ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

О «парадоксе» Карла Поппера и его связи с принципом неопределенностей Гейзенберга и квантовыми фантомными изображениями

А. В. Белинский[a]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования, кафедра физики Земли. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Статья поступила 03.11.2017, принята к публикации 15.01.2018.

Рассмотрен эксперимент по проверке выполнимости принципа неопределенностей Гейзенберга, предложенный Карлом Поппером и осуществленный на практике. В нем, как и в парадоксе Эйнштейна—Подольского—Розена, использовано свойство квантовой запутанности пары элементарных частиц. При этом фактически осуществляется формирование фантомного изображения узкой щели. Результаты эксперимента, на первый взгляд, свидетельствуют в пользу нарушения принципа неопределенностей. Но проведенный анализ пространственного разрешения фантомного изображения щели показывает, что это не так. Более корректный учет дифракции пространственно ограниченных световых пучков убеждает в отсутствии каких-либо нарушений принципа неопределенностей. Полученные результаты также могут быть использованы для оценки предельного качества дифракционно ограниченных фантомных изображений.

Ключевые слова: принцип неопределенности Гейзенберга, запутанные состояния, копенгагенская интерпретация, оптическая передаточная функция, пространственное разрешение.

УДК: 51.01, 51.02. PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud.

ВВЕДЕНИЕ

Принцип неопределенностей Гейзенберга [1] — один из основных принципов квантовой механики, который отличает мир квантовых явлений от мира классической физики. Дело в том, что, согласно ортодоксальной интерпретации, физические величины не имеют определенных значений до момента измерения, а взаимосвязь квантовых неопределенностей наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами, как раз и определяется этим принципом. Это не значит, что невозможно провести, например, одновременное точное измерение координаты и импульса частицы, хотя операторы, соответствующие наблюдаемым координате и импульсу, не коммутируют. Это сделать нетрудно, (см., например [2, 3]), но ценность этого измерения будет небольшой, т. к. оно даст лишь одну из комбинаций возможной квантовой суперпозиции этих величин.

В 1935 г. вышла статья Альберта Эйнштейна, Бориса Подольского и Натана Розена «Можно ли считать квантово-механическое описание физической реальности полным?» [4], в которой был описан мысленный эксперимент, впоследствии названный парадоксом Эйнштейна—Подольского—Розена (ЭПР), подвергший сомнению полноту квантовой механики. Суть эксперимента такова: авторы рассматривают пару запутанных частиц, измеряют x-компоненту импульса частицы 2 и x-координату частицы 1. Таким образом, в силу запутанности частиц, казалось бы, одновременно существуют точные значения и координаты, и импульса частицы 1 — значения физических величин, соответствующих некоммутирующим операторам, что невозможно, согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга. Отсюда авторы делают вывод о неполноте квантовой механики.

Разрешение парадокса представляется довольно простым: при измерении импульса частицы 2 волновая функция каждой из частиц переходит в состояние с точно определенным значением импульса, в котором измерение координаты будет давать равновероятно распределенную случайную величину. Таким образом, неравенство Гейзенберга статистически не нарушается.

Рассмотрим две квантовые системы: A, которая может находиться в состояниях $|i\rangle_A$, и B, состояния которой — $|j\rangle_B$. Тогда состояние системы AB имеет следующий вид:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B.$$

Если возможно представление

$$|\psi\rangle_{AB} = |\chi\rangle_A |\phi\rangle_B,$$

то состояние системы сепарабельное. Если же такое представление невозможно, то состояние системы запутанное, т. е. имеет место т. н. квантовая запутанность (от англ. quantum entanglement; также встречаются другие переводы — квантовая зацепленность, квантовая перепутанность, квантовая сцепленность, несепарабельность).

Для примера рассмотрим рождение электрон-позитронной пары из вакуума. Очевидно, в силу закона сохранения момента импульса суммарный спин пары частиц равен нулю. Следовательно, с вероятностью 50% у электрона будет спин $+\frac{1}{2}$, а у позитрона $-\frac{1}{2}$ и с той же вероятностью — наоборот.

Если измерить спин одной из частиц, то она перейдет в состояние, соответствующее измеренном спину, причем вторая частица в момент измерения состояния первой должна приобрести противоположный по знаку спин. Тогда волновая функция системы имеет вид

[a] E-mail: belinsky@inbox.ru

$$|\psi\rangle = \frac{\left|+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle}{\sqrt{2}},$$

где использовано обозначение

$$\left|+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|+\tfrac{1}{2}\right\rangle_{e^-} \times \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{e^+}.$$

Очевидно, состояние $|\psi\rangle$ непредставимо в виде произведения $|\phi\rangle_{e^-}$ и $|\chi\rangle_{e^+}$, т. е. оно является запутанным.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Один из возможных способов получения запутанного состояния пары фотонов основан на явлении спонтанного параметрического рассеяния (Spontaneous Parametric Down Conversion), предсказанного в 1966 г. Д. Н. Клышко [5] и далее исследованного им с сотрудниками [6, 7].

Сущность явления в следующем: луч накачки подается на нелинейный кристалл, где разделяется на два пучка — сигнальный и холостой — в соответствии с законом сохранения импульса и законом сохранения энергии:

$$\hbar\mathbf{k}_p = \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i,$$
$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i,$$

где i соответствует холостому фотону (idler), s — сигнальному (signal), p — фотону накачки (pump).

Поляризации сигнального и холостого фотонов строго коррелированы: если их поляризации совпадают, то говорят о первом типе СПР; если же поляризации ортогональны, то о втором.

Эффективность данного метода небольшая: примерно один из 10^7 фотонов накачки претерпевает СПР. Наиболее часто используемые кристаллы для наблюдения СПР: бета-борат бария (BBO), дигидроортофосфат калия (KDP), ниобат лития ($LiNbO_3$).

Интересно, что в нелинейных кристаллах с регулярной доменной структурой можно реализовать каскадные процессы параметрического распада накачки на сигнальный и холостой пучки и затем суммирование их частот с нераспавшимися фотонами накачки [8].

2. ФАНТОМНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

В стандартной схеме наблюдения изображения имеется источник света, облучающий объект, набор оптических элементов, строящих изображение, и система регистрации. При формировании и детектировании фантомного изображения (англ. ghost image) для извлечения информации о неизвестном объекте используется корреляция между двумя пучками. Рассмотрим эту методику в случае использования запутанных пар фотонов, генерируемых в процессе СПР. Она была предложена в [9] на основании эффекта взаимной фокусировки [10]. Современный обзор различных вариантов формирования фантомных изображений можно найти в монографии [11].

