

Расчет прямоугольного волновода с учетом потерь в стенках

А. Н. Боголюбов, А. И. Ерохин, М. И. Светкин^a

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра общей физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Статья поступила 25.05.2018, принята к публикации 13.06.2018.

Предложена математическая модель бесконечного волновода постоянного прямоугольного сечения с потерями в стенках, описываемыми граничными условиями Щукина–Леонтовича. Для расчета волновода применен неполный метод Галеркина. В качестве базиса использован стандартный базис для волновода с идеально проводящими стенками, дополненный функциями, позволяющими точно выполнить граничные условия.

Расчитаны собственные моды волновода в терагерцевом диапазоне, построены дисперсионные характеристики.

Ключевые слова: волноведущие системы, условия Щукина–Леонтовича, неполный метод Галеркина.
УДК: 51.73, 519.632.4, 537.876.45. **PACS:** 02.70.Dh.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается волновод постоянного прямоугольного сечения $V = \{(x, y) \in S : x \in (0, a), y \in (0, b), z \in \mathbb{R}\}$, где z – ось волновода.

Электромагнитное поле внутри волновода описывается задачей для уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями Щукина–Леонтовича [1] на боковой границе волновода:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{\partial V} = Z_s [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_{\partial V}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} – единичная внешняя нормаль к границе ∂V области. Для прямоугольной области это условие может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} E_x &= Z_s H_z, & E_z &= -Z_s H_x, & y &= 0, \\ E_x &= -Z_s H_z, & E_z &= Z_s H_x, & y &= b, \\ E_y &= Z_s H_z, & E_z &= -Z_s H_y, & x &= 0, \\ E_y &= -Z_s H_z, & E_z &= Z_s H_y, & x &= a, \end{aligned} \quad (3)$$

где Z_s – импеданс материала стенок волновода.

Для нахождения общего решения поставленной задачи (1)–(3) применим неполный метод Галеркина. Пусть

$\mathbf{G}_{nm}^{(e1)}, \mathbf{G}_{nm}^{(e2)}, \mathbf{G}_{nm}^{(h3)}$ – базисные функции электрического типа [2] идеального волновода, $0 < n \leq N$, $0 < m \leq M$.

$\mathbf{G}_{nm}^{(h1)}, \mathbf{G}_{nm}^{(h2)}, \mathbf{G}_{nm}^{(e3)}$ – базисные функции магнитного типа [2] идеального волновода, $0 < n \leq N$, $0 < m \leq M$, $n + m > 0$.

Введем дополнительные базисные функции $\mathbf{G}_{nm}^{(ex)}, \mathbf{G}_{nm}^{(ey)}, \mathbf{G}_{nm}^{(exx)}, \mathbf{G}_{nm}^{(exy)}$, $0 < n \leq N$, $0 < m \leq M$, $n + m > 0$ с ненулевой касательной компонентой электрического поля на границе ∂S , обеспечивающие выполнение условий Щукина–Леонтовича [3].

Обозначим суммирование по мультииндексу (n, m) для скаларов полей электрического и магнитного типа через

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M q_{nm} = \sum_{(e)} q_{nm}, \quad \sum_{n+m>0}^{N,M} q_{nm} = \sum_{(h)} q_{nm}.$$

Представим электромагнитные поля в сечении волновода в виде

$$\mathbf{H}_z = \sum_{(h)} W_{nm}^{(h1)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(h1)}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \sum_{(e)} W_{nm}^{(e2)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(e2)} + \sum_{(h)} W_{nm}^{(e3)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(e3)} + \\ &+ \sum_{(h)} W_{nm}^{(ex)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(ex)} + \sum_{(h)} W_{nm}^{(ey)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(ey)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= \sum_{(e)} W_{nm}^{(e1)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(e1)} + \sum_{(h)} W_{nm}^{(exx)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(exx)} + \\ &+ \sum_{(h)} W_{nm}^{(exy)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(exy)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \sum_{(e)} W_{nm}^{(h3)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(h3)} + \sum_{(h)} W_{nm}^{(h2)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(h2)}. \quad (7)$$

Подставляя разложения полей (4)–(7) в систему уравнений Максвелла (1) и граничные условия (3) и воспользовавшись свойствами построенного базиса [3], получим дифференциально-алгебраическую систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов W_{nm} .

