ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция–диффузия с разрывным реактивным слагаемым

Н. Н. Нефедов,[а] Н. Т. Левашова,[б] А. О. Орлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Статья поступила 23.06.2018, принята к публикации 02.07.2018.

В работе рассматривается задача об асимптотической устойчивости стационарного решения с внутренним переходным слоем одномерного уравнения реакция–диффузия. Особенностью рассматриваемой задачи является разрыв (первого рода) реактивного слагаемого (источника) в некоторой внутренней точке отрезка, на котором поставлена задача, в результате чего решения обладают большими градиентами в узком переходном слое вблизи границы раздела. В работе получены условия существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости решения с таким внутренним переходным слоем. Для доказательства использован асимптотический метод дифференциальных неравенств. Полученные условия существования и устойчивости решения следует принимать во внимание при создании адекватных моделей, описывающих явления в средах с разрывными характеристиками. Результаты работы можно использовать для разработки эффективных методов численного решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Ключевые слова: внутренний переходный слой, метод дифференциальных неравенств, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, верхнее и нижнее решения.
УДК: 517.927.4. PACS: 02.30.Hq.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача об асимптотической устойчивости стационарного решения с внутренним переходным слоем одномерного уравнения реакция–диффузия. Особенностью задачи является разрыв (первого рода) реактивного слагаемого (источника) в некоторой внутренней точке отрезка, на котором поставлена задача. Исследование решений задач с разрывными слагаемыми является важной составляющей математического моделирования процессов, происходящих на границах разделов сред. Особый интерес представляют задачи, решения которых обладают большими градиентами в узком переходном слое вблизи границы раздела, например задача об изменении температуры на границе вода–воздух [1] или задачи о волновых функциях носителей в слоистых полупроводниковых структурах [2]. Такие явления описываются сингулярно возмущенными уравнениями реакция–диффузия, и для их исследования эффективными оказываются асимптотические методы.

Задача, аналогичная исследуемой в настоящей работе, рассматривалась в статье [3], где было построено асимптотическое приближение решения и доказано существование решения с внутренним переходным при помощи метода сшивания погранслойных решений (подобный подход использовался, например, в [4]). Основной целью настоящей статьи являлось исследование устойчивости стационарного решения соответствующего параболического уравнения. Для этого нами применен асимптотический метод дифференциальных неравенств, развиваемый на новый класс задач. Теоремы сравнения, позволяющие применить этот метод для задач с разрывными правыми частями, можно найти, в частности, в работах [5–7]. Аналогичный подход для доказательства существования решения стационарного уравнения реакция–диффузия с разрывными правыми частями с внутренним переходным слоем в двумерной области применялся в работе [8], где было доказано существование решения, однако вопрос об устойчивости исследован не был.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial v}{\partial t}=f(v,x,\varepsilon), \quad x\in(-1;1), \quad t>0; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(\mp 1,t,\varepsilon)=u^{(\mp)}, \; v(x,0,\varepsilon)=v_{\text{init}}(x,\varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ — малый параметр. Пусть выполнено следующее условие:

(A1) Функция $f(u,x,\varepsilon)$ определена на множестве $\overline{\Omega}:=(u,x,\varepsilon)\in I_u\times[-1;1]\times(0;\varepsilon_0]$ и претерпевает разрыв первого рода вдоль отрезка прямой $\{u\in I_u, \; x=x_0\}$:

$$f(u,x,\varepsilon)=\begin{cases} f^{(-)}(u,x,\varepsilon), & u\in I_u, \; -1\leqslant x\leqslant x_0-0, \\ f^{(+)}(u,x,\varepsilon), & u\in I_u, \quad x_0+0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

$$\text{где} \quad f^{(-)}(u,x,\varepsilon)\in C^3(I_u\times[-1;x_0]\times(0;\varepsilon_0]),$$
$$f^{(+)}(u,x,\varepsilon)\in C^3(I_u\times[x_0;1]\times(0;\varepsilon_0])$$
$$\text{и} \quad f^{(-)}(u,x_0,\varepsilon)\neq f^{(+)}(u,x_0,\varepsilon), \; u\in I_u.$$

Определим области

$$D_T:=(t,x)\in(0;T]\times(-1;1),$$
$$D_T^{(-)}:=(t,x)\in(0;T]\times(-1;x_0),$$
$$D_T^{(+)}:=(t,x)\in(0;T]\times(x_0;1).$$

[а] E-mail: nefedov@phys.msu.ru
[б] E-mail: natasha@npanalytica.ru

Определение 1. *Функция*

$$v(x,t,\varepsilon) \in C^{0,1}\left(\overline{D}_T\right) \cap C^{1,1}(D_T) \cap C^{1,2}\left(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}\right)$$

называется решением задачи (1)*, если она удовлетворяет уравнению* (1) *в каждой из областей* $D_T^{(\mp)}$*, а также условию в начальный момент времени и граничному условию.*

Очевидно, что стационарное решение задачи (1) является решением следующей задачи для стационарного уравнения реакция–диффузия:

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(u,x,\varepsilon), \quad x \in (-1;1), \\ \frac{du}{dx}(\mp 1, t) = u^{(\mp)}, \end{gathered} \tag{2}$$

решение которой определено аналогично решению задачи (1).

