\right] + \\ \qquad + O(r^3/2),\ r \to 0,\ -\infty < \xi < \infty, \\ F_E(r) = A(mr)^{1/2-\gamma_l} + O(r^{1/2}), \\ \qquad r \to 0,\ \xi = \infty, \end{cases} \\ h_\xi F_E(r) = h_0 F_E(r), \end{cases} \tag{20}$$

где A — комплексная постоянная и $\gamma_l = ||l| - \mu|$.

Спектр энергий самосопряженного радиального гамильтониана h_ξ непрерывен ($E \geqslant 0$) при любых ξ из $-\infty < \xi < \infty$, а обобщенные собственные функции имеют вид

$$F_E(r) = C\sqrt{r}\left[J_{\gamma_l}(pr) + \xi \frac{\Gamma(1-\gamma_l)}{\Gamma(1+\gamma_l)} \left(\frac{-E}{2m}\right)^{\gamma_l} J_{-\gamma_l}(pr)\right], \tag{21}$$

где C — комплексная постоянная, а $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера аргумента x.

В области значений параметра $-\infty < \xi < 0$ ($\pi < \theta < 2\pi$), наряду со свободными, появляются и связанные состояния фермионов (см. также [12]). Для того чтобы рассматриваемая квантовая система имела бы связанное состояние, энергия этого состояния должна быть отрицательной и, следовательно, должны появиться дискретные уровни энергии с $E < 0$ в дополнение к непрерывному спектру. Дискретные уровни энергий являются простыми полюсами амплитуды рассеяния в комплексной плоскости E и находятся на первом (физическом) листе римановой поверхности $\operatorname{Re}\sqrt{-E} > 0$ (см., например, [19]); очевидно, эти полюсы являются решениями (корнями) уравнения $B_l(E) = 0$, где $B_l(E)$ есть коэффициент (амплитуда) сходящейся волны в (21) при $r \to \infty$:

$$B_l(E) = 1 + \xi \frac{\Gamma(1-\gamma_l)}{\Gamma(1+\gamma_l)} \left(\sqrt{\frac{-E}{2m}}\right)^{2\gamma_l}. \tag{22}$$

Отсюда получаем энергию связанного состояния в явном виде

$$E_l^- = -2m\left(-\xi \frac{\Gamma(1-\gamma_l)}{\Gamma(1+\gamma_l)}\right)^{-1/\gamma_l}. \tag{23}$$

Нормированная собственная функция связанного состояния F_l^- такова:

$$F_l^-(r) = \sqrt{\frac{-2mE_l^- r \sin(\pi\gamma_l)}{\pi\gamma_l}} K_{\gamma_l}\left(\sqrt{-2mE_l^-}\, r\right),$$

где $K_{\gamma_l}\left(\sqrt{-2mE_l^-}\, r\right)$ — функция Макдональда. Представляя (23) как

$$E_0^- = -2m\left(-\xi \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)}\right)^{-1/\mu}, \tag{24}$$

$$l = 0,\quad s = \pm 1,\quad \gamma_0 = \mu,\quad 0 < \mu < 1,$$

$$E_{\pm 1}^- = -2m\left(-\xi \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2-\mu)}\right)^{-1/(1-\mu)}, \tag{25}$$

$$l = \pm 1,\quad s = \mp 1,\quad \gamma_{\pm 1} = 1 - \mu,$$

видим, что $E_0^-(\mu) = E_{\pm 1}^-(\mu')$, где $\mu' = 1 - \mu$, $0 < \mu' < 1$.