$$\begin{aligned} \frac{dW_{nm}^{(e2)}}{dz} &= -ik \left(1 - \frac{\kappa_{nm}^2}{k^2} \right) W_{nm}^{(h3)} + \\ &+ \frac{1}{b} \sum_{m'=0}^M \frac{2\pi m}{\kappa_{nm} b} \left[(-1)^{m'} - 1 \right] W_{nm'}^{(exy)} + \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{n'=0}^N \frac{2\pi n}{\kappa_{nm} a} \left[(-1)^{n'} - 1 \right] W_{n'm}^{(exx)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{dW_{nm}^{(h3)}}{dz} = -ik W_{nm}^{(e2)}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_{nm}^{(h2)}}{dz} &= -ik \left(1 - \frac{\kappa_{nm}^2}{k^2} \right) W_{nm}^{(e3)} + \\ &+ \frac{\kappa_{nm} Z_s}{ik} \left\{ -\frac{2}{b} \sum_{m'=0}^M \left[(-1)^{m+m'} + 1 \right] W_{nm'}^{(h1)} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{a} \sum_{n'=0}^N \left[(-1)^{n+n'} + 1 \right] W_{n'm}^{(h1)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

^a E-mail: amihail-svetkin@mail.ru

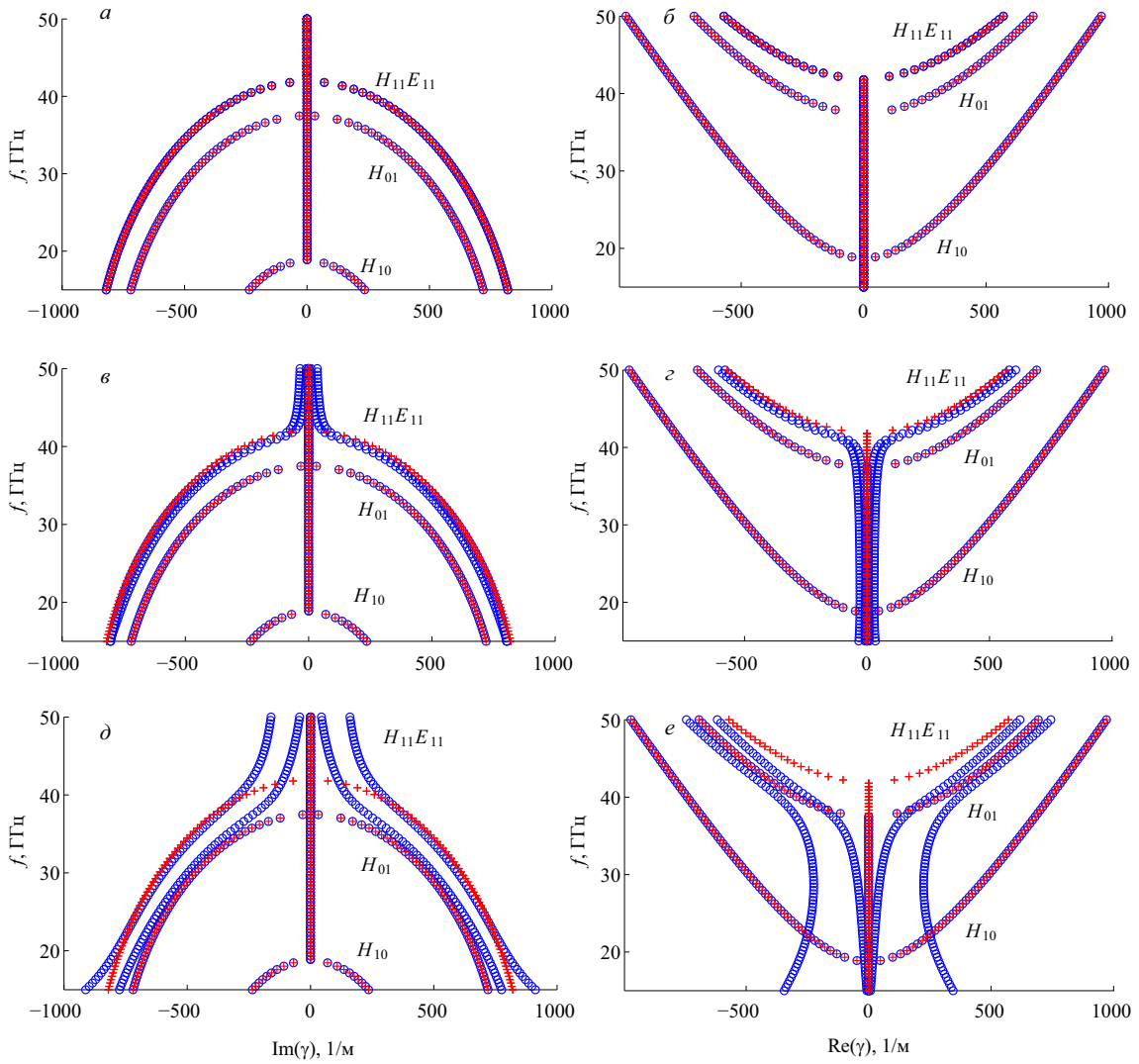


Рис. 1. Дисперсионные характеристики: *a, б* – идеального бесконечного волновода («+»), полученные аналитически и рассчитанные предложенным методом при $Z_s = 0$ (круги); *в, з* – идеального бесконечного волновода («+») и волновода с потерями при импедансе $Z_s = 0.05(1 - i)$ (круги); *д, е* – идеального бесконечного волновода («+») и волновода с потерями при импедансе $Z_s = 0.25(1 - i)$ (круги)

$$\frac{dW_{nm}^{(e3)}}{dz} = -ikW_{nm}^{(h2)} + \frac{1}{b} \sum_{m'=0}^M \frac{\pi n}{\kappa_{nm} b} [(-1)^{m'} - 1] W_{nm'}^{(ezy)} - \frac{1}{a} \sum_{n'=0}^N \frac{\pi m}{\kappa_{nm} a} [(-1)^{n'} - 1] W_{n'm}^{(ezx)}, \quad (11)$$