Определение 2. *Функция*

$$u(x,\varepsilon) \in C^1(-1;1) \cap C^2\left((-1;1) \setminus x_0\right)$$

называется решением задачи (2)*, если она удовлетворяет уравнению* (2) *при* $x \in (-1;x_0) \cup (x_0;1)$*, а также граничным условиям задачи* (2)*.*

Потребуем также выполнения следующего условия.

(A2) Пусть уравнение $f^{(-)}(u,x,0) = 0$ имеет на отрезке $[-1;x_0]$ изолированное решение $\varphi^{(-)}(x)$, а уравнение $f^{(+)}(u,x,0) = 0$ имеет на отрезке $[x_0;1]$ изолированное решение $\varphi^{(+)}(x)$, причем выполнено неравенство $\varphi^{(-)}(x_0) < \varphi^{(+)}(x_0)$.

Пусть также выполнены неравенства

$$\begin{gathered} f_u^{(-)}\left(\varphi^{(-)}(x), x, 0\right) > 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant x_0, \\ f_u^{(+)}\left(\varphi^{(+)}(x), x, 0\right) > 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{gathered}$$

Далее мы будем исследовать такое решение задачи (2), которое слева от точки x_0 близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$, а справа от точки x_0 — к функции $\varphi^{(+)}(x)$ и резко изменяется от значений $\varphi^{(-)}(x)$ до значений $\varphi^{(+)}(x)$ в окрестности точки x_0.

Для формулировки следующего условия введем так называемые присоединенные уравнения и присоединенные системы, которые используются для описания соответствующего пограничного слоя в нулевом приближении:

$$\begin{gathered} \frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(-)}(\tilde{u}, x_0, 0), \ \xi < 0; \\ \frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(+)}(\tilde{u}, x_0, 0), \ \xi > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Каждое из присоединенных уравнений (3) эквивалентно присоединенной системе

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \Phi; \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0).$$

В силу условия (A2) каждая из точек $(\varphi^{(\mp)}(x_0), 0)$ является точкой покоя типа седла соответствующей присоединенной системы на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

Потребуем также выполнения следующего условия:

(A3)
$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p} f^{(-)}(u, x_0, 0) du > 0,$$
при $\quad \varphi^{(-)}(x_0) < p \leqslant \varphi^{(+)}(x_0)$;
$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p} f^{(+)}(u, x_0, 0) du > 0,$$
при $\quad \varphi^{(-)}(x_0) \leqslant p < \varphi^{(+)}(x_0)$.

При выполнении условий (A1) и (A3) на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ существуют сепаратрисы $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u})$, входящие, соответственно, в седла $(\varphi^{(\mp)}(x_0), 0)$ при $\xi \to \mp\infty$. Выражения для этих сепаратрис имеют следующий вид:

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}) = \left(2 \int\limits_{\varphi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(\mp)}(u, x_0, 0) du\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} H(\tilde{u}) &:= \Phi^{(-)}(\tilde{u}) - \Phi^{(+)}(\tilde{u}) = \\ &= \left(2 \int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0) du\right)^{\frac{1}{2}} - \\ &\quad - \left(2 \int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0) du\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения еще одного условия.

(A4) Пусть существует величина $p_0 \in \left(\varphi^{(-)}(x_0); \varphi^{(+)}(x_0)\right)$ — решение уравнения $H(\tilde{u}) = 0$, а также выполнено неравенство $f^{(-)}(p_0, x_0, 0) - f^{(+)}(p_0, x_0, 0) > 0$.