Некоторый интерес может представить случай $l + s\mu = 0$. В этом случае допустимых значений l нет для $\mu > 0$ и одно значение $l = 0$ ($k = -sn$) допустимо для $\mu = 0$. Для $l = 0$ существует однопараметрическое $U(1)$-семейство самосопряженных радиальных гамильтонианов h_ξ, параметризованное действительным параметром $\infty \geqslant \xi \geqslant -\infty$, с областями D_ξ, определенными как

$$h_\xi\colon \begin{cases} D_\xi = \begin{cases} F_E(r),\ F_E'(r) \text{ абсолютно} \\ \qquad \text{непрерывны в } (0,\infty), \\ \quad F_E(r),\ h_\xi F_E \in \mathfrak{L}^2(0,\infty), \\ F_E(r) = C\sqrt{r}\,[\ln(mr) + \xi] + \\ \qquad + O\big(r^{3/2}\ln(mr)\big), \\ \quad r \to 0,\ -\infty < \xi < +\infty, \\ F_E(r) = C(r)^{1/2},\ r \to 0,\ \xi = \infty, \end{cases} \\ h_\xi F_E(r) = h_0 F_E(r), \end{cases} \tag{26}$$

где C — комплексная постоянная.

Можно показать, для $\infty \geqslant \xi \geqslant -\infty$ спектр энергий непрерывный с $E \geqslant 0$, а также для $-\infty < \xi < 0$ ($\pi < \theta < 2\pi$) в дополнение к непрерывному спектру существует один дискретный уровень энергии с $E < 0$:

$$E_0 = -4me^{2(\xi - \mathcal{C})}, \tag{27}$$

где $\mathcal{C} = 0.57721$ — постоянная Эйлера [20]. Обобщенные собственные функции, принадлежащие непрерывному спектру, есть линейные комбинации функций Бесселя ($J_0(pr)$) и Неймана ($N_0(pr)$); нормированная волновая функция связанного состояния есть $\sqrt{-2mE_0 r} K_0(\sqrt{-2mE_0} r)$.

2. Физическая регуляризация

Выбор самосопряженного гамильтониана требует дополнительных физических аргументов [8]. Радиальный гамильтониан h содержит дополнительный сингулярный потенциал ($Ma\,\delta(r)/r$). Этот потенциал влияет только на поведение волновых в функций в источнике, но не охватывается исходным (симметрическим) гамильтонианом h^0, чья область содержит лишь волновые функции, исчезающие в точке $r=0$. Математически дополнительный потенциал можно охватить конструированием самосопряженных расширений гамильтонианов, параметризованных самосопряженными граничными условиями в точке $r=0$, поэтому, с точки зрения физики, отличные от нуля значения параметра самосопряженного расширения можно рассматривать (трактовать) как проявление дополнительных сингулярных потенциалов ($\sim\delta(r)/r$) [8]. Для каждого ξ мы находим допустимую область для самосопряженного гамильтониана h_ξ, и различные значения ξ приводят, строго говоря, к неэквивалентным физическим случаям (см. [7] и [21–24].

Чтобы понять соответствие исследуемой модели реальной физической ситуации, решим задачу, используя физическую регуляризацию, применяемую в квантовой механике. Для этого рассмотрим модель с (несингулярным) гамильтонианом, в котором конфигурация внешнего электрического поля

$$E_z,\, E_\varphi=0,\quad r\geqslant 0;\quad E_r=\begin{cases}0, & r<R,\\ E_r=a/r, & r>R;\end{cases}\quad mR\ll 1, \tag{28}$$

а двумерный сингулярный потенциал $Ma\,\delta(r)/r$ заменяется на одномерный регуляризованный потенциал $Ma\,\delta(r-R)/R$ (см. также [25]). Например, такое электрическое поле есть поле бесконечно длинного прямого (вдоль оси z) тонкого (поперечного сечения πR^2) проводника с поверхностной плотностью заряда $a/2$. Подчеркнем, что функционально конфигурации с потенциалами $Ma\,\delta(r)/r$ и $Ma\,\delta(r-R)/R$ существенно различаются, но хорошо определенный, регуляризованный $Ma\,\delta(r-R)/R$ потенциал можно учесть путем сшивки волновых функций и их производных в точке $r=R$; предельный переход $R\to 0$ соответствует снятию регуляризации.