$$W_{nm}^{(h1)} = \frac{\kappa_{nm}}{ik} W_{nm}^{(e3)} - \frac{Z_s}{ik} \left\{ \frac{2}{b} \sum_{m'=0}^M [(-1)^{m+m'} + 1] W_{nm'}^{(h1)} + \frac{2}{a} \sum_{n'=0}^N [(-1)^{n+n'} + 1] W_{n'm}^{(h1)} \right\}, \quad (12)$$

$$W_{nm}^{(e1)} = -\frac{\kappa_{nm}}{ik} W_{nm}^{(h3)}, \quad (13)$$

$$W_{nm}^{(ezx)} = Z_s \left(\frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} W_{nm}^{(h2)} - \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} W_{nm}^{(h3)} \right), \quad (14)$$

$$W_{nm}^{(ezy)} = Z_s \left(\frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} W_{nm}^{(h2)} + \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} W_{nm}^{(h3)} \right), \quad (15)$$

$$W_{nm}^{(ex)} = -\frac{Z_s \kappa_{nm}}{ik} W_{nm}^{(e3)}, \quad (16)$$

$$W_{nm}^{(ey)} = -\frac{Z_s \kappa_{nm}}{ik} W_{nm}^{(e3)}, \quad (17)$$

где $\kappa_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}$. Сведем систему уравнений (8)–(17) к системе дифференциальных уравнений.

Введем столбец всех искомых коэффициентов $\tilde{C} = (W^{(e2)}, W^{(h3)}, W^{(h2)}, W^{(e3)}, W^{(e1)}, W^{(h1)}, W^{(ex)}, W^{(ey)}, W^{(ezx)}, W^{(ezy)})^T$, столбец коэффициентов $C = (W^{(e2)}, W^{(h3)}, W^{(h2)}, W^{(e3)})^T$, стоящих под знаком дифференцирования по z в (9)–(18) и столбец $\hat{C} = (W^{(e1)}, W^{(h1)}, W^{(ex)}, W^{(ey)}, W^{(ezx)}, W^{(ezy)})^T$.

Таким образом, $\tilde{C} = (C^T, \hat{C}^T)^T$. Обозначим P и \tilde{P} высоту столбцов C и \tilde{C} соответственно.