Уравнение $H(\tilde{u}) = 0$ легко приводится к виду

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0)\, du = \int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0)\, du.$$

Несложно также получить, что

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) = 2 \frac{f^{(-)}(p_0, x_0, 0) - f^{(+)}(p_0, x_0, 0)}{\left(2 \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p_0} f^{(-)}(u, x_0, 0)\, du\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2 \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p_0} f^{(+)}(u, x_0, 0)\, du\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4}$$

Таким образом, из условия (A4) следует неравенство
$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) > 0. \tag{5}$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Построим асимптотическое приближение $U_1(x,\varepsilon)$ решения задачи (2) до первого порядка по малому параметру ε включительно. Функцию $U_1(x,\varepsilon)$ будем строить отдельно слева и справа от точки x_0:
$$U_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_1^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \leqslant x \leqslant x_0, \\ U_1^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Каждую из функций $U_1^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ будем представлять в виде суммы трех слагаемых:
$$U_1^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon) + R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right).$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ — регулярная часть разложения, функции $Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi)$ описывают поведение решения в окрестности точки x_0, а функции $R\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right) = R_0\left(\eta^{(\mp)}\right) + \varepsilon R_1\left(\eta^{(\mp)}\right)$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1;1]$, $\eta^{(\mp)} = \dfrac{x \pm 1}{\varepsilon}$ — растянутые переменные соответственно вблизи точек $x = \mp 1$. Отметим, что в силу краевых условий Неймана $R_0\left(\eta^{(\mp)}\right) = 0$.

Будем непрерывно сшивать асимптотические представления $U_1^{(-)}$ и $U_1^{(+)}$ в точке x_0:
$$U_1^{(-)}(x_0,\varepsilon) = U_1^{(+)}(x_0,\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1. \tag{6}$$

Неизвестные коэффициенты p_0 и p_1 определим из условия непрерывного сшивания производных функций $U_1^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U_1^{(+)}(x,\varepsilon)$, в точке x_0:
$$\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) + O(\varepsilon) = \\ = \frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) + \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0) + O(\varepsilon). \tag{7}$$

2.1. Регулярная часть

Уравнения для функций регулярной части получаются согласно стандартному алгоритму [9] из равенств
$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}\right) = \\ = f^{(\mp)}\left(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}, x, \varepsilon\right) + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Приравняв нулю коэффициенты при ε^0 в каждом из этих равенств, получим уравнения
$$f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0.$$

Учитывая условие (A2), положим
$$\bar{u}_0^{(\mp)} = \varphi^{(\mp)}(x).$$

Функции $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ являются решениями уравнений
$$f_u^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0\right)\bar{u}_1^{(\mp)}(x) = \\ = -(\partial f^{(\mp)}/\partial\varepsilon)(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0),$$
которые также разрешимы согласно условию (A2).

2.2. Функции переходного слоя нулевого порядка

Уравнения для функций переходного слоя получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях каждого из равенств
$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)}\right) = f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi) + \\ + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi) + Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)}, x_0+\varepsilon\xi, \varepsilon) - \\ - f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi), x_0+\varepsilon\xi, \varepsilon) + \\ + O(\varepsilon^2). \tag{8}$$

Граничные условия для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$, $i = 0,1$ при $\xi = 0$ получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра в условии (6) непрерывного сшивания функций $U_1^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U_1^{(+)}(x,\varepsilon)$:
$$\bar{u}_0^{(-)}(x_0) + \varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(0) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0) = \\ = \bar{u}_0^{(+)}(x_0) + \varepsilon\bar{u}_1^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(0) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0) = p_0 + \varepsilon p_1. \tag{9}$$

Потребуем также выполнения стандартного условия убывания функций переходного слоя на бесконечности:
$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \quad i = 0,1. \tag{10}$$

Выделяя в равенствах (8), (9), (10) слагаемые при ε^0, получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:
$$\begin{cases} \dfrac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}, x_0, 0\right); \\ Q_0^{(-)}(0) + \varphi^{(-)}(x_0) = Q_0^{(+)}(0) + \varphi^{(+)}(x_0) = p_0, \\ Q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Задача для функции $Q_0^{(-)}(\xi)$ рассматривается на полупрямой $\xi \leqslant 0$, а для функции $Q_0^{(+)}(\xi)$ — на полупрямой $\xi \geqslant 0$.

Введем обозначения
$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \leqslant 0; \\ \varphi^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \geqslant 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Phi^{(-)}(\xi) = \dfrac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \leqslant 0; \\ \Phi^{(+)}(\xi) = \dfrac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \geqslant 0. \end{cases} \tag{12}$$

Перепишем задачи (11) с учетом введенных обозначений:
$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0); \quad \tilde{u}(0) = p_0; \quad \tilde{u}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(x_0).$$

Уравнения для функции $\tilde{u}(\xi)$ на каждой из полупрямых $\xi \leqslant 0$ и $\xi \geqslant 0$ совпадают с присоединенными уравнениями (3). Согласно условиям (A2) и (A3) существуют функции
$$\Phi^{(-)}(\xi) := \Phi^{(-)}(\tilde{u}(\xi)) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, \quad \xi \leqslant 0;$$
и $$\Phi^{(+)}(\xi) := \Phi^{(+)}(\tilde{u}(\xi)) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, \quad \xi \geqslant 0.$$