Ясно, что в поле (28) в качестве собственных функций гамильтониана h^0 следует выбрать только регулярные функции, т.е. функции $F_E(r)$, удовлетворяющие условию $F_E(0)=0$ при $r=0$. Условия непрерывности («сшивка») собственных функций гамильтониана h^0 и их производных из области $r<R$ с соответствующими функциями из области $r>R$ в точке $r=R$ с учетом потенциала $Ma\,\delta(r-R)/R$ имеют вид

$$F_E(R-\delta)=F_E(R+\delta),\quad RF_E'(r)|_{R-\delta}^{R+\delta}=MaF_E(R),\quad \delta\to 0. \tag{29}$$

Нужные нам собственные функции гамильтониана h^0 (состояния рассеяния) в области $r>R$ — это найденные выше функции (19)

$$\begin{aligned} F_E(r)&=N\sqrt{r}\,J_\nu(pr), & \nu\geqslant 1;\\ F_E(r)&=N_\pm\sqrt{r}\,J_{\pm\gamma_l}(pr), & 0<\gamma_l<1,\end{aligned} \tag{30}$$

чьи коэффициенты определяются из условий (29). Собственные функции $F_l^-(r)=N_0\sqrt{r}K_{\gamma_l}(pr)$, $0<\gamma_l<1$, описывают связанные состояния нейтрального фермиона с АММ в области $r>R$.

Исключая нормировочные коэффициенты из (29), получим трансцендентное уравнение, которым неявно определяются дискретные уровни энергии в связанных состояниях

$$\frac{[\sqrt{X}K_{\gamma_l}(X)]'}{K_{\gamma_l}(X)}-\frac{[\sqrt{X}J_{|l|}(X)]'}{J_{|l|}(X)}=\frac{Ma}{\sqrt{X}}, \tag{31}$$

где $X=\sqrt{2m|E^-|}R$, и здесь штрих обозначает производную по X. С учетом того что параметр регуляризации мал, $R\ll 1/m$, используем следующие разложения функций:

$$J_0(z)=1-\frac{z^2}{2},\quad J_\nu(z)=\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}, \tag{32}$$

$$K_\nu(z)=-\frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}\left[\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}-\frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}\right].$$

Подставляя (32) в (31), после простых вычислений получим уравнение, определяющее дискретные уровни энергии

$$\frac{X^{\gamma_l}(|l|+Ma-\gamma_l)}{2^{\gamma_l}\Gamma(1+\gamma_l)}=\frac{X^{-\gamma_l}(|l|+Ma+\gamma_l)}{2^{-\gamma_l}\Gamma(1-\gamma_l)}, \tag{33}$$

откуда находим

$$E^-=-\frac{2}{mR^2}\left[\frac{(|l|+Ma-\gamma_l)\Gamma(1-\gamma_l)}{(|l|+Ma+\gamma_l)\Gamma(1+\gamma_l)}\right]^{-1/\gamma_l}, \tag{34}$$

$$l=0,\quad 0<\gamma_0<1/2;\quad l=\pm 1,\quad s=\mp 1,\quad 1/2<\gamma_l<1.$$

Подчеркнем, что выражение в квадратных скобках в (34) положительно.

С точки зрения физики связанные состояния могут возникать, если потенциал, равный сумме потенциала $U(r)$ в (12) и потенциала $Ma\,\delta(r-R)/R$, есть потенциал притяжения. Но так как $U(r)=(\gamma_l^2-1/4)/r^2$, $r>R$; $U(r)=(l^2-1/4)/r^2$, видим, что величина γ_l должна находиться в интервале $0<\gamma_0<1/2$ для $l=0$ и $1/2<\gamma_l<1$ для $|l|=1$ и, кроме того, константа (взаимодействия фермиона с полем) связи Ma также должна соответствовать притяжению, т.е. $Ma<0$. Из этого следует, что в рассматриваемом поле существует один уровень: $E^-<0$ (34) с $l=0$, $s=\pm 1$. Приведенная физическая аргументация применима и в отношении формул (24) и (25), полученных методом самосопряженных расширений.

Следует отметить, что выражения (24) и (25) *содержат параметр самосопряженного расширения ξ, а связанные состояния существуют только при* $-\infty<\xi<0$ ($\pi<\theta<2\pi$); формула (34) содержит параметр регуляризации R. Вместе с этим видим, что выражение (34) для энергии связанного состояния, полученное методом физической регуляризации, расходится в пределе $R\to 0$, т.е. при снятии регуляризации. Такое поведение энергии связанного состояния обусловлено тем, что мы имеем дело с гамильтонианом (11) (в котором вместо члена $Ma\,\delta(r)/r$ присутствует $Ma\,\delta(r-R)/R$). Весьма существенно, что константа связи $Ma\equiv|\mu|$ безразмерна и, сдедовательно, гамильтониан фактически не содержит исходного параметра размерности энергии (массы). Тем не менее связанное состояние возникает. Поэтому константа связи должна зависеть от параметра физической регуляризации R так, чтобы энергия связанного состояния оставалась конечной при снятии регуляризации в пределе $R \to 0$, что фактически означает необходимость перенормировки константы связи (взаимодействия) уже в рамках квантовой механики. Таким образом, параметр обрезания $\Lambda = 1/R$, который стремится к бесконечности в пределе $R \to 0$, трансмутирует в энергию связанного состояния E^- любой величины. Это нерелятивистский аналог явления размерной трансмутации, которое имеет место в безмассовых релятивистских теориях (см. [5, 26]).

3. Задача рассеяния

Обсудим кратко рассеяние нейтрального фермиона с АММ в исследуемом электрическом поле. Волновую функцию частицы можно представить в виде суперпозиции собственных функций непрерывного спектра (19), (21) или (30). Заметим, если $Ma\,\delta(r)/r$ — потенциал притяжения, то сингулярные функции (сконцентрированные в точке $r=0$) должны присутствовать в разложении волновой функции фермиона по собственным функциям гамильтониана, что совершенно разумно с точки зрения физики. Таковыми являются функции (21), которые при $\xi \neq 0$ квадратично-интегрируемы, но сингулярны в точке $r=0$. Кроме того, отсутствие в подобных разложениях сингулярных (в источнике) функций в некоторых случаях с сингулярными потенциалами может привести к потери полноты решений в угловом базисе.

Волновую функцию нейтрального фермиона с АММ (7) $\psi(r,\varphi)$ можно представить в виде следующего (наиболее общего и удобного для задачи рассеяния) разложения по собственным функциям (19) и (21):

$$\begin{pmatrix}\psi_1(r,\varphi)\\ \psi_1(r,\varphi)\end{pmatrix} = \sum_{k=-\infty, k\neq -sn}^{\infty} \frac{N_k}{2} J_\nu(pr) e^{ik\varphi} \begin{pmatrix}1+s\\ 1-s\end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) J_\mu(pr) e^{-i\pi\mu/2}(1+s)\\ \sin(\theta/2) J_{-\mu}(pr) e^{i\pi\mu/2}(1-s)\end{pmatrix} e^{-i|n|\varphi}, \quad (35)$$

где $N_k = e^{-i\nu\pi/2} e^{-ik\pi/2}$, $\nu = |k+sn+s\mu|$, $1>\mu>0$.

Рассмотрим рассеяние нейтрального фермиона с АММ в физически реализуемом случае, а именно в электрическом поле (28) и потенциале $Ma\,\delta(r-R)/R$ с $Ma<0$. Отметим, что, рассматривая этот случай мы существенно упрощаем задачу без ограничения общности ее рассмотрения. Волновую функцию нейтрального фермиона с АММ $\psi(r,\varphi)$ в области $r>R$ можно представить в виде разложения по собственным функциям (30), применяя условия непрерывности (29) и далее переходя к пределу $R \to 0$:

$$\begin{pmatrix}\psi_1(r,\varphi)\\ \psi_1(r,\varphi)\end{pmatrix} = \sum_{k=-\infty,\ k\neq -sn}^{\infty} \frac{N_k}{2} J_\nu(pr)\, e^{ik\varphi} \begin{pmatrix}1+s\\ 1-s\end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}J_\mu(pr) e^{-i\pi\mu/2}(1+s)\\ J_{-\mu}(pr) e^{i\pi\mu/2}(1-s)\end{pmatrix} e^{-in\varphi}. \quad (36)$$

Видим, что, в отличие от энергии связанного состояния, волновая функция не содержит R и, следовательно, хорошо определена при снятии регуляризации. Нелишне также отметить, что функция (35) совпадает с (36) при $\theta = 0$ (для $s=1$) и $\theta = \pi$ (для $s=-1$).

Также подчеркнем, что, с точки зрения физики, в рассматриваемой здесь задаче для проведения регуляризации достаточно одного параметра R, с помощью которого можно учесть конечную толщину нити. При этом напряженность электрического поля внутри нити определяется распределением заряда в нити.

Считаем, что до рассеяния фермион движется в положительном направлении x, т. е. e^{ipx} — падающая волна, φ — очевидно, угол рассеяния. Представим волновую функцию фермиона при $r \to \infty$ в виде суперпозиции падающей плоской и (рассеянной) расходящейся цилиндрической волн:

$$\psi_p(r,\varphi) \longrightarrow e^{ipx} + \frac{f(\varphi)}{\sqrt{r}} e^{i(pr-\pi/4)}, \quad (37)$$

где $f(\varphi)$ — амплитуда рассеяния. С учетом того что плоская волна при $r \to \infty$ представима как

$$e^{ipx} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi pr}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\varphi}\left(e^{i(pr-\pi/4)} + (-1)^l e^{-i(pr-\pi/4)}\right)$$

и используя разложение функций Бесселя при больших значениях аргумента в виде $J_{\pm\nu}(z) = \sqrt{2/\pi z}\cos(z \mp \pi\nu/2 - \pi/4)$, после несложных вычислений нетрудно получить формулу

$$\psi(r,\varphi) - e^{ipx} = \frac{f_s(\varphi)}{\sqrt{r}} e^{i(pr-\pi/4)},$$

в которой амлитуда рассеяния полностью определена:

$$f_s(\varphi) = -\frac{s}{\sqrt{2\pi p}} \frac{e^{is(|n|-1/2)\varphi + i|n|\pi}\sin(\pi\mu)}{\sin(\varphi/2)} u_s, \\ u_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+s\\ 1-s\end{pmatrix}. \quad (38)$$

Дифференциальное сечение рассеяния нейтральных фермионов с АММ с проекциями спинов (на ось z) в начальном состоянии $s=\pm 1$ в рассматриваемом электрическом поле не зависит от s и имеет вид

$$d\sigma = |f(\varphi)|^2 d\varphi = \frac{\sin^2(\pi\mu)}{2\pi p \sin^2(\varphi/2)} d\varphi. \quad (39)$$

Эта формула также описывает сечение рассеяния нейтральных массивных фермионов, обладающих магнитным моментом, во внешнем электрическом поле длинной тонкой однородно заряженной нити (эффект Ааронова–Кашера) [6].

Интересно, что сечение рассеяния зависит от ориентации спина фермиона в начальном состоянии. Как пример рассмотрим случай, когда волновая функция фермиона в начальном состоянии $\psi(r,\varphi)$ — собственная функция оператора σ_1 с собственными значениями $s_1=\pm1$. В этом случае верхнюю (ψ_1) и нижнюю (ψ_2) компоненты спинора нетрудно представить как

$$\psi_1(r,\varphi)=\sum_{k=-\infty,k\neq -sn}^{\infty} N_k J_\nu(pr)e^{ik\varphi}+ \\ +\left[J_\mu(pr)e^{i\pi\mu/2}+J_{-\mu}(pr)e^{-i\pi\mu/2}\right]e^{-i|n|\varphi},$$
$$\psi_2(r,\varphi)=s_1\psi_1(r,\varphi),$$

а два спинора имеют вид

$$\begin{pmatrix}\psi_1(r,\,\varphi)\\ \psi_1(r,\,\varphi)\end{pmatrix},\quad s_1=1;$$
$$\begin{pmatrix}\psi_1(r,\,\varphi)\\ -\psi_1(r,\,\varphi)\end{pmatrix},\quad s_1=-1. \tag{40}$$

В результате простых вычислений мы получили для амплитуд $f_\pm(\varphi)$ для $s_1=\pm1$ и сечений рассеяния следующие выражения (также см. [27]):

$$f_\pm(\varphi)=(-1)^{|n|}\frac{\sin(\pi\mu)}{\sqrt{2\pi p}\sin(\varphi/2)}\sin[(|n|-1/2)\varphi]u_\pm,$$
$$u_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm1\end{pmatrix},$$

и

$$d\sigma=\frac{\sin^2(\pi\mu)}{2\pi p\sin^2(\varphi/2)}\sin^2[(|n|-1/2)\varphi]d\varphi.$$

Отметим, что и в этом случае выражение для дифференциального сечения рассеяния не зависит от проекции спина фермиона s_1.

Следует отметить, что существование связанных состояний с отрицательными уровнями энергии может оказывать влияние на процесс рассеяния. Действительно, связанное состояние модифицирует состояния рассеяния, поскольку энергия связи фиксирует энергетическую шкалу перенормированной квантовой системы в целом. Однако полное сечение рассеяния нерелятивистских частиц на двумерном потенциале притяжения $-\lambda\delta(\mathbf{r})$ практически не изменяется в результате такой модификации [5]. Этот результат корректен и в рассматриваемом здесь случае.

Заключение

Найдены все квантово-механические состояния для всех самосопряженных гамильтонианов уравнения Дирака–Паули во внешнем электрическом поле бесконечно длинной, тонкой, заряженной нити в нерелятивистском приближении. Показано, что уровни энергий связанных состояний являются простыми полюсами амплитуды рассеяния, которую необходимо доопределить введением в нее параметра самосопряженного расширения. Для установления соответствия изучаемой проблемы с реальной физической системой, задача решена с использованием процедуры физической регуляризации, применяемой в квантовой механике. Показано, для того чтобы энергия связанного состояния оставалась конечной при снятии регуляризации в пределе $R\to 0$, необходимо перенормировать константу связи (взаимодействия) уже в рамках квантовой механики. Получены выражения для амплитуды и поперечного сечения рассеяния, зависящие от ориентации спина фермиона в начальном состоянии, которые демонстрируют существенную роль спина фермиона в эффекте Ааронова–Кашера.

Список литературы

1. *Aharonov Y., Bohm D.* // Phys. Rev. 1959. **115**. P. 485.
2. Квантовый эффект Холла / Под ред. Р. Пренджа и С. Гирвина. М.: Мир, 1989.
3. *Wilczek F.* Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore: World Scientific, 1990.
4. *Alford M.G., Wilczek F.* // Phys. Rev. Lett. 1989. **62**. P. 1071.
5. *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1982.
6. *Aharonov Y., Casher A.* // Phys. Rev. Lett. 1984. **53**. P. 319.
7. *Ph. de Sousa G.* // Phys. Rev. D. 1989. **40**. P. 1346.
8. *Gitman D.M., Tyutin I.V., Voronov B.L.* Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics. New York: Springer Science + Business Media, 2012.
9. *Khalilov V.R.* // Mod. Phys. Lett. A. 2006. **21**. P. 1647.
10. *Халилов В.Р.* // Теоретическая и математическая физика. 2010. **163**. С. 132. (*Khalilov V.R.* // Theoretical and Mathematical Physics. **163**. P. 511.)
11. *Silva E.O., Andrade F.M., Filgueiras C., Belich H.* // Eur. Phys. J. C. 2013. **73**. P. 2402.
12. *Khalilov V.R.* // Eur. Phys. J. C. 2014. **74**. P. 2708.
13. *Silva E.O.* // Eur. Phys. J. C. 2014. **74**. P. 3112.
14. *Халилов В.Р., Ли К.Ы.* // Теоретическая и математическая физика. 2011. **169**. С. 368. (*Khalilov V.R., Lee K.-E.* // Theoretical and Mathematical Physics. **169**. P. 1683.)
15. *Khalilov V.R., Lee K.-E.* // J. Phys. A. 2011. **44**. 205303.
16. *Khalilov V.R.* // Eur. Phys. J. C. 2013. **73**. 2548.
17. *Khalilov V.R.* // Eur. Phys. J. C. 2014 **74**. 3061.
18. *Andrade F.M., Filgueiras C., Silva E.O.* Scattering and bound states of a spin-1/2 neutral particle in the cosmic string spacetime. 2016. E-print arXiv: hep-th/1604.05051v2.
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1974.
20. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: ГИФМЛ, 1963.
21. *Andrade F.M., Silva E.O., Pereira M.* // Phys. Rev. D. 2012. **85**. 041701(R).

22. *Filgueiras C., Silva E.O., Andrade F.M.* // J. Math. Phys. 2012. **53**. 122106.
23. *Andrade F.M., Silva E.O.* // Phys. Lett. B. 2013. **719**. P. 467.
24. *Silva E.O., Andrade F.M.* // Europhys. Lett. 2013. **101**. 51005.
25. *Khalilov V.R., Ho C.-L.* // Ann. Phys. 2008. **323**. P. 1280.
26. *Coleman S., Weinberg E.* // Phys. Rev. D. 1973. **7**. P. 1888.
27. *Халилов В.Р., Мамсуров И.В.* // Теоретическая и математическая физика. 2009. **161**. С. 212. (*Khalilov V.R., Mamsurov I.V.* // Theoretical and Mathematical Physics. **161**. P. 1503.)

Quantum states of a neutral massive fermion with an anomalous magnetic moment in an external electric field

V. R. Khalilov

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: khalilov@phys.msu.ru.

The quantum dynamics of a nonrelativistic neutral massive fermion with an anomalous magnetic moment (AMM) is examined in the external electric field of an infinitely long thin homogeneously charged thread in the plane with a normal directed along the thread. The Hamiltonian of the Dirac–Pauli equation for a neutral fermion with AMM is essentially singular in the considered external field and requires a supplementary extension of the definition in order for it to be treated as a self-adjoint quantum-mechanical operator. All one-parameter self-adjoint extensions of the Hamiltonian of the Dirac–Pauli equation in the considered external field are found in the nonrelativistic approximation. The corresponding Hilbert space of squareintegrable functions, including a singularity point of the Hamiltonian, is specified for each self-adjoint extension of the Hamiltonian. The wave functions of free and bound states, as well as discrete energy levels, are determined by the self-adjoint extension method and their correspondence with similar quantities obtained by the physical regularization procedure is discussed. It is shown that energy levels of bound states are simple poles of the scattering amplitude, which should be extended in definition by introducing the self-adjoint extension parameter into it. Expressions for the scattering amplitude and cross-section, depending on the orientation of the initial-state spin of fermion, are obtained.

Keywords: singular Hamiltonian, self-adjoint boundary conditions, physical regularization, anomalous magnetic moment, bound states, scattering amplitude and cross-section, the Aharonov–Casher effect.
PACS: 03.65.–w, 03.65.Ge, 03.65.Nk.
Received 4 May 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **72**, No. 3. Pp. 293–300.

Сведения об авторе

Халилов Владислав Рустемович — профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: vrkhalilov@gmail.com.