Система дифференциальных уравнений (8)–(11) в введенных обозначениях имеет вид

$$\frac{dC}{dz} = DC, \quad (18)$$

где D – матрица $P \times \tilde{P}$.

Алгебраические уравнения (12)–(17) запишем в виде

$$A\tilde{C} = 0, \quad (19)$$

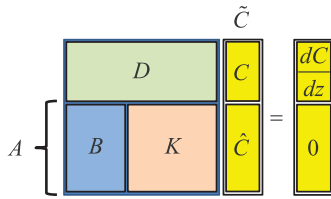


Рис. 2. Структура матрицы дифференциально-алгебраической системы уравнений

где A — матрица $(\tilde{P} - P) \times \tilde{P}$. Тогда систему (19) перепишем в виде

$$BC + K\hat{C} = 0, \quad (20)$$

где $A = [B, K]$, K — квадратная матрица $(\tilde{P} - P) \times (\tilde{P} - P)$.

Выразим \hat{C} через C :

$$\hat{C} = -K^{-1}BC. \quad (21)$$

Таким образом, полный столбец неизвестных $\tilde{C} = (C, \hat{C})^T$ может быть выражен через столбец неизвестных СОДУ C :

$$\tilde{C} = QC = \begin{pmatrix} I \\ -K^{-1}B \end{pmatrix} C, \quad (22)$$

где I — единичная матрица размерности $P \times P$, $-K^{-1}B$ — матрица размерности $(\tilde{P} - P) \times P$.

Подставляя (22) в (18), получим СОДУ относительно столбца C с квадратной матрицей T :

$$\frac{dC}{dz} = DC = DQC = TC. \quad (23)$$

Вычисляя собственные вектора и собственные значения матрицы T , получим множество собственных мод волновода. Последовательно применяя алгоритм для выбранного диапазона частот $k \in [k_1, k_2]$, строим дисперсионную характеристику рассматриваемого волновода.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассчитывались дисперсионные характеристики волновода прямоугольного сечения размера $10 \text{ см} \times 20 \text{ см}$. При $Z_s = 0$ система уравнений (23) переходит в систему уравнений для идеального волновода и дисперсионные характеристики согласуются с рассчитанными аналитически (рис. 1, а, б).

При наличии импеданса дисперсионные характеристики искажаются, появляется затухание мод (рис. 1, в, з, д, е).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая векторная модель волновода прямоугольного сечения с потерями в стенках. Реализован алгоритм ее расчета на ЭВМ. Построены дисперсионные характеристики. Предложенный алгоритм также позволяет рассчитывать волноведущие системы лестничного типа, широко используемые при конструировании клистронных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-31-60084 мол_а_дк и № 16-01-00690).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. ЖТФ. 1948, **18**. С. 959.
3. Ерохин А. И., Могилевский И. Е., Родякин В. Е., Пикунов В. М. // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2016. № 6. 1661106.
4. Свешиников А. Г., Могилевский И. Е. Избранные математические задачи теории дифракции. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
5. Ильинский А. С. и др. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
6. Пикунов В. М., Свешиников А. Г. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Справочные приложения, базы и банки данных. VII-1. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. М.: ЯНУС-К. 2008. С. 534–567.

Analysis of a Rectangular Waveguide with Allowance for Losses in the Walls

A.N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, M. I. Svetkin^a

Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^amihail-svetkin@mail.ru.

We propose a model of an infinite waveguide of constant rectangular cross section with losses in the walls which are described by the Schukin–Leontovich boundary conditions. The waveguide is analyzed using the non-complete Galerkin method. We use the standard basis for waveguide with ideally conducting walls supplemented with functions providing precise fulfillment of the boundary conditions. The eigen modes of the waveguide in the THz range are calculated and dispersion characteristics are obtained.

Keywords: waveguide systems, Schukin–Leontovich boundary conditions, incomplete Galerkin method.

PACS: 02.70.Dh Finite-element and Galerkin methods.

Received 25 May 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **73**, No. 6. Pp. 579–582.

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: forlector@mail.ru.
3. Светкин Михаил Игоревич — аспирант; e-mail: mihail-svetkin@mail.ru.