Функция $\tilde{u}$ при $\xi \leqslant 0$ является решением задачи

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \left(2\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u,x_0,0)du\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{u}(0)=p_0,$$

а при $\xi \geqslant 0$ — решением задачи

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \left(2\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u,x_0,0)du\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{u}(0)=p_0.$$

Известно (см., например, [9]), что справедливы следующие оценки: $\left|\tilde{u}(\xi)-\varphi^{(\mp)}(x_0)\right| \leqslant C\mathrm{e}^{-\varkappa|\xi|}$, где C и $\varkappa$ — не зависящие от ε положительные константы. Отсюда с учетом обозначений (12) следуют оценки для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:

$$\left|Q_0^{(\mp)}(\xi)\right| \leqslant C\mathrm{e}^{-\varkappa|\xi|}. \tag{13}$$

С использованием обозначений (12) условия сшивания производных (7) в порядке ε^{-1} принимают вид

$$\Phi^{(-)}(0)=\Phi^{(+)}(0).$$

Из этого равенства следует уравнение $H(\tilde{u}(0))=0$, которое, согласно условию (A4), имеет решение $\tilde{u}(0)=p_0$.

2.3. Функции переходного слоя первого порядка

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(\mp)}(x) &:= f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x),x,0),\\ \tilde{f}^{(\mp)}(\xi) &:= f^{(\mp)}\left(\tilde{u}(\xi),x_0,0\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$, $\bar{f}_x^{(\mp)}(x)$, $\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$, $\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)$, $\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi)$, $\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi)$. Из равенств (8), (9), (10) в порядке ε^1 получим следующие задачи для функций $Q_1^{(-)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \leqslant 0$ и $Q_1^{(+)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)} = Q_1^{(\mp)}f(\xi);\\ Q_1^{(-)}(0)+\bar{u}_1^{(-)}(x_0) = Q_1^{(+)}(0)+\bar{u}_1^{(+)}(x_0)=p_1;\\ Q_1^{(\mp)}(\mp\infty)=0, \end{cases}$$

где

$$Q_1^{(\mp)}f(\xi) = \left(\bar{u}_1^{(\mp)}+\xi\frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}(x_0)\right)\times$$
$$\times\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)+\xi\left(\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_x^{(\mp)}(x_0)\right)+$$
$$+\left(\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x_0)\right).$$

Решения этих задач можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi) = \left(p_1-\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)}+$$
$$+\Phi^{(\mp)}(\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)Q_1^{(\mp)}f(\sigma)d\sigma.$$

Функции $Q_1^{(\mp)}f(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки вида (13) и такие же оценки справедливы для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$. Вычислим производные функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ при $\xi=0$:

$$\frac{dQ_1^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \left(p_1-\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right)\frac{f^{(\mp)}(p_0,x_0,0)}{\Phi^{(\mp)}(0)}+$$
$$+\frac{1}{\Phi^{(\mp)}(0)}\int\limits_{\mp\infty}^{0}\Phi^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)}f(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Запишем условие сшивания производных, которое получается из равенства (7) в порядке ε^0:

$$\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0)+\frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0)+\frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0).$$

Подставляя сюда явные выражения (15) для производных функций $Q_1^{(\mp)}$ и проводя некоторые преобразования, можно получить уравнение для коэффициента p_1:

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0)\cdot p_1 = G_1,$$

где $H(\tilde{u})$ — функция из условия (A4), а величина G_1 — известна. Это уравнение разрешимо в силу неравенства (5).

2.4. Пограничные функции

Функции $R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right)$ пограничного слоя в окрестностях точек $x=\mp1$ строятся стандартным образом [9] в виде разложения по степеням ε. Для них справедливы экспоненциальные оценки, аналогичные оценкам для функций переходного слоя.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Для доказательства существования решения используем теоремы о дифференциальных неравенствах, развитые для рассматриваемого класса задач в [5–7]. Из результатов этих работ следует, что из существования нижнего и верхнего решений $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ задачи (2) следует существование решения этой задачи, заключенного между ними.

Функции $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ называются нижним и верхним решениями задачи (2), если при достаточно малых ε выполняется следующая система неравенств.