Фотоны из пары, находящейся в запутанном состоянии, разделяются в пространстве, и каждый из них распространяется по своему оптическому пути — зондирующему и воспроизводящему (рис. 1). Это легко осуществляется в процессе неколлинеарного параметрического взаимодействия. Прямое детектирование фотона 1 в зондирующем плече не несет информации

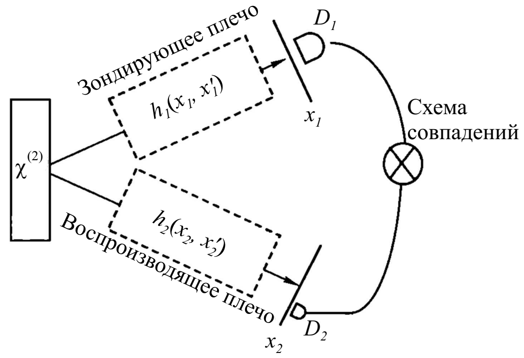

Рис. 1. Схема наблюдения фантомных изображений со сканирующим детектором

о пространственной структуре объекта в плоскости x_1, потому что детектор D_1 является интегрирующим, т. е. он фиксирован в определенном положении, отвечая только за регистрацию фотона 1 в широком возможном телесном угле его существования, не давая информации о его поперечной координате. В то же время детектор D_2 точечный, он сканирует поперечную координату фотона 2 при многократном повторении испускания запутанных пар фотонов. Таким образом, информация об объекте восстанавливается из измерения числа парных фотоотсчетов, т. е. взаимных совпадений, как функция поперечной координаты фотона 2.

Возможна несколько другая схема наблюдения фантомных изображений, где вместо сканирующего детектора D_2 используется матрица неподвижных детекторов (рис. 2).

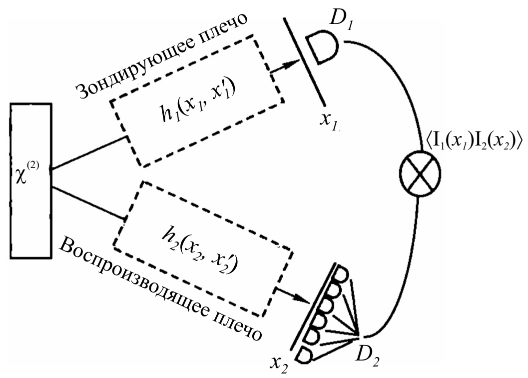

Рис. 2. Эквивалентная схема наблюдения фантомных изображений с матрицей детекторов

В этом случае процесс значительно ускоряется, т. к. при сканировании происходит существенная потеря числа зарегистрированных парных фотоотсчетов.

Название «фантомное изображение» отражает тот факт, что результат измерений получают из сканирования положения фотона, который никогда не проходит сквозь объект, а лишь просто коррелирован с «прощупывающим» фотоном.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ ПОППЕРА И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ

Карл Раймунд Поппер (1902–1994), один из величайших философов науки, будучи реалистом, не мог принять копенгагенскую интерпретацию квантовой механики, отрицая, главным образом, соотношение неопределенностей Гейзенберга. Он придерживался следующей точки зрения: квантовую механику можно и нужно интерпретировать реалистически — импульс и координата частицы являются определенными величинами — что соответствовало взглядам Альберта Эйнштейна. В 1934 г. (на год раньше статьи ЭПР) К. Поппер предложил первый мысленный эксперимент, который позволил бы опытным путем установить, какая из интерпретаций верна [12]. Однако этот эксперимент получил жесткую критику А. Эйнштейна и впоследствии Поппер признал это своей глубочайшей ошибкой («a gross mistake for which I have been deeply sorry and ashamed of ever since»). Значительно позже, в 1982 г. вышла книга Поппера «Quantum Theory and the Schism in Physics», посвященная защите реалистической интерпретации квантовой механики [13]. Именно в этой книге описан второй вариант эксперимента, который, по его мнению, позволил бы опровергнуть копенгагенскую интерпретацию.

Эксперимент Поппера, как и парадокс ЭПР, основан на квантовой запутанности пары частиц. Точечный источник S (по предложению Поппера, позитроний), расположенный в центре экспериментальной установки, излучает пары запутанных частиц, распространяющихся в противоположных направлениях к экранам A и B (рис. 3). В каждом экране имеется щель с регулируемым размером Δy. За экранами расположены матрицы счетчиков Гейгера, связанные схемой совпадений. Частицы могут излучаться в любом направлении. Однако если измерено направление распространения частицы 1, то частица 2 обязательно будет распространяться в противоположном направлении в силу закона сохранения импульса.

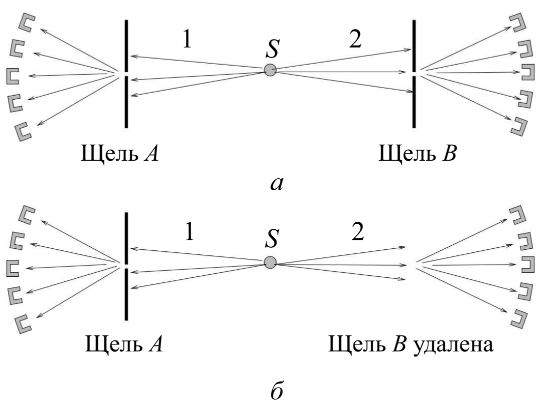

Рис. 3. Мысленный эксперимент Поппера

Сначала рассмотрим случай, когда щели A и B имеют одинаковый и достаточно малый размер (рис. 3, вверху). Поскольку частицы локализованы в области Δy из-за наличия щелей, y-компоненты импульса частиц претерпевают дополнительный разброс, что проявляется в срабатывании счетчиков, которых частицы не могли достичь при исходном распределении импульса. Здесь пока нет противоречия между копенгагенской интерпретацией и гипотезой Поппера.

Сделаем щель B очень широкой, проще говоря, уберем ее (рис. 3, внизу). В этой ситуации, согласно Попперу, частица 1 при прохождении через щель A локализуется в области Δy и частица 2, как следует из запутанности состояния, также локализуется в области Δy, что приводит к дополнительной неопределенности y-компоненты импульса частицы 2 (которая не проходит через реальную щель). Поппер считал, что такое поведение частицы 2 противоречит здравому смыслу и не может наблюдаться в реальном эксперименте. И действительно, получается, что как бы регистрация частицы 1 управляет поведением частицы 2. С высоты сегодняшнего понимания подобного рода экспериментов, конечно, ясно, что регистрируемое событие наступает только при одновременном детектировании обеих частиц, т. е. говорить о влиянии одной на другую в данном контексте бессмысленно: просто все «нежелательные», т. е. не соответствующие срабатыванию схемы совпадений события ей же и «отфильтровываются». Тем не менее в 1999 г. сделана успешная попытка реализации этого эксперимента и даже якобы доказавшая нарушение принципа неопределенности Гейзенберга.

3.1. Реализация эксперимента Поппера

В 1999 г. исследователи Y. H. Kim и Y. Shih выполнили эксперимент Поппера, используя в качестве источника запутанных частиц явление СПР второго типа в нелинейном кристалле бетабората бария [14]. На рис. 4 изображена упрощенная схема эксперимента.

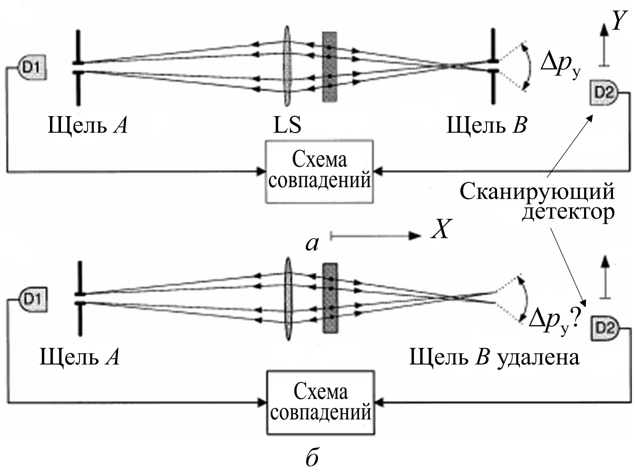

Рис. 4. Реализация эксперимента Поппера (упрощенная схема)

Вместо каскада счетчиков Гейгера используются два детектора: интегрирующий $D1$ и сканирующий вдоль оси Y $D2$. Ясно, что на экране B формируется фантомное изображение щели A. Таким образом, условия эксперимента выполнены: при узкой щели A и широко раскрытой щели B щель A дает информацию об y-координате фотона 1 с точностью Δy, равной ширине щели A, а соответствующее фантомное изображение щели A на экране B определяет y-координату фотона 2 с той же точностью Δy. Разброс y-компоненты импульса фотона 2 может быть получен в результате измерения ширины дифракционной картины на некотором расстоянии от щели B.

Экспериментальная установка показана на рис. 5. Аргоновый лазер с длиной волны излучения 351.1 нм освещает нелинейный кристалл (BBO) длиной 3 мм. Диаметр пучка накачки — 3 мм. Накачка отсеивается от сигнального и холостого пучков дисперсионной призмой из кварцевого стекла, которые затем

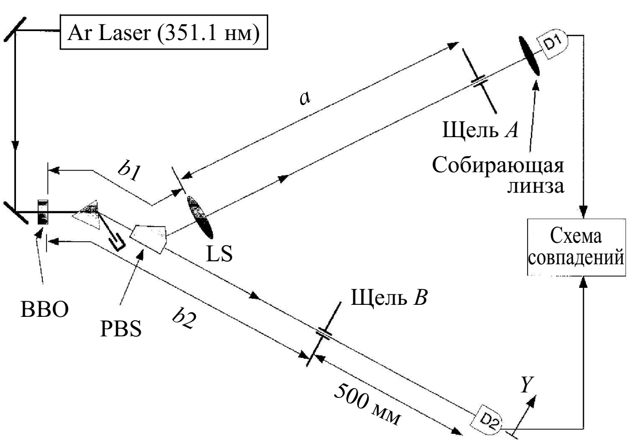

Рис. 5. Экспериментальная установка

разделяются поляризационным светоделителем (PBS). Сигнальный фотон (фотон 1) проходит через собирающую линзу (LS) с фокусным расстоянием $f = 500$ мм и диаметром 25 мм. Щель толщиной 0.16 мм расположена в точке A, которая находится на расстоянии 1000 мм $(=2f)$ за линзой. Линза используется для формирования фантомного изображения щели A на экране B, который находится на том же оптическом расстоянии 1000 мм $(=2f)$ от линзы, только на пути холостого фотона (фотона 2). После сигнальный и холостой фотоны проходят через щели A и B (сначала настоящая щель B, затем фантомное изображение щели A) соответственно и регистрируются детекторами D_1 и D_2. Перед детектором D_1 установлена короткофокусная собирающая линза. Сканирующий детектор D_2 расположен на расстоянии 500 мм за щелью B. В качестве детекторов используются лавинные фотодиоды диаметром 180 мкм. Перед детекторами установлены спектральные фильтры с шириной полосы пропускания 10 нм, центрированные на 702 нм. Импульсы детекторов посылаются на схему совпадений с шириной окна 3 нс.

Эксперимент 1. Обе щели имеют размер 0.16 мм. Детектор D_1 фиксирован при $y' = 0$, детектор D_2 сканирует вдоль своей оси y. Полученные результаты отмечены круглыми точками на рис. 6. В данном случае наблюдается обычная дифракционная картина с $\Delta y \Delta p_y = h$.

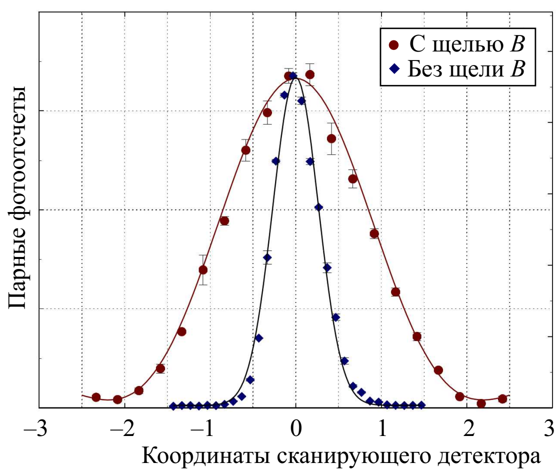

Рис. 6. Число парных фотоотсчетов в зависимости от координаты сканирующего детектора

Эксперимент 2. Условия эксперимента сохранились за исключением того, что щель B стала очень широкой или отсутствует вообще. Результаты отмечены ромбиками. Видно, что разброс импульса уменьшился по сравнению с первым опытом. В то же время размер области локализации фотона 2 — размер фантомного изображения щели — остался тем же. Таким образом, по утверждению авторов, экспериментально показано, что $\Delta y \Delta p_y < h$.

3.2. Обсуждение результатов эксперимента

На основании полученных результатов авторы эксперимента делают вывод о том, что принцип неопределенности Гейзенберга неприменим к условному поведению квантовых систем. Они подтверждают предсказание К. Поппера и в то же время считают, что его интерпретация неверна. Однако сомнения вызывает и то и другое. Рассмотрим вначале критику других исследователей.

В 1985 г., почти сразу после выхода статьи К. Поппера, вышла работа A. Sudbery: Popper's Variant of EPR Experiment Does Not Test the Copenhagen Interpretation [15]. Автор утверждает, что рассуждение Поппера о дополнительном разбросе импульса фотонов некорректно, поскольку в чистом ЭПР-состоянии с полной корреляцией поперечных координат волновая функция системы

$$\psi = \phi_1(x_A)\,\phi_2(x_B)\,\delta(y_A - y_B) \propto \\ \propto \phi_1(x_A)\,\phi_2(x_B)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipy_A/\hbar} e^{-ipy_B/\hbar}\mathrm{d}p$$

и неопределенность импульса оказываются бесконечными:

$$\Delta p_{y1} = \Delta p_{y2} = \infty.$$

Но в реальных условиях достичь идеальной корреляции частиц в пространстве, конечно, невозможно. Поэтому в следующих работах проанализированы менее идеализированные ситуации. Например, запутанное состояние с конечным разбросом импульса рассмотрено T. Qureshi [16]. Им показано, что локализация фотона 1 не приводит к увеличению неопределенности импульса фотона 2.

Об интерпретации результатов эксперимента Поппера писал и A. J. Short, обосновав применение соотношения неопределенностей Гейзенберга и к т. н. условным измерениям [17]. Им также приведены простые соображения, связанные с предельным пространственным разрешением дифракционно ограниченных световых пучков. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

4. ФАНТОМНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЩЕЛИ И АНАЛИЗ ЕГО ПРЕДЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Для начала убедимся, что генерируемый пучок света полностью освещает щель (иначе присутствие щели ни на что не влияет). Затем произведем более корректный учет конечного размера пучка накачки и конечного размера холостого и сигнального пучков.

4.1. Размеры генерируемых пучков и размер щели

Рассмотрим гауссов пучок радиуса Δr_p, распространяющийся вдоль оси z. Пусть ось y параллельна оптической оси $\mathbf{C} = \{0;1;0\}$ кристалла. Пренебрегая дифракцией накачки, аналитический сигнал ее представим в следующем виде:

$$E_p^{(+)}(t,\mathbf{r}) = \\ = \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\Delta r_p^2}\right] \times \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega_p \exp(-i\omega_p t)\tilde{E}_p(\omega_p, z),$$

где $\tilde{E}_p(\omega_p,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \exp(i\omega_p t) E_p(t,\mathbf{r})$.

Согласно [18, 19] гамильтониан параметрического преобразования имеет следующий вид:

$$\hat{H} \propto \int\limits_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \chi^{(2)} \hat{E}_p^{(+)}(t,\mathbf{r}) \hat{E}_o^{(-)}(t,\mathbf{r}) \hat{E}_e^{(-)}(t,\mathbf{r}) + \text{э. с.}, \quad (1)$$

где $\hat{E}_\alpha^{(\pm)}$ — операторы напряженности электрического поля в представлении Гейзенберга, $\chi^{(2)}$ — квадратичная нелинейность (считаем ее постоянной в объеме кристалла V), $\alpha = \{e, o\}$.

Представим полевые операторы через операторы рождения фотона $\hat{a}_\alpha^\dagger(\mathbf{k}_\alpha)$:

$$\hat{E}_\alpha^{(-)}(t,\mathbf{r}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3\mathbf{k}_\alpha \exp i(\omega_\alpha t - \mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}) \hat{a}_\alpha^\dagger(\mathbf{k}_\alpha).$$

В приближении заданной классической накачки оператор можно заменить комплексной амплитудой:

$$\hat{E}_p^{(-)}(t,\mathbf{r}) = E_p^*(t,\mathbf{r}).$$

Считая размеры кристалла вдоль осей x и y бесконечными по сравнению с толщиной кристалла, проинтегрируем выражение (1) по переменным x, y:

$$\hat{H} \propto \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega_p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3\mathbf{k_o} \hat{a}_o^\dagger \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3\mathbf{k_e} \times \\ \times \hat{a}_e^\dagger \exp[i(\omega_o + \omega_e - \omega_p)] \varepsilon(\omega_p, \mathbf{k_o}, \mathbf{k_e}) + \text{э. с.},$$

где

$$\varepsilon(\omega_p, \mathbf{k_o}, \mathbf{k_e}) = \exp\left[-\frac{(\mathbf{k_{-o}} + \mathbf{k_{-e}})^2}{4}\Delta r_p^2\right] \times \\ \times \int\limits_{-l}^{0} \mathrm{d}z \tilde{E}_p(\omega_p, z) \exp[-iz(k_{zo} + k_{ze})],$$

$\mathbf{k}_{-\alpha}$ — поперечные составляющие векторов $\mathbf{k}_\alpha$, $k_{z\alpha}$ — их продольные составляющие, l — толщина кристалла.

В первом порядке теории возмущений по времени взаимодействия состояние системы описывается вектором (см., напр., [19])

$$|\psi\rangle \propto \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \hat{H}|0\rangle \propto \\ \propto \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega_p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3\mathbf{k}_o \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3\mathbf{k}_e |1\rangle_{\mathbf{k}o} |1\rangle_{\mathbf{k}e} \times \\ \times \delta(\omega_o + \omega_e - \omega_p)\, \varepsilon(\omega_p, \mathbf{k}_o, \mathbf{k}_e), \quad (2)$$

вектором $|0\rangle$ обозначено вакуумное состояние, а векторами $|1\rangle_{\mathbf{k}\alpha}$ — однофотонные состояния, соответствующие волновым модам с волновым вектором $\mathbf{k}_\alpha$.

Очевидно, что

$$k_{zo} = \sqrt{\left(\frac{\omega_o n_o}{c}\right) - k_{-o}^2}.$$

Для необыкновенной волны дело обстоит сложнее. Из формул

$$n_e(\omega_e, \theta) = \frac{c\,|\mathbf{k}_e|}{\omega_e},$$

$$n_e^2(\omega_e, \theta) = \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta}{n_e^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{n_o^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{k}_e \mathbf{C}}{|\mathbf{C}| \times |\mathbf{k}_e|} = \frac{k_{ye}}{k_{-e}^2 + k_{ze}^2}$$

получаем выражение для z-компоненты волнового вектора необыкновенной волны:

$$k_{ze} = \sqrt{\left(\frac{\omega_e n_e}{c}\right)^2 + \Lambda k_{ye}^2 - k_{-e}^2},$$

где введено обозначение $\Lambda = 1 - \left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2$, а n_α определяются из формулы Селлмейера:

$$n_\alpha^2 = a_\alpha + \frac{b_\alpha}{\lambda_\alpha^2 + c_\alpha} - d_\alpha \lambda_\alpha^2,$$

где константы a_α, b_α, c_α, d_α определяются выбором кристалла и его температурой, $\lambda_\alpha = \frac{2\pi c}{\omega_\alpha}$ — длина волны в вакууме.

Перейдем от интегрирования по $\mathbf{k}_{z\alpha}$ к интегрированию по ω_α в уравнении (2):

$$|\psi\rangle \propto \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \hat{H}|0\rangle \propto \\ \propto \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega_p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{-o} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{-e} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega_o \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega_e |1\rangle_{\mathbf{k}o} |1\rangle_{\mathbf{k}e} \times \\ \times \delta(\omega_o + \omega_e - \omega_p) \left|\frac{\mathrm{d}k_{zo}}{\mathrm{d}\omega_o} \frac{\mathrm{d}k_{ze}}{\mathrm{d}\omega_e}\right| \varepsilon(\omega_p, \mathbf{k}_o, \mathbf{k}_e). \quad (3)$$

Скорость счета парных фотоотсчетов определяется функцией

$$F(t_o, t_e, \mathbf{r}_o, \mathbf{r}_e) = \langle 0|\hat{E}_o^{(+)}(t_o, \mathbf{r}_o)\, \hat{E}_e^{(+)}(t_e, \mathbf{r}_e)\,|\psi\rangle,$$

где положительно-частотные полевые операторы $\hat{E}_\alpha^{(+)}$ соответствуют излучению в свободном пространстве на выходе кристалла ($z > 0$). Если рассеянное излучение фокусируется идеальной линзой, то в ее фокальной плоскости можно наблюдать пространственный фурье-образ поля. При этом поперечные распределения электрических полей можно описывать полевыми операторами $\hat{E}_\alpha^{(+)}\left(t_\alpha, \mathbf{k}_{-\alpha}\right)$. Тогда запишем

$$F(t_o, t_e, \mathbf{k}_{-o}, \mathbf{k}_{-e}) = \langle 0|\hat{E}_o^{(+)}(t_o, \mathbf{k}_{-o})\hat{E}_e^{(+)}(t_e, \mathbf{k}_{-e})|\psi\rangle.$$

Представим полевые операторы в виде

$$\hat{E}_\alpha^{(+)}(t_\alpha, \mathbf{k}_{-\alpha}) = \\ = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega_\alpha \hat{a}\left(\omega_\alpha, \mathbf{k}_{-\alpha}\right)\sqrt{\eta_{\omega_\alpha}} \exp\left[i\omega_\alpha\left(\frac{z_\alpha}{c} - t_\alpha\right)\right],$$

где введены квантовые эффективности детекторов с учетом спектральных фильтров η_{ω_α}. В случае монохроматической накачки оптимальная спектральная характеристика чувствительности детекторов (с точки зрения получения максимального отношения числа парных фотоотсчетов к числу одиночных) должна иметь прямоугольную форму, причем интервалы прозрачности фильтров $[\omega_{\alpha\,\min}, \omega_{\alpha\,\max}]$ такие, что $\omega_{o\,\min} + \omega_{e\,\max} = \omega_{e\,\min} + \omega_{o\,\max} = \omega_p^0$. Тогда пределы интегрирования в интеграле (3) можно заменить на $\omega_{\alpha\,\min}$ и $\omega_{\alpha\,\max}$. Поскольку $\langle 0|\hat{a}_\alpha\left(\omega_\alpha, \mathbf{k}_{-\alpha}\right)|1\rangle_{\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_{-\alpha}} = \delta\left(\omega_\alpha - \omega'_\alpha, \mathbf{k}_{-\alpha} - \mathbf{k}'_{-\alpha}\right)$, а накачка является стационарным случайным процессом с гауссовым спектром

$$\left\langle \left\langle \tilde{E}_p\left(\omega_p, z\right)\tilde{E}_p^*\left(\omega'_p, z'\right)\right\rangle \right\rangle \propto \\ \propto \exp\left[i\left(z - z'\right)k_{zp}\left(\omega_p\right) - \left(\frac{\omega_p - \omega_p^0}{\Delta\omega_p}\right)^2\right]\delta\left(\omega_p + \omega'_p\right),$$

где $\Delta\omega_p$ — ширина спектра накачки, производя усреднение F, получим

$$\left\langle\left\langle\left|F\left(\Delta T, \mathbf{k}_{-o}, \mathbf{k}_{-e}\right)\right|^2\right\rangle\right\rangle \propto \eta_o\eta_e \exp\left[-\frac{\left(\mathbf{k_{-o}} + \mathbf{k_{-e}}\right)^2}{4}\Delta r_p^2\right]\int\limits_{\omega_{o\,\min}}^{\omega_{o\,\max}}\mathrm{d}\omega_o\int\limits_{\omega_{e\,\min}}^{\omega_{e\,\max}}\mathrm{d}\omega_e\int\limits_{\omega_{o\,\min}}^{\omega_{o\,\max}}\mathrm{d}\omega'_o\left|\frac{\mathrm{d}k_{zo}}{\mathrm{d}\omega_o}\frac{\mathrm{d}k_{ze}}{\mathrm{d}\omega_e}\frac{\mathrm{d}k'_{zo}}{\mathrm{d}\omega'_o}\frac{\mathrm{d}k'_{ze}}{\mathrm{d}\omega'_e}\right| \times \\ \times \exp\left[-\left(\frac{\omega_p - \omega_p^0}{\Delta\omega_p}\right)^2\right]\frac{\sin\left(l\Delta_z/2\right)}{\Delta_z}\frac{\sin\left(l\Delta'_z/2\right)}{\Delta'_z}\exp\left[i\left\{(\omega_o - \omega'_o)\Delta T + \frac{l}{2}(\Delta'_z - \Delta_z)\right\}\right],$$

где $\omega_p = \omega_o + \omega_e = \omega'_o + \omega'_e$, $\Delta_z = k_{zp}(\omega_p) - k_{zo} - k_{ze}$, $\Delta'_z = k_{zp}(\omega_p) - k'_{zo} - k'_{ze}$, $\Delta T = \frac{z_o - z_e}{c} - (t_o - t_e)$, z_α — продольные расстояния от кристалла до детекторов.

Полагая $\mathbf{k}_{-e} = -\mathbf{k}_{-o}$, построим зависимость числа парных фотоотсчетов от поперечных компонент волнового вектора сигнального (следовательно, и холостого) фотона при $\Delta T = 0$. Результаты отражены на рис. 7.

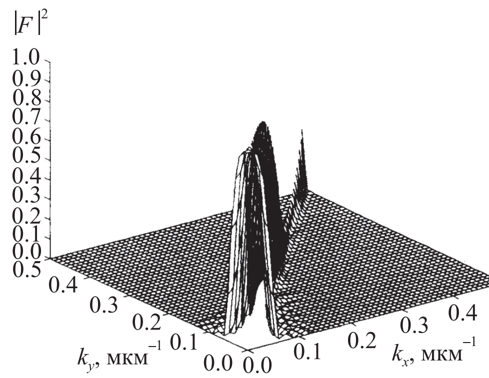

Рис. 7. Нормированное количество парных фотоотсчетов в зависимости от поперечной составляющей волнового вектора

Из графика видно, что разброс x-компоненты волнового вектора, соответствующий уширению пучка, равен ≈ 0.1 мкм$^{-1}$. Для углового размера пучка в плоскости щели имеем

$$\theta \approx \frac{k_{xe}}{k_e} = \frac{\Delta x}{b},$$

где Δx — размер пучка в месте нахождения щели, b — расстояние от кристалла до щели, равное 745 мм, $k_e = \frac{2\pi}{\lambda_e}$, $\lambda_e = 702.2$ нм. Отсюда $\Delta x \approx 9$ мм $\gg 0.16$ мм, что говорит о корректном освещении щели.

4.2. Аппаратная функция оптической системы

Конечный размер пучка накачки приводит к тому, что фантомное изображение щели будет размываться даже при прочих идеальных условиях (например, если считать холостой и сигнальный пучки плоскими волнами). Как показано в [20], волновая функция сигнального и холостого фотонов на границе кристалла имеет вид

$$\psi\left(\mathbf{k}_{s\perp}, \mathbf{k}_{i\perp}\right) \propto \varepsilon_p\left(\mathbf{k}_{s\perp} + \mathbf{k}_{i\perp}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{L\left(\mathbf{k}_{s\perp} - \mathbf{k}_{i\perp}\right)^2}{4k_p}\right),$$

где L — толщина кристалла, индекс $\perp$ соответствует поперечным координатам вектора.

Будем считать накачку гауссовой:

$$\varepsilon_p\left(\mathbf{k}\right) = \exp\left[-\frac{k^2}{4}\Delta r_p^2\right],$$

где Δr_p^2 — радиус пучка накачки.

Распределение x-компонент соответствующих волновых векторов при $k_{sy} = k_{iy} = 0$ показано на рис. 8. Вдоль длинной стороны фигура имеет форму функции sinc, вдоль короткой — гаусс. Сечение данной фигуры при фиксированном k_{sx} суть аппаратная функция системы, определяющая размытие точечного источника вследствие конечного размера пучка накачки.

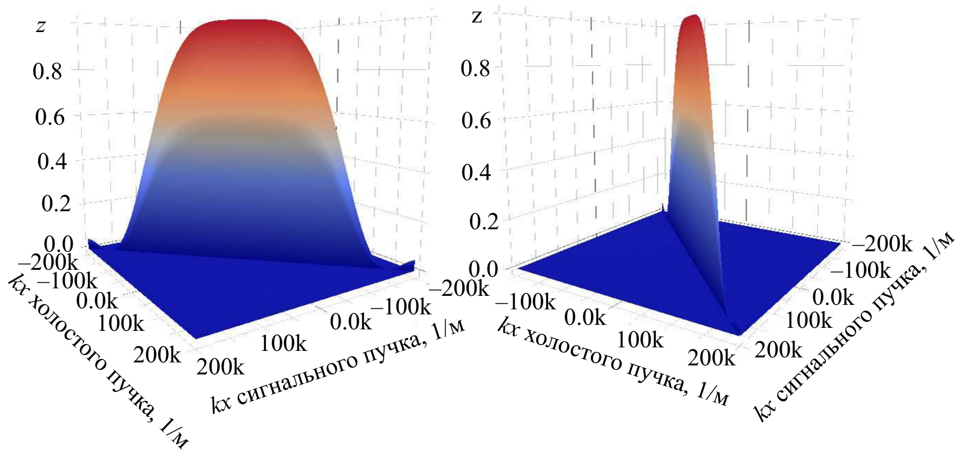

Рис. 8. Квадрат модуля волновой функции сигнального и холостого пучков при гауссовой накачке

Но даже самые грубые оценки свидетельствуют о том, что рассчитанное таким образом уширение фантомного изображения щели существенно меньше дифракционного. Поэтому рассчитаем предельное пространственное разрешение исходя из дифракционных ограничений, т. е. учтем дифракцию сигнального и холостого фотонов. Поскольку каждый из них проходит расстояние от кристалла до щели не менее $s = 745$ мм, то суммарное уширение пучков составляет [17]

$$\sigma = \frac{2.44\lambda_{s(i)}}{2\Delta r_p} s \approx 0.43 \text{ мм},$$

где $\lambda_{s(i)} = 2\lambda_p = 702.2$ нм, что приводит к дополнительному размытию фантомного изображения (соответствующую аппаратную функцию будем считать гауссовой). Полученные аппаратные функции (АФ), а также изображение щели показаны на рис. 9. Видно, что изображение щели стало шире оригинала примерно в 3 раза.

Это довольно грубая оценка. Более корректный способ решения задачи основан на рассмотрении передаточной функции системы.

Найдем спектральное представление $f_{in}(\nu)$ идеального изображения щели шириной l, воспользовавшись

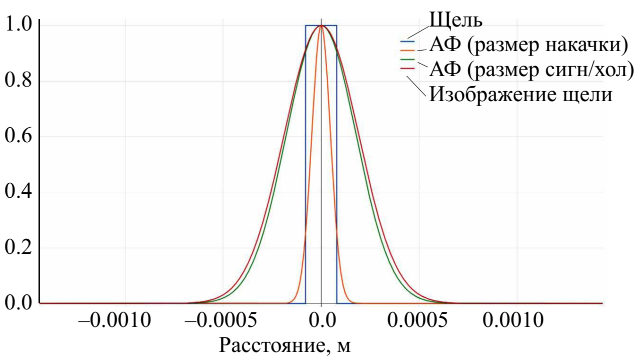

Рис. 9. Идеальное (прямоугольник) и реальное фантомное изображение щели (самая широкая кривая), а также аппаратные функции системы, обусловленные различными причинами: гауссовой накачкой (внутри прямоугольника) и дифракцией сигнального и холостого пучков (чуть поуже реального изображения щели)

преобразованием Фурье:

$$f_{in}(\nu) = \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-i2\pi\nu x} \mathrm{d}x = l \times \mathrm{sinc}(\pi l \nu),$$

ν — пространственная частота (м$^{-1}$), которая пропорциональна поперечной компоненте волнового вектора.

Передаточная функция когерентной системы с гауссовой диафрагмой, что эквивалентно когерентному пучку накачки с гауссовым профилем, определяется следующим соотношением [21]:

$$H_{\mathrm{coh}}(\nu) = e^{-\frac{(\lambda s \nu)^2}{\Delta r_p^2}},$$

где s — расстояние, которое проходит луч, λ — его длина волны.

Оценим радиус корреляции луча при достижении щели:

$$r_{\mathrm{cor}} = \frac{s}{2k\Delta r_p} \approx 0.06 \text{ мм}.$$

Поскольку радиус корреляции меньше ширины щели (0.16 мм), мы имеем дело с некогерентным светом. Его передаточная функция определяется как свертка передаточной функции когерентной системы с собой же [22]:

$$H_{\text{non-coh}}(\nu) = (H_{\mathrm{coh}} \otimes H_{\mathrm{coh}})(\nu) = e^{-\frac{(\lambda s \nu)^2}{2\Delta r_p^2}}.$$

Тогда спектральное представление изображения с учетом передаточной функции системы имеет вид

$$f_{\mathrm{out}}(\nu) = f_{\mathrm{in}}(\nu) \times H_{\text{non-coh}}(\nu) = \\ = l \times \mathrm{sinc}(\pi l \nu) \times e^{-\frac{(\lambda s \nu)^2}{2\Delta r_p^2}}.$$

Итак, согласно рис. 10, когда щель присутствует, неопределенность импульса фотонов фактически обусловлена симметричными относительно нуля первыми максимумами функции sinc. Если же мы убираем щель, то оптическая система, формирующая фантомное изображение, за счет конечной ширины пропускания спектра — передаточной функции — срезает эти максимумы, так что остается только центральный пик. А ширина

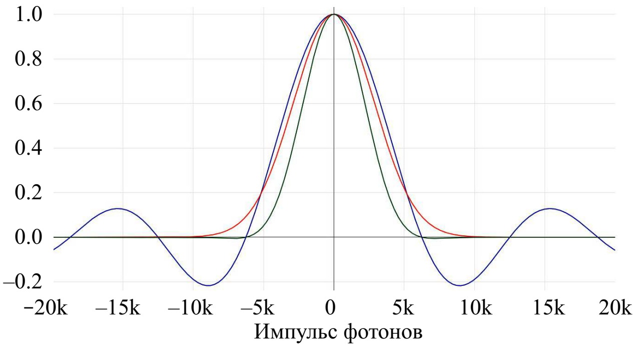

Рис. 10. Спектр щели (sinc), передаточная функция (гаусс) и их произведение — спектр фантомного изображения щели, определяющий квантовую неопределенность поперечной составляющей импульса фотонов

его как раз и оказывается втрое меньше ширины, определяемой этими первыми максимумами. Удивительно, что даже не прибегая к тонким квантовым расчетам, получаем зарегистрированный в эксперименте [14] результат. Этим и объясняется якобы не соответствующее принципу неопределенностей Гейзенберга уменьшение разброса импульса фотонов после вынимания щели из канала B. На самом же деле учет дифракционного ограничения пространственного разрешения фантомного изображения щели показывает, что за счет него увеличивается неопределенность координаты второго фотона, и соответственно уменьшается неопределенность импульса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате анализа эксперимента, предложенного К. Поппером и осуществленного Y. H. Kim и Y. Shih, установлено, что корректный учет конечной ширины пучков и толщины кристалла никак не компрометирует принцип неопределенности Гейзенберга, в том числе и в случае условных измерений. Никаких нарушений его не наблюдается ни в рамках существующей квантовой теории и теории фантомных изображений, ни в известных экспериментах.

В этой связи хотелось бы отметить следующее интересное обстоятельство. Принцип неопределенности Гейзенберга [1] в общей его форме — соотношения Робертсона–Шредингера [23–26] — является фундаментальной теоремой квантовой теории, и любые сомнения в его справедливости ставят под сомнение всю квантовую теорию вообще, поскольку операторное описание наблюдаемых физических величин моментально влечет за собой соотношение неопределенностей в силу некоммутативности операторов. Но очень часто этот принцип истолковывается в смысле невозможности одновременно точно измерить канонически сопряженные физические величины. Именно так его оригинально сформулировал Гейзенберг [1]. Он считал, что измерение, скажем, координаты квантовой частицы вносит обратное влияние на ее импульс. В результате этого искажения точное измерение импульса невозможно. Так ли это? Разрушить это стойкое предубеждение удалось авторам эксперимента [27], базировавшегося на более ранних работах [28, 29]. Достигнуть такого замечательного результата, получив точность измерений выше гейзенберговского предела, оказалось возможным в серии сложных экспериментов по проведению т. н. слабых (weak) измерений, при которых квантовое состояние системы телепортировалось, и таким образом информация о состоянии до измерения в определенной степени сохранялась.

Вместе с тем доказать этот фундаментальный результат можно и с помощью несложного мысленного эксперимента [2, 3], вполне реализуемого в действительности и достигающего той же цели, но несравненно проще и за однократное измерение координаты при заданном импульсе специально приготовленного фотона. Еще раньше о принципиальной возможности точного измерения координаты и импульса писал Р. Фейнман [30].

В рассмотренном же здесь эксперименте [14] это доказательство получается автоматически. Действительно, в каждом единичном измерении регистрируется координата фотона с неопределенностью размера фантомного изображения щели и импульс того же фотона с неопределенностью углового размера детектора, а не углового разброса всей выборки регистрируемых фотонов. А угловой размер детектора много меньше углового размера этой выборки. Таким образом, точность одновременного измерения и координаты, и импульса одного и того же фотона существенно меньше предсказываемых принципом неопределенности. Это тоже одна из интересных особенностей эксперимента [14]. Но какова ценность такого измерения? Ведь если до момента измерения (априори) конкретных значений координаты и импульса не существовало (например, [31–33]), то полученные экспериментальные значения просто находятся в известных интервалах неопределенностей Гейзенберга. Но измерить можно точнее, поскольку измерение является лишь проекцией вектора исходного состояния системы на вектор измеренной величины. Предвидеть же результат невозможно. Для повышения информационной ценности таких измерений можно провести серию испытаний, в результате которой выяснить квантовые неопределенности измеряемых величин, что и было сделано авторами [14]. Но прежде всего, в фундаментальном смысле важна принципиальная возможность осуществления измерений, точность которых не ограничена принципом неопределенностей Гейзенберга.

Это, пожалуй, одна из причин, почему известный исследователь Asher Peres в работе [34] предлагает сам термин квантовых измерений заменить и расширить его до более общего понятия — воздействия (intervention), поскольку обычно измерениями называют информацию о результатах наших экспериментальных интервенций. «Измерения - неудачный термин», который создает впечатление, что существует в реальном мире некоторое неизвестное свойство, которое мы измеряем. Даже само существование частиц зависит от контекста наших экспериментов. . .

Воздействие же описывается набором параметров, который включает местоположение воздействия в пространстве-времени, указанное в произвольной координатной системе. Мы также должны определить скорость и направление движения прибора в координатной системе, которую мы используем, и различные другие входные параметры, такие как напряженность магнитного поля, или характеристики радиочастотного импульса, используемого в эксперименте. Входные параметры определяются классической информацией исходя из прошлых воздействий, или могут быть выбраны произвольно наблюдателем, который приготавливает это воздействие, или локальным случайным устройством, действующим вместо наблюдателя.

Воздействие имеет два следствия. Одно состоит в приеме информации с помощью прибора, формирующего записи. Это и есть «измерение». Его результат в общем случае непредсказуем и является результатом воздействия. Другим следствием является изменение окружения, когда квантовая система будет эволюционировать при продолжении воздействия. Например, воздействующий прибор может сформировать новый гамильтониан, зависящий от записанного результата. . .

Я благодарен Д. Н. Пухову за помощь в работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heisenberg W. Z.* // Phys. 1927 **43**. P. 172 (Quantum Theory and Measurement, J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Eds., Princeton Univ. Press. 1984. P. 62).
2. *Белинский А. В., Лапшин В. Б.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2016. № 4. 164001.
3. *Белинский А. В., Лапшин В. Б.* // УФН. 2017. **187** С. 349.
4. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* // Phys. Rev. 1937, **47**. P. 777.
5. *Клышко Д. Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1967. **6**. С. 490.
6. *Ахманов С. А., Фадеев В. В., Хохлов Р. В., Чунаев О. Н* // Письма в ЖЭТФ. 1967. **6**. С. 575.
7. *Клышко Д. Н., Пенин А. Н., Полковников Б. Ф.* // Письма в ЖЭТФ. 1970. **11**. P. 11.
8. *Chirkin A. S., Saigin M. Yu., Shutov I. V.* // Journal of Russian Laser Research. 2008. **29**. P. 336.
9. *Белинский А. В., Клышко Д. Н.* // ЖЭТФ. 1994. **105**. P. 487.
10. *Клышко Д. Н.* // ЖЭТФ. 1988. **94**. P. 82.
11. Квантовые изображения / Под ред. М. И. Колобова / Перевод с англ. под ред. А. С. Чиркина. М.: Физматлит. 2009.
12. *Popper K.* // Die Naturwissenschaften 1934. **22**. P. 807.
13. *Popper K.* // Quantum Theory and the Schism in Physics. From the Postscript to the logic of scientific discovery./ Ed. by W. W. Bartley, III. 1982.
14. *Kim Y. H., Shih Y.* // Found. of Phys. 1999. **29**. P. 12.
15. *Sudbery A.* // Philosophy of Science. 1985. **52**. P. 470.
16. *Qureshi T.* // Am. J. of Phys. 2005. **73**. P. 541.
17. *Short A. J.* // Found. of Phys. Lett. 2001. **14**. P. 275.
18. *Pittman T. B., Strekalov D. V., Klyshko D. N.* et al. // Phys. Rev. A. 1996. **53**. P. 2804.
19. *Белинский А. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 3. С. 34.
20. *Kovlakov E. V., Bobrov I. B., Straupe S. S., Kulik S. P.* // Phys. Rev. Lett. 2017. **118**. P. 030503.
21. *Гуревич С. Б., Константинов В. Б., Соколов В. К., Черных Д. Ф* // Передача и обработка информации голографическими методами. М.: Сов. радио. 1978.
22. *Родионов С. А.* // Основы оптики. СПб.: ГИТМО, 2000.
23. *Kennard E.* // Z. Phys. 1927. **44**. P. 326.
24. *Weyl H.* // Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel, Leipzig, 1928.
25. *Schrodinger E.* // Physikalisch-mathematische Klasse. 1930. **14**. P. 296.
26. *Robertson H. P.* // Phys. Rev. 1929. **34**. P. 163.
27. *Rozema L. A., Darabi A., Mahler D. H.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2012. **109**. 100404.
28. *Ozawa M.* // Phys. Rev. A. 2003. **67**. 042105.
29. *Lund A. P., Wiseman H. M.* // New J. Phys. 2010. **12**. 093011.
30. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир. 1965. Т. 3. С. 222. (*Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.* The Feynman lectures on physics. London. 1963. V. 1)
31. *Belinsky A. V., Klyshko D. N.* // Laser Physics. 1996. **6**. P. 1082.
32. *Белинский А. В.* // УФН. 2003. **173**. P. 905.
33. *Белинский А. В.* Квантовые измерения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2015.
34. *Peres A., Termo D. R.* // Rev. Mod. Phys. 2004. **76**. P. 93.

The «Paradox» of Karl Popper and Its Connection with the Heisenberg Uncertainty Principle and Quantum Ghost Images

A. V. Belinsky

Department of math modeling, Department of physics of the Earth, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: belinsky@inbox.ru.

An experiment to verify the adequacy of the Heisenberg uncertainty principle, as proposed by Karl Popper and implemented in practice, is considered. As in the Einstein—Podolsky—Rosen paradox, the quantum properties of an entangled pair of elementary particles are used. In this case, a ghost image of a narrow slit is actually formed. The results of the experiment, at first glance, support a violation of the uncertainty principle. However, analysis of the spatial resolution of the slit ghost image shows that this is not correct. A more correct description of diffraction in the case of spatially limited light beams, gives no violation of the uncertainty principle. The results can be also used to estimate the extreme quality of diffraction limited ghost images.

Keywords: Heisenberg's principle of uncertainty, entangled states, Copenhagen interpretation, optical transfer function, spatial resolution.
PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud.
Received 03 November 2017.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **73**, No. 5. Pp. 447–456.

Сведения об авторах

Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@inbox.ru.