1. Условие упорядоченности:

$$\alpha(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,\varepsilon), \quad x\in[-1;1].$$

2. Действие оператора на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2\frac{d^2\beta}{dx^2}-f(\beta,x,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\varepsilon^2\frac{d^2\alpha}{dx^2}-f(\alpha,x,\varepsilon);$$
$$x\in(-1;1)\backslash x_0.$$

3. Условия на границе:

$$\frac{d\alpha}{dx}(-1,\varepsilon)\geqslant u^{(-)}\geqslant\frac{d\beta}{dx}(-1,\varepsilon),$$
$$\frac{d\alpha}{dx}(1,\varepsilon)\leqslant u^{(+)}\leqslant\frac{d\beta}{dx}(1,\varepsilon).$$

4. Условия на производные в точке x_0:

$$\frac{d\beta}{dx}(x_0-0,\varepsilon) \geqslant \frac{d\beta}{dx}(x_0+0,\varepsilon);$$
$$\frac{d\alpha}{dx}(x_0-0,\varepsilon) \leqslant \frac{d\alpha}{dx}(x_0+0,\varepsilon).$$

3.1. Построение верхнего и нижнего решений

Алгоритм построения верхних и нижних решений для задач с внутренними переходными и пограничными слоями носит название асимптотического метода дифференциальных неравенств и подробно описан в [10–12]. Этот алгоритм заключается в построении функций $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$ как модификаций асимптотического представления решения задачи.

Обозначим через $\beta_1(x,\varepsilon)$ верхнее решение задачи (2), построенное с использованием асимптотического приближения первого порядка, $U_1(x,\varepsilon)$, отдельно на каждом из отрезков $[-1;x_0]$ и $[x_0;1]$:

$$\beta_1(x,\varepsilon)=\begin{cases}\beta_1^{(-)}(x,\varepsilon)=U_1^{(-)}(x,\varepsilon)+\varepsilon\left(\mu+q^{(-)}(\xi)\right), \\ \quad x\in[-1;x_0],\ \xi\leqslant 0; \\ \beta_1^{(+)}(x,\varepsilon)=U_1^{(+)}(x,\varepsilon)+\varepsilon\left(\mu+q^{(+)}(\xi)\right), \\ \quad x\in[x_0;1],\ \xi\geqslant 0.\end{cases} \tag{16}$$

Здесь μ — положительная константа, которая подбирается таким образом, чтобы неравенства 1–2 выполнялись вдали от точки x_0. Функции $q^{(\mp)}(\xi)$ вводятся для устранения невязок порядка $O(\varepsilon)$, возникающих в неравенстве 2 — в окрестности точки x_0 в результате добавления к асимптотическому разложению величины μ.

Эти функции определяются как решения краевых задач

$$\begin{cases}\dfrac{d^2q^{(\mp)}}{d\xi^2}-\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)q^{(\mp)}= \\ \qquad =\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\mu-d\exp(-\lambda|\xi|), \\ q^{(-)}(0)+\mu=q^{(+)}(0)+\mu=\delta;\quad q^{(\mp)}(\mp\infty)=0.\end{cases}$$

Здесь были использованы обозначения (14). Задача для $q^{(-)}(\xi)$ решается при $\xi\leqslant 0$, а задача для $q^{(+)}(\xi)$ — при $\xi\geqslant 0$. Величина δ определяется далее таким образом, чтобы неравенства 4 и 1 выполнялись в области переходного слоя.

Функции $q^{(\mp)}(\xi)$ можно выписать в явном виде:

$$q^{(\mp)}(\xi)=(\delta-\mu)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)}+ \\ +\Phi^{(\mp)}(\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)\times \\ \times\left(\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\sigma)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\mu-d\exp(-\lambda|\sigma|)\right)d\sigma. \tag{17}$$

Заметим, что имеют место следующие оценки: (см. (14), (12), (13))

$$\left|\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right|<C\exp(-\kappa|\xi|),$$

где C и κ — положительные константы, не зависящие от ε. Выберем теперь константы δ, d и κ достаточно большими, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\delta-\mu>0;$$
$$\left(\tilde{f}_u^{(-)}(\xi)-\bar{f}_u^{(-)}(x_0)\right)\mu-d\exp(\lambda\xi)<0,\ \ \xi\leqslant 0;$$
$$\left(\tilde{f}_u^{(+)}(\xi)-\bar{f}_u^{(+)}(x_0)\right)\mu-d\exp(-\lambda\xi)<0,\ \ \xi\geqslant 0.$$

Отметим, что функция $q^{(-)}(\xi)$ принимает строго положительные значения при $\xi\leqslant 0$, а функция $q^{(+)}(\xi)$ — строго положительные значения при $\xi\geqslant 0$.

Функция $\alpha_1(x,\varepsilon)$ — нижнее решение задачи (2) — имеет вид

$$\alpha_1(x,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha_1^{(-)}(x,\varepsilon)=U_1^{(-)}(x,\varepsilon)-\varepsilon\left(\mu+q^{(-)}(\xi)\right), \\ x\in[-1;x_0],\ \xi\leqslant 0; \\ \alpha_1^{(+)}(x,\varepsilon)=U_1^{(+)}(x,\varepsilon)-\varepsilon\left(\mu+q^{(+)}(\xi)\right), \\ x\in[x_0;1],\ \xi\geqslant 0.\end{cases} \tag{18}$$

Для того, чтобы не применять модификацию для пограничных функций, используем стандартную процедуру умножения экспоненциально убывающих функций в выражениях для $\alpha_1(x,\varepsilon)$ и $\beta_1(x,\varepsilon)$ на срезающую функцию, сохранив прежние обозначения (в результате $\alpha_1(x,\varepsilon)$ и $\beta_1(x,\varepsilon)$ удовлетворяют граничным условиям точно).

Лемма 3.1. *Для функций $\alpha_1(x,\varepsilon)$ и $\beta_1(x,\varepsilon)$ выполняются неравенства 1–4.*

Проверим выполнение неравенства 1. Для этого запишем разность $\beta_1(x,\varepsilon)-\alpha_1(x,\varepsilon)$ на каждом из сегментов $[-1;x_0]$ и $[x_0;1]$:

$$\beta_1^{(\mp)}(x,\varepsilon)-\alpha_1^{(\mp)}(x,\varepsilon)=\varepsilon\left(2\mu+2q^{(\mp)}(\xi)\right).$$

Выражения справа строго положительны, поскольку положительны константа μ и функции $q^{(\mp)}(\xi)$. Таким образом, неравенство 1 выполнено всюду на $[-1;1]$.

Покажем выполнение неравенства 2 на примере верхнего решения. Из способа построения функций $\beta_1^{(\mp)}$ следуют равенства

$$\varepsilon^2\frac{d^2\beta_1^{(\mp)}}{dx^2}-f^{(\mp)}\left(\beta_1^{(\mp)},x,\varepsilon\right)= \\ =-\varepsilon\left(\mu\cdot\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)+d\cdot e^{-\kappa|\xi|}\right)+O\left(\varepsilon^2\right).$$

Функции $\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$ положительны согласно условию (A2), поэтому выражение в правой части отрицательно при достаточно малых ε, и тем самым неравенство 2 для верхнего решения выполнено. Аналогично доказывается выполнение неравенства 2 для нижнего решения. Проверим выполнение неравенства 4 для верхнего решения. Из выражений (16) для функций $\beta_1^{(\mp)}$, а также из условия C^1-сшивания (7) следуют равенства

$$\frac{d\beta_1}{dx}(x_0-0,\varepsilon)-\frac{d\beta_1}{dx}(x_0+0,\varepsilon)= \\ =\frac{dq^{(-)}}{d\xi}(0)-\frac{dq^{(+)}}{d\xi}(0)+O(\varepsilon). \tag{19}$$

Используя явный вид (17) для функций $q^{(\mp)}(\xi)$, можно выписать выражения для производных этих функций при $\xi = 0$:

$$\frac{dq^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \delta \cdot \frac{f^{(\mp)}(p_0, x_0, 0)}{\Phi^{(\mp)}(0)} - \\ - \frac{\mu}{\Phi^{(\mp)}(0)} \cdot \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \left(p_0 - \varphi^{(\mp)}(x_0)\right) - \\ - \frac{d}{\Phi^{(\mp)}(0)} \int_{\mp\infty}^{0} \Phi^{(\mp)}(\xi) \cdot e^{-\lambda|\xi|} d\xi.$$

Подставляя эти выражения в правую часть равенства (19), получаем

$$\frac{d\beta_1}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) - \frac{d\beta_1}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon) = \\ = \delta \cdot \frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) - \frac{\mu \cdot \bar{f}_u^{(-)}(x_0)}{\Phi^{(-)}(0)} \left(p_0 - \varphi^{(-)}(x_0)\right) + \\ + \frac{\mu \cdot \bar{f}_u^{(+)}(x_0)}{\Phi^{(+)}(0)} \left(p_0 - \varphi^{(+)}(x_0)\right) - \\ - \frac{d}{\Phi^{(-)}(0)} \int_{-\infty}^{0} \Phi^{(-)}(\xi) \cdot e^{\lambda\xi} d\xi + \\ + \frac{d}{\Phi^{(+)}(0)} \int_{+\infty}^{0} \Phi^{(+)}(\xi) \cdot e^{-\lambda\xi} d\xi.$$

Принимая во внимание условие (A4), можно выбрать положительную величину δ достаточно большой, чтобы выражение в правой части последнего равенства оказалось положительным и тем самым выполнялось неравенство 4 для верхнего решения.

Нетрудно доказать, что при том же значении δ выполняется неравенство 4 для нижнего решения.

Как доказано в [5–7], из существования верхнего и нижнего решений задачи (2) следует существование решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (2), заключенного между этими верхним и нижним решениями. Совершенно также могут быть построены нижние и верхние решения следующих порядков. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A4). Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует функция $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (2), для которого функция $U_1(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^2)$, то есть для всех $x \in [-1; 1]$ выполняется неравенство

$$|u(x, \varepsilon) - U_1(x, \varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^2, \qquad (20)$$

где C — положительная константа, не зависящая от ε.

Стоит отметить, что для получения оценки (20) нужно построить асимптотическое приближение второго порядка и верхнее и нижнее решения по аналогии с (16) и (18) как модификации этого асимптотического приближения.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ.

Как отмечалось в п. 1, решение задачи (2) — стационарное решение задачи (1). Использование построенных нижнего и верхнего решений позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 2. *При выполнении условий* (A1)–(A4) при достаточно малых ε стационарное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1) в смысле определения 2, для которого функция $U_1(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением, локально единственно как решение задачи (2) и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x, \varepsilon); \beta_1(x, \varepsilon)]$.

Докажем, что решение $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) существует для любой начальной функции v_{init}, лежащей в интервале $\alpha_1(x, \varepsilon) \leqslant v_{\text{init}}(x, \varepsilon) \leqslant \beta_1(x, \varepsilon)$, и выполняется предельное равенство

$$\lim_{t\to\infty} |v(x, t, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| = 0, \qquad (21)$$

где $u(x, \varepsilon)$ — единственное решение задачи (2) в интервале $[\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$.

Для доказательства этой теоремы также используем метод дифференциальных неравенств. Этот метод основан на принципе максимума для параболических уравнений и подробно описан в книге [13] для задач вида (1) в случае гладких функций $f(v, x, \varepsilon)$ в правой части. Однако к случае рассматриваемой здесь функции $f(v, x, \varepsilon)$, удовлетворяющей условию (A1), этот метод также может быть применен, если принять во внимание принцип максимума для функций из класса C^1 [14, 15].

Функции $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$, называемые верхним и нижним решениями задачи (1), определяются аналогично стационарной задаче. При достаточно малых ε они удовлетворяют системе неравенств:

1^0. Условие упорядоченности:

$$\hat{\alpha}\,(x, t, \varepsilon) < \hat{\beta}\,(x, t, \varepsilon)\,, \quad (t, x) \in \overline{D}_T.$$

2^0. Действие оператора в уравнении (1) на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} - f\left(\hat{\beta}, x, \varepsilon\right) \leqslant 0 \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} - f\left(\hat{\alpha}, x, \varepsilon\right) \quad \text{при} \quad (t, x) \in D_T^{(\mp)}.$$

3^0. Условия на границе:

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dx}(-1, t, \varepsilon) \geqslant u^{(-)} \geqslant \frac{d\hat{\beta}}{dx}(-1, t, \varepsilon), \\ \frac{d\alpha}{dx}(1, t, \varepsilon) \leqslant u^{(+)} \leqslant \frac{d\beta}{dx}(1, t, \varepsilon), \quad t > 0.$$

4^0. Условия на производные при $x = x_0$:

$$\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x}(x_0 - 0, t, \varepsilon) \geqslant \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x}(x_0 + 0, t, \varepsilon); \\ \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial x}(x_0 - 0, t, \varepsilon) \leqslant \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial x}(x_0 + 0, t, \varepsilon), \quad t > 0.$$

Используя результат теоремы 1, а также очевидные оценки $|u(x, \varepsilon) - \alpha_1(x, \varepsilon)| \leqslant C\varepsilon$ и $|u(x, \varepsilon) - \beta_1(x, \varepsilon)| \leqslant C\varepsilon$, несложно проверить (аналогичные вычисления можно найти, например, в [16]), что условия 1^0–4^0 выполняются, если выбрать функции $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ следующим образом:

$$\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\hat{\beta}^{(-)}(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+\\ +\left(\beta_1^{(-)}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t},\\ \quad (t,x)\in\overline{D}_T^{(-)},\\ \hat{\beta}^{(+)}(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+\\ +\left(\beta_1^{(+)}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t},\\ \quad (t,x)\in\overline{D}_T^{(+)};\end{cases}$$
$$\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\hat{\alpha}^{(-)}(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+\\ +\left(\alpha_1^{(-)}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t},\\ \quad (t,x)\in\overline{D}_T^{(-)},\\ \hat{\alpha}^{(+)}(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+\\ +\left(\alpha_1^{(+)}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t},\\ \quad (t,x)\in\overline{D}_T^{(+)},\end{cases} \tag{22}$$

где $\beta_1^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $\alpha_1^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ — функции из (16) и (18).

Аналогично работе [13], воспользовавшись принципом максимума для функций из класса C^1 [14, 15], можно доказать, что из существования верхнего и нижнего решений задачи (1) следует существование единственного решения $v(x,t,\varepsilon)$ этой задачи, для которого в каждый момент времени $t>0$ выполняются неравенства $\hat{\alpha}^{(\mp)}(x,t,\varepsilon)\leqslant v(x,t,\varepsilon)\leqslant\hat{\beta}^{(\mp)}(x,t,\varepsilon)$, при условии, что аналогичные неравенства выполняются в начальный момент времени:

$$\hat{\alpha}^{(\mp)}(x,0,\varepsilon)\leqslant v_{\text{init}}(x,\varepsilon)\leqslant\hat{\beta}^{(\mp)}(x,0,\varepsilon). \tag{23}$$

Используя выражения (22), приходим к равенству (21), из которого в силу единственности решения задачи (1) следует локальная единственность решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (2) и асимптотическая устойчивость этого решения как стационарного решения начально-краевой задачи (1).

Из неравенств (23), а также из того, что $\hat{\alpha}(x,0,\varepsilon)=\alpha_1(x,\varepsilon)$, $\hat{\beta}(x,0,\varepsilon)=\beta_1(x,\varepsilon)$ (см. (22)) следует, что промежуток $[\alpha_1(x,\varepsilon);\beta_1(x,\varepsilon)]$ является областью притяжения устойчивого решения задачи (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование асимптотического метода дифференциальных неравенств позволяет доказать не только существование, но и асимптотическую устойчивость решения с внутренним переходным слоем стационарного уравнения реакция–диффузия. Полученные условия устойчивости решения следует принимать во внимание при создании адекватных моделей, описывающих явления в средах с разрывными характеристиками. Также результаты работы можно использовать для создания эффективных методов численного решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 18-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левашова Н. Т., Николаева О. А., Пашкин А. Д.* // Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 5. С. 12. (*Levashova N. T., Nikolaeva O. A., Pashkin A. D.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2015. **70**, N 5. P. 341).
2. *Orlov A., Levashova N., Burbaev T.* // Journal of Physics: Conference Series. 2015. **586**. P. 012003.
3. *Нефедов Н. Н., Ни М. К.* // ЖВМиМФ. 2015. № 12. С. 64.
4. *Васильева А. Б.* // ЖВМиМФ. 1995. **35**, № 4. С. 520.
5. *Похожаев С. И.* // Матем. сб. 1980. **113** № 2. С. 324.
6. *Павленко В. Н., Ульянова О. В.* // Изв. вузов. Матем. 1998. № 11. С. 69.
7. *Лепчинский М. Г., Павленко В. Н.* // Алгебра и анализ. 2005. **17**, № 3. С. 124.
8. *Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О.* // ЖВМиМФ. 2017. **57**, № 5. С. 854.
9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* // Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
10. *Нефедов Н. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. **31**, № 7. С. 1132.
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 268. С. 268.
12. *Nefedov N. N.* // Lecture Notes in Computer Science. 2013. **8236**. С. 62.
13. *Pao C. V.* // Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York, 1992.
14. *Daners D., Koch Medina P.* //Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications. Harlow, Essex, 1992.
15. *Dong G.* // Nonlinear Partial Differential Equations of Second Order. Providence, Rhode Island, 2008.
16. *Орлов А. О., Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т.* // Дифференц. уравнения. 2018. **54**, № 5. С. 673.

The Asymptotic Stability of a Stationary Solution with an Internal Transition Layer to a Reaction–Diffusion Problem with a Discontinuous Reactive Term

N. N. Nefedov[a], **N. T. Levashova**[b], **A. O. Orlov**[c]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]*nefedov@phys.msu.ru,* [b]*natasha@npanalytica.ru,* [c]*orlov.andrey@physics.msu.ru.*

The problem of the asymptotic stability of a stationary solution with an internal transition layer of a one-dimensional reaction–diffusion equation is considered. What makes this problem peculiar is that it has a discontinuity (of the first kind) of the reactive term (source) at an internal point of the segment on which the problem is stated, making the solutions have large gradients in the narrow transition layer near the interface. The existence, local uniqueness, and asymptotic stability conditions are obtained for the solution with such an internal transition layer. The proof uses the asymptotic method of differential inequalities. The obtained existence and stability conditions of the solution should be taken into account when constructing adequate models that describe phenomena in media with discontinuous characteristics. One can use the results of this work to develop efficient methods for solving differential equations with discontinuous coefficients numerically.

Keywords: internal transition layer, method of differential inequalities, Lyapunov asymptotic stability, upper and lower solutions.
PACS: 02.30.Hq.
Received 23 June 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **73**, No. 6. Pp. 565–572.

Сведения об авторах

1. Нефедов Николай Николаевич — доктор физ.-мат наук, профессор, зав. кафедрой; тел.: (495) 939-48-59, e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
2. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: natasha@npanalytica.ru.
3. Орлов Андрей Олегович — аспирант; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru.