

## Точные решения уравнений нестационарного фронта с точками равновесия бесконечного порядка вырождения

А. А. Быков,<sup>a</sup> К. Е. Ермакова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Статья поступила 20.03.2018, принята к публикации 13.06.2018.

Найдено семейство точных решений квазилинейного эволюционного уравнения, описывающего процесс реакции–диффузии в среде с бесконечным порядком вырождения двух крайних корней функции плотности источников. Построены несколько членов формального асимптотического ряда для решения типа контрастной структуры, представляющего решение начально-краевой задачи в пространственно однородной среде для случая гауссовой функции плотности источников в окрестности крайних корней. Дано обоснование корректности частичной суммы асимптотического ряда с использованием метода дифференциальных неравенств. Показано, что передний участок перемещающегося фронта контрастной структуры имеет экспоненциальный характер, задний участок фронта представлен значительно более медленно убывающей функцией, которая для гауссовой функции плотности источников выражается через степенную функцию от логарифма координаты.

**Ключевые слова:** нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастная структура, дифференциальные неравенства.

УДК: 517.9. PACS: 02.30.Jr.

### ВВЕДЕНИЕ

Контрастные структуры [1, 2] образуются при решении моделей, основанных на уравнении реакции–диффузии (РД) с нелинейной зависимостью правой части, описывающей плотность источников, от неизвестной функции. В частности, контрастные структуры (КС) возникают в задачах о распространении тепла в среде с источниками, плотность которых зависит от температуры. Одна из актуальных задач теории контрастных структур в настоящее время – исследование КС с вырожденными корнями функции плотности источников [3]. Введение в уравнение РД малого параметра приводит к более сложной структуре внутреннего переходного слоя (ВПС), в котором появляются несколько так называемых зон с качественно различным поведением решения [4, 5]. Для случая корня второго порядка получены практически исчерпывающие результаты для задачи о пограничном слое [6], значительные результаты получены также для трехкратно вырожденного корня [7, 8]. Подход к эволюционной задаче основан на изучении стационарного решения параболического уравнения, и в этом случае метод дифференциальных неравенств [9] позволяет обосновать устойчивость решения [10]. Для уравнения РД с вырожденными корнями установлено наличие области притяжения решения типа КС так же, как и для задач с некротными корнями [11]. Основные положения метода дифференциальных неравенств, применение которого обеспечивает обоснование корректности формальной асимптотики, пригодны также для задачи эллиптического типа с кратными корнями [12].

В настоящей работе мы распространим результаты теории КС на случай функции плотности источников (ФПИ) уравнения реакции–диффузии, корни которой имеют бесконечно большую кратность вырождения. Это означает, что ФПИ  $f(\varphi + \delta u)$  стремится к нулю при  $\delta u \rightarrow 0$  быстрее любой степени  $\delta u$ , где  $\delta u = u - \varphi$ . В частности, мы рассматриваем обобщенную гауссовую

функцию плотности  $f(u)$ , представленную в виде произведения некоторой степени  $\delta u$  на функцию  $e^{-\gamma/\delta u^2}$ , где  $\gamma > 0$ , так что в окрестности точки, в которой температура или концентрация  $u$  принимает одно из критических значений  $\varphi_j$ , ФПИ может быть представлена в виде

$$f(\varphi_j + \delta u) = C_j \operatorname{sign}(\delta u) |\delta u|^{\theta_j} e^{-\gamma_j/\delta u^2}, \quad \gamma_j > 0, \quad (1)$$

величины  $\theta_j$  могут иметь любой знак, причем  $f(\varphi_j(x)) = 0$ . Мы покажем, что передний и задний участки фронта КС демонстрируют принципиально разный закон выхода решения на стационарный уровень. На переднем участке фронта решение стремится к одному из корней ФПИ по экспоненциальному закону, а на заднем участке фронта – по степенному-логарифмическому закону, т.е. существенно медленнее. Этот результат важен в практике моделирования реакций с перемещающимся фронтом, в том числе для реакции горения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем одномерную модель, основанную на уравнении реакции–адвекции–диффузии [9] с малым параметром:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \kappa \varepsilon^2 u_{xx} - f(u), & (x, t) \in \Pi, \\ u_x(a, t) = 0, \quad u_x(b, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi_0(x), \end{cases} \quad (2)$$

$u \in C_2(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ ,  $\Pi = (a, b) \times (0, T)$ ,  $\bar{\Pi} = [a, b] \times [0, T]$ .

Замена  $x = \varepsilon \xi$ ,  $t = \varepsilon \tau$  приводит задачу (2) к аналогичной, но теперь промежуток будет  $\left[\frac{a}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}\right]$ , и при  $\varepsilon \rightarrow +0$  его протяженность может быть сколько угодно велика. Из этих соображений мы в данной работе рассмотрим уравнение (2) на всей числовой оси. Для упрощения обозначений пишем далее  $x$  вместо  $\xi$  и  $t$  вместо  $\tau$ . Нас интересует решение уравнения  $u_t = \kappa u_{xx} - f(u)$  типа бегущей квазиволны:

$$u(x, t) = v(x - Wt), \quad (3)$$

<sup>a</sup> E-mail: abkov@yandex.ru

$x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $t > 0$ , с условиями примыкания к стационарному уровню на бесконечности  $u(-\infty, t) = \varphi_1$ ,  $u(+\infty, t) = \varphi_3$ , где  $u(\pm\infty, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t)$ , так что вместо (2) получим уравнение

$$-Wv_x = \kappa v_{xx} - f(v) \quad (4)$$

с условиями на бесконечности

$$v(-\infty) = \varphi_1, \quad v(+\infty) = \varphi_3. \quad (5)$$

Выполним операцию понижения порядка:  $v_x = p$ ,  $v_{xx} = pp_v$ , получим

$$-Wp = \kappa pp_v - f(v). \quad (6)$$

Вместо условий стремления  $v(x)$  к стационарным значениям  $\varphi_{1,3}$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  дополнительные граничные условия для (6) зададим следующим образом:

$$\lim_{v \rightarrow \varphi_1 + 0} p(v) = +0, \quad \lim_{v \rightarrow \varphi_3 - 0} p(v) = +0, \quad (7)$$

причем  $p(v) > 0$  при  $\varphi_1 < v < \varphi_3$ . Разрешимость переопределенной системы обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (6) и двух условий (7) является условием для определения  $W$ .

Предполагаем, что выполнены следующие условия.

**У1.** Функция плотности источников задана в виде

$$f(u) = Cf_1(u)f_2(u)f_3(u), \quad (8)$$

$f_{1;2;3}(u)$  есть гладкие функции, уравнение  $f_j(u) = 0$  имеет единственный корень  $\varphi_j$ , причем  $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ ,  $f_j(u) < 0$  при  $u < \varphi_j$ ,  $f_j(u) > 0$  при  $u > \varphi_j$ .

**У2.** Функция  $f_2(u)$  имеет единственный простой корень  $\varphi_2$ , а функции  $f_{1;3}(u)$  имеют вид

$$f_j(u) = \text{sign}(\delta u_j) |\delta u_j|^{\theta_j} e^{-\gamma_j / \delta u_j^2}, \quad (9)$$

где  $\delta u_j = u - \varphi_j$ ,  $j \in \{1, 3\}$ .

**У3.** В данной работе мы предполагаем, что скорость перемещения фронта  $W$  уже найдена, и исследуем скорости выхода на стационарный уровень переднего и заднего участков фронта.

Тем самым выполнены условия, при которых возможно существование решений типа перемещающейся контрастной структуры (КС) [13].

Выразить решение уравнения (6) через элементарные функции для ФПИ вида (8) с обобщенной гауссовой функцией (1) в окрестности крайних корней  $\varphi_{1,3}$  не удается. Для того, чтобы построить класс правых частей, с одной стороны, достаточно широкий, чтобы в нем можно было найти функцию, достаточно близкую к физически оправданной модели (подробное описание моделей функции плотности источников можно найти в [14]), и, с другой стороны, такой, что уравнение (6) может быть решено аналитически, мы используем подход, близкий к работе [15]. Вместо задания  $f(v)$  и расчета  $W$  и затем  $v(x)$  мы сформулируем достаточно широкий параметрический класс функций  $p(v)$ , удовлетворяющих (7), и построим таким образом класс функций  $f(v)$ , для которых решение (6) находится в явном виде. Это позволит нам найти асимптотическое поведение переднего и заднего участков фронта КС уравнения (2) и показать, что они по-разному стремятся к предельному значению.

## 2. ПРОФИЛЬ ПЕРЕДНЕГО УЧАСТКА ФРОНТА КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ

### 2.1. Гауссово-степенная плотность

Пусть значение  $W$  задано,  $p(v)$  — также заданная функция, и рассмотрим (6) как выражение для  $f(v)$ :

$$f(v) = Wp + \kappa pp_v. \quad (10)$$

Рассмотрим профиль ВПС в окрестности передней части фронта, где  $v(x)$  примыкает к уровню  $\varphi_1$  в однородной среде. Пусть фронт дрейфует со скоростью  $W < 0$  (справа налево), причем  $v_x > 0$  при всех  $x$ . Пусть  $v = \varphi_1 + \omega$ ,  $\omega \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow -\infty$  и в некоторой окрестности значения  $\omega = 0$  верно равенство

$$f(\varphi_1 + \omega) = \frac{C_1}{|\omega|^{\theta_1}} \text{sign}(\omega) e^{-\gamma_1 / \omega^2}, \quad (11)$$

$C_1 > 0$ ,  $\theta_1 > 1$ . Тогда  $\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\kappa \omega_{xx} + W \omega_x - \frac{C_1}{|\omega|^{\theta_1}} \text{sign}(\omega) e^{-\gamma_1 / \omega^2} = 0. \quad (12)$$

Учитывая условие  $\omega \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow -\infty$ , получим из (10) для определения  $p(\omega)$  задачу Коши

$$\begin{cases} \kappa pp_\omega = -pW + \frac{C_1}{\omega^{\theta_1}} e^{-\gamma_1 / \omega^2}, \quad \omega > 0, \\ p(0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где мы заменили  $\text{sign}(\omega)$  на 1, а  $|\omega|$  на  $\omega$ , так как в (13) верно  $\omega > 0$ . Решение (13) будем строить в виде асимптотического ряда [16]. Заметим, что в (13) все слагаемые левой и правой части больше нуля, и запишем (13) в виде

$$\kappa p_\omega = -W + \frac{C_1 \omega^{-\theta_1} e^{-\gamma_1 / \omega^2}}{p}. \quad (14)$$

Так как  $p(\omega) \rightarrow +0$  при  $\omega \rightarrow +0$ , то (14) может быть верным только при условии  $\frac{C_1 \omega^{-\theta_1} e^{-\gamma_1 / \omega^2}}{p} \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow +0$ , поэтому  $\kappa p_\omega + W \rightarrow 0$  и приближение нулевого порядка найдем в виде

$$p_0(\omega) = \frac{-W\omega}{\kappa}. \quad (15)$$

Приближение первого порядка будем искать в виде

$$P_1(\omega) = p_0(\omega) + p_1(\omega), \quad (16)$$

где  $p_1(\omega)$  — гладкая функция, такая, что  $\lim_{\omega \rightarrow 0} p_1(\omega)/p_0(\omega) = 0$ . Подставим (16) в (13) и соберем слагаемые с одинаковыми степенями  $\omega$ , получим

$$\frac{dp_1}{d\omega} = \frac{1}{-W\omega} \frac{C_1}{\omega^{\theta_1}} e^{-\gamma_1 / \omega^2}, \quad (17)$$

так что частичная сумма асимптотического ряда первого порядка и ее производная будут равны соответственно

$$P_1(\omega) = \frac{-W\omega}{\kappa} + \frac{C_1}{-2\gamma_1 W} \omega^{2-\theta_1} e^{-\gamma_1 / \omega^2}, \quad (18)$$

$$\frac{dP_1}{d\omega} = \frac{-W}{\kappa} - \frac{C_1 \omega^{-1-\theta_1}}{W} \left( \frac{2-\theta_1}{2\gamma_1} \omega^2 + 1 \right) e^{-\gamma_1 / \omega^2}. \quad (19)$$

Если в (10) положить  $p(\omega) = P_1(\omega)$ , то найдем выражение для ФПИ:

$$f(\omega) = C_1 \omega^{-\theta_1} \left( 1 + \frac{2 - \theta_1}{2\gamma_1} \omega^2 \right) e^{-\gamma_1/\omega^2} + \frac{C_1^2 \kappa}{2\gamma_1 W^2} \omega^{1-2\theta_1} \left( 1 + \frac{2 - \theta_1}{2\gamma_1} \omega^2 \right) e^{-2\gamma_1/\omega^2} \quad (20)$$

и убедимся, что оно удовлетворяет (11) в рассматриваемой области:

$$f(\omega) = C_1 \omega^{-\theta_1} e^{-\gamma_1/\omega^2} (1 + o(1)). \quad (21)$$

Эти рассуждения, разумеется, нельзя считать доказательством того, что для решения задачи (13) действительно будет верно равенство

$$p(\omega) = P_1(\omega) + o(\omega^{2-\theta_1} e^{-\gamma_1/\omega^2}).$$

Однако мы строго обоснуем это утверждение. Используем метод дифференциальных неравенств. Пусть оператор  $\mathcal{L}$  действует на дважды дифференцируемую функцию  $\omega(x)$  по правилу

$$\mathcal{L}\omega = \kappa \omega_{xx} + W \omega_x - \frac{C_1}{|\omega|^{\theta_1}} \text{sign}(\omega) e^{-\gamma_1/\omega^2}, \quad (22)$$

где  $\theta_1 > 1$ , оператор  $\mathcal{M}$  действует на функцию  $p(\omega) \in C_1$ ,  $p(0) = 0$ , по правилу

$$\mathcal{M}p = \kappa p p_\omega + W p(\omega) - \frac{C_1}{|\omega|^{\theta_1}} \text{sign}(\omega) e^{-\gamma_1/\omega^2}. \quad (23)$$

Тогда задача (13) о движении контрастной структуры с заданной постоянной скоростью  $W$  и с граничными условиями примет вид

$$\mathcal{L}\omega(x) = 0, \quad \omega(-\infty) = +0, \quad \omega(x_0) = \omega_0 > 0, \quad (24)$$

последнее условие определяет сдвиг решения автономного уравнения (24) вдоль оси  $x$ . Мы найдем упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (24) и покажем, что точное решение заключено в коридоре между ними.

## 2.2. Нижнее решение в окрестности переднего участка фронта КС

Покажем, что нижнее решение задачи (24) можно построить исходя из модифицированной задачи первого порядка

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dx} = p(\tilde{\omega}), \quad \tilde{\omega}(\tilde{x}_1) = \tilde{\omega}_1, \quad (25)$$

$\tilde{\omega}_1 > 0$ , функция  $p(\tilde{\omega}) = P_1(\tilde{\omega})$  найдена из (18),  $\tilde{x}_1$  — константа. Решение задачи (25) в неявной форме имеет вид

$$x(\tilde{\omega}) = \tilde{x}_1 + \int_{\tilde{\omega}_1}^{\tilde{\omega}} \frac{dw}{-\frac{Ww}{\kappa} + \frac{C_1}{-2\gamma_1 W} \omega^{2-\theta_1} e^{-\gamma_1/\omega^2}}. \quad (26)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $\tilde{\omega}(x)$  найдена из (26). При любом  $\delta > 0$  найдется такое  $\tilde{x}_1$ , что  $\tilde{\omega}$  является нижним решением уравнения (12) на промежутке  $-\infty < x < \tilde{x}_1$ , причем  $\tilde{\omega}(x) \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Доказательство.** В самом деле, прямое вычисление  $\mathcal{L}\tilde{\omega}$  дает

$$\mathcal{L}\tilde{\omega} = \frac{C_1}{\tilde{\omega}^{\theta_1}} e^{-\gamma_1/\tilde{\omega}^2} > 0, \quad (27)$$

так что  $\tilde{\omega}(x)$  есть нижнее решение задачи (24) при любом  $\tilde{\omega}_1 > 0$ . Второе утверждение следует из расходимости интеграла (26) с нижним пределом 0. ■

Заметим, что  $\tilde{x}_1$  задает только сдвиг решения вдоль оси  $x$ . Любые две функции  $\tilde{\omega}'(x)$  и  $\tilde{\omega}''(x)$ , полученные из (25) при разных  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{\omega}_1$ , переходят одна в другую в результате преобразования сдвига. Выразить интеграл (26) через элементарные функции, вообще говоря, не удастся. Поэтому мы предложим другой способ построения нижнего решения. Нижнее решение задачи (24) можно выразить также через решение задачи Коши для уравнения второго порядка

$$\kappa \tilde{\omega}_{xx} + \tilde{W} \tilde{\omega}_x - \tilde{f}(\tilde{\omega}) = 0, \quad \tilde{\omega}(\tilde{x}) = \tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}_x(\tilde{x}) = \tilde{\omega}_2, \quad -\infty < x < \tilde{x}_1, \quad (28)$$

$$\text{где } \tilde{f}(\tilde{\omega}) = \frac{\check{C}_1}{\tilde{\omega}^{\theta_1}} e^{-\tilde{\gamma}_1/\tilde{\omega}^2}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha_1(x) = \tilde{\omega}(x) - \check{\delta}_1$ , где  $\tilde{\omega}(x)$  есть решение (28). Найдутся такие значения  $\check{W}$ , функция  $\check{f}(\tilde{\omega})$ ,  $\check{\omega}_1$ ,  $\check{\omega}_2$ ,  $\check{\delta}_1 > 0$ , что на промежутке  $-\infty < x < \check{x}$  будет верно утверждение  $\mathcal{L}\alpha_1 > 0$ .

**Доказательство.** Для доказательства возьмем  $\check{W} = W$ ,  $\check{\omega}_1 = \check{C}_1$ ,  $\check{\omega}_2 = \check{C}_1 \frac{-W}{\kappa}$ ,  $\check{f}(\tilde{\omega}) = 0$ . Тогда  $\kappa \tilde{\omega}_{xx} + W \tilde{\omega}_x = 0$ , поэтому

$$\mathcal{L}\alpha_1 = -\frac{\check{C}_1}{(\tilde{\omega} - \check{\delta}_1)^{\theta_1}} \text{sign}(\tilde{\omega} - \check{\delta}_1) e^{-\tilde{\gamma}_1/(\tilde{\omega} - \check{\delta}_1)^2} > 0$$

при  $\check{\delta}_1 > \tilde{\omega}_1$ . ■

Тогда другое нижнее решение можно найти также и в явной форме:

$$\alpha_1(x) = \check{C}_1 \tilde{\omega}_1 e^{-W(x - \check{x}_1)/\kappa} - \check{\delta}_1. \quad (29)$$

Легко доказать, что найдется такое  $\check{x}_1$ , такое  $\check{C}_1$ :  $0 < \check{C}_1 < 1$ , что нижнее решение задачи (24) можно найти из решения задачи Коши

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dx} = p(\tilde{\omega}), \quad \tilde{\omega}(x_0) = \check{C}_1 \omega(\check{x}_1). \quad (30)$$

Здесь  $p(\tilde{\omega})$  должна быть найдена из (13),  $\omega(x)$  есть точное решение задачи (24).

## 2.3. Верхнее решение в окрестности переднего участка фронта

Верхнее решение  $\beta_1(x)$  задачи (24) мы построим через решение задачи Коши

$$-\hat{W} \hat{\omega}_x = \kappa \hat{\omega}_{xx} - \hat{f}(\hat{\omega}), \quad \hat{\omega}(\hat{x}_1) = \hat{\omega}_1, \quad \hat{\omega}_x(\hat{x}_1) = \hat{\omega}_2, \quad -\infty < x < \hat{x}_1. \quad (31)$$

**Теорема 3.** Пусть  $\beta_1(x) = \hat{\omega}(x) + \hat{\delta}_1$ . Найдутся такие значения  $\hat{W}$ , функция  $\hat{f}(\hat{\omega})$ ,  $\hat{\omega}_1$ ,  $\hat{\omega}_2$ ,  $\hat{\delta}_1 \geq 0$ , что на промежутке  $-\infty < x < \hat{x}_1$  будет верно утверждение  $\mathcal{L}\beta_1 < 0$ .

**Доказательство.** Прямая проверка показывает, что утверждение теоремы верно для  $\hat{W} = W$ ,  $\hat{\omega}_1 = \hat{C}_1$ ,  $\hat{\omega}_2 = \hat{C}_1 \frac{-W}{\kappa}$ ,  $\hat{f}(\hat{\omega}) = 0$ ,  $\hat{\delta}_1 = 0$ , причем  $\hat{C}_1 > 0$ . В этом случае  $\mathcal{L}\hat{\omega} = -\frac{C_1}{\hat{\omega}^{\theta_1}} e^{-\gamma_1/\hat{\omega}^2} < 0$ . ■

В отличие от нижнего решения, где требовалось  $\hat{\delta}_1 > 0$ , для верхнего решения годится также  $\hat{\delta}_1 = 0$ . Таким образом, одним из верхних решений является показательная функция

$$\hat{\omega}(x) = \hat{C}_1 \hat{\omega}_1 e^{-W(x-\hat{x}_1)/\kappa}. \quad (32)$$

### 3. РЕШЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДНЕГО УЧАСТКА ФРОНТА

Рассмотрим теперь профиль ВПС в окрестности заднего участка фронта КС, где  $u \rightarrow \varphi_3$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Пусть  $u(x, t) = \varphi_3 + w(x, t)$  и в некоторой окрестности значения  $w = 0$  верно равенство

$$f(\varphi_3 + w) = \frac{C_3}{|w|^{\theta_3}} \text{sign}(w) e^{-\gamma_3/w^2}, \quad C_3 > 0. \quad (33)$$

Решение будем искать в виде бегущей квазиволны:  $w(x, t) = \omega(x - Wt)$ , причем  $W < 0$ . Тогда основное уравнение (4) примет вид

$$W\omega_x + \kappa\omega_{xx} + \frac{C_3}{(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2} = 0, \quad (34)$$

$\omega(x_{30}) = \omega_{30}$  (определяет сдвиг решения автономного уравнения вдоль оси  $x$ ) и  $\omega(+\infty) = 0$  (условие замыкания к верхнему корню), причем теперь  $\omega < 0$ . Понижение порядка  $\omega_x = p$  с учетом условия  $\omega < 0$  приводит к задаче

$$\begin{cases} -\kappa p p_\omega - Wp = \frac{C_3}{(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2}, \\ p(0) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Решение задачи (35) будем опять искать в виде асимптотического ряда. Главный член найдем из уравнения  $-Wp(\omega) = \frac{C_3}{(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2}$ :

$$p_0(\omega) = -\frac{C_3}{W(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2}. \quad (36)$$

Если в (10) принять  $p(\omega) = p_0(\omega)$ , то найдем точное выражение ФПИ нулевого порядка:

$$\begin{aligned} f_0(\omega) &= -\frac{C_3}{(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2} \times \\ &\times \left( 1 - \frac{C_3 \kappa}{W^2 (-\omega)^{\theta_3+3}} (\theta_3 \omega^2 + 2\gamma_3) e^{-\gamma_3/\omega^2} \right) = \\ &= \frac{-C_3}{(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь найдем профиль заднего участка фронта из уравнения

$$(-W) \frac{d\omega}{dx} = \frac{C_3}{(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2}, \quad (38)$$

решение которого в неявной форме можно записать в виде

$$\int \frac{(-\omega)^{3+\theta_3}}{2\gamma_3} d(e^{\gamma_3/\omega^2}) = (x - x_3) \frac{C_3}{-W}, \quad (39)$$

$x_3$  — параметр сдвига. Из полученного выражения видно, что выразить задний участок фронта через элементарные функции для произвольного значения параметра  $\theta_3$ , вообще говоря, не удастся. Для того, чтобы получить представление о том, какой вид может иметь задний участок фронта, возьмем  $\theta_3 = -3$ , так что

$$p_0(\omega) = \frac{C_3}{-W} (-\omega)^3 e^{-\gamma_3/\omega^2}. \quad (40)$$

Тогда общее решение задачи (34) найдем из (39):

$$\omega(x) = V_3(x - x_3),$$

где

$$V_3(x) = -\sqrt{\frac{\gamma_3}{\ln\left(\frac{2\gamma_3 C_3 x}{-W}\right)}}. \quad (41)$$

Найдем плотность источников заднего участка фронта для частного случая  $\theta_3 = -3$ :

$$\begin{aligned} f_0(\omega) &= C_3 \omega^3 e^{-\gamma_3/\omega^2} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{3C_3 \kappa \omega^2}{W^2} e^{-\gamma_3/\omega^2} + \frac{2C_3 \gamma_3 \kappa}{W^2} e^{-\gamma_3/\omega^2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Очевидно, что  $f_0(\omega) = C_3 \omega^3 e^{-\gamma_3/\omega^2} (1 + o(1))$ . При других значениях  $\theta_3$  решение имеет также асимптотику в виде композиции степенной функции и логарифмической.

Далее будем строить приближение первого порядка для решения задачи (35) по аналогии с тем, как это было сделано раньше для переднего участка. В результате найдем частичную сумму первого порядка:

$$P_1(\omega) = -\frac{C_3}{W(-\omega)^{\theta_3}} e^{-\gamma_3/\omega^2} - \frac{2C_3^2 \gamma_3 \kappa}{W^3 \omega^{2\theta_3+3}} e^{-2\gamma_3/\omega^2}. \quad (43)$$

Можно доказать (детали аналогичны исследованию переднего участка фронта), что упорядоченная пара верхнего и нижнего решений задачи (34) на промежутке  $x_3 < x < +\infty$  может быть построена в виде

$$\beta_3(x) = V_3(x - \hat{x}_3) + \hat{r}_3, \quad \alpha_3(x) = V_3(x - \check{x}_3) - \check{r}_3, \quad (44)$$

$\hat{r}_3 > 0$ ,  $\check{r}_3 > 0$ ,  $\hat{x}_3 < \check{x}_3$ . Таким образом, задний участок фронта имеет степенно-логарифмический характер, заданный выражением (41).

### 4. СЕМЕЙСТВО ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ

Теперь мы можем дать описание класса функций  $f(u)$ , для которых мы указываем точное решение уравнения (6) и для которых имеет место гауссова зависимость плотности источников от концентрации в окрестности корней  $\varphi_{1,3}$ . Разобьем область определения функции  $f(u)$  на три промежутка:



$U_1 = [\varphi_1 - \delta\varphi_1, \varphi_1 + \delta\varphi_1], U_2 = [\varphi_1 + \delta\varphi_1, \varphi_3 - \delta\varphi_3], U_3 = [\varphi_3 - \delta\varphi_3, \varphi_3 + \delta\varphi_3]$ , причем  $\varphi_1 + \delta\varphi_1 < \varphi_3 - \delta\varphi_3$ . Пусть  $p(u) = q_j(u)$  при  $u \in U_j, j \in \{1; 2; 3\}$ . Функцию  $q_1(u)$  зададим явно на промежутке  $U_1$  выражением (18)

$$q_1(u) = \frac{-W}{\kappa}(u - \varphi_1) + \frac{C_1}{-2\gamma_1 W}(u - \varphi_1)^{2-\theta_1} e^{-\gamma_1/(u - \varphi_1)^2}, \quad (45)$$

на  $U_3$  зададим  $q_3(u)$  выражением (43)

$$q_3(u) = \frac{C_3}{W|u - \varphi_3|^{\theta_3}} \text{sign}(u - \varphi_3) e^{-\gamma_3/(u - \varphi_3)^2} - \frac{2C_3^2 \gamma_3 \kappa}{W^3 |u - \varphi_3|^{2\theta_3 + 3}} e^{-2\gamma_3/(u - \varphi_3)^2}, \quad (46)$$

на  $U_2$  зададим  $q_2(u)$  так, чтобы были выполнены условия гладкого сопряжения в точках  $\hat{u}_1 = \varphi_1 + \delta\varphi_1$  и  $\check{u}_3 = \varphi_3 - \delta\varphi_3$ :  $q_2(\hat{u}_1) = q_1(\hat{u}_1), (q_2)_u(\hat{u}_1) = (q_1)_u(\hat{u}_1), q_2(\check{u}_3) = q_3(\check{u}_3), (q_2)_u(\check{u}_3) = (q_3)_u(\check{u}_3)$ , причем единственный корень  $\varphi_2$  уравнения  $\kappa(q_2)_u + W = 0$ , которое равносильно уравнению  $f(u) = 0$  в соответствии с (10), должен быть расположен на  $U_2$ , причем в этой точке функция (10) меняет знак:  $\kappa(q_2)_v + W > 0$  на  $U_2^{(-)} = (\varphi_1 + \delta\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\kappa(q_2)_v + W < 0$  на  $U_2^{(+)} = (\varphi_2, \varphi_3 - \delta\varphi_3)$ .

После этого найдем  $f(u)$  из (6), (10). Условия на  $p(u)$  достаточно слабые, так что имеется широкий класс, из которого можно выбрать функцию, близкую к практически оправданной.

Теперь мы можем сформулировать теорему, уточняющую ранее доказанные теоремы 1–4 и устанавливающую упорядоченность верхнего, точного и нижнего решений в окрестности крайних корней.

**Теорема 4.** Пусть  $\omega(x)$  есть точное решение (4) с условиями на бесконечности (5). Пусть  $0 < \hat{C}_1 < \omega(\hat{x}_1)$  и  $\hat{C}_1 > \omega(\hat{x}_1)$ . Тогда функции  $\alpha_1(x)$  и  $\beta_1(x)$ , полученные из (28) и (31), на некотором промежутке  $-\infty < x < x_1$  являются нижним и верхним решениями задачи (24), причем они и точное решение задачи (24) удовлетворяют условию упорядоченности  $\alpha_1(x) < \omega(x) < \beta_1(x)$  и тем самым образуют упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (24) на промежутке  $-\infty < x < x_1$ . То же верно для функций  $\alpha_3(x)$  и  $\beta_3(x)$  (44) на промежутке  $x_3 < x < +\infty$ .

Тем самым мы установили профиль переднего и заднего участков фронта.

Пример полученной из (10) с учетом (45), (46) функции плотности источников показан на рис. 1. Мы использовали при моделировании выражения (18), (19), (20) в области  $G_1 = (-\infty; -0,7)$

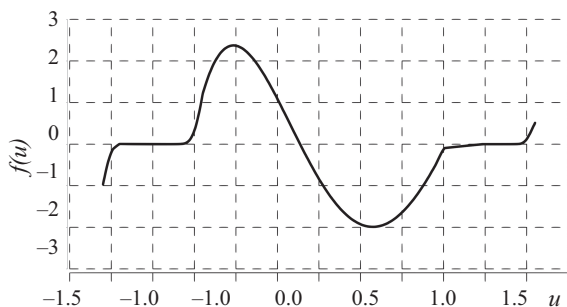


Рис. 1. Функция плотности источников  $f(u)$  для контрастной структуры с бесконечным вырождением двух крайних корней

переменной  $v$ , причем  $W = -1/10, \kappa = 1, \varepsilon = 1/16, C_1 = 1/10, \gamma_1 = 1/5$ . Эти параметры были выбраны так, чтобы обеспечить достаточное разрешение на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ . В области  $G_3 = (0,7; +\infty)$  мы использовали (43) и затем (10) с теми же  $W$  и  $\varepsilon$ , причем  $\theta_3 = -3$  и  $C_3 = 20, \gamma_3 = 1/3$ . Далее использовали методику, изложенную в разд. 4, в области  $G_2 = [-0,7; 0,7]$ . Для гладкого сопряжения функции  $f$  на границах областей  $G_{1,2}$  и  $G_{2,3}$  использовали кубическую функцию, четыре коэффициента которой находились сопряжением функции  $f$  и ее производной в двух точках  $v = \pm 0,7$ .

### 5. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Помимо аналитического исследования профиля ВПС методом разложения в асимптотический ряд, мы провели компьютерное моделирование решения уравнения (2) методом частичной дискретизации. Полудискретная модель имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{du_m}{dt} + V \varepsilon \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} = \\ = \varepsilon^2 \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} - f(u_m), \\ m \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \frac{r_1 u_1 - r_0 u_0}{h} = 0, \quad \frac{r_n u_n - r_{n-1} u_{n-1}}{h} = 0, \end{cases} \quad (47)$$

коэффициенты  $r_{0,1,n-1,n}$  получаются известным [17] способом использования уравнения (47) для повышения точности аппроксимации граничных условий второго рода. Если принять  $r_j = 1$ , то точность соблюдения граничных условий будет  $O(h)$ , а при соответствующем выборе  $r_j$  точность можно поднять до  $O(h^2)$ . Вычисление  $r_j$  описывать не будем, так как этот процесс известен в деталях. Система обыкновенных нелинейных уравнений (47) относится к классу жестких систем, она решалась численно методом, подробно изложенным в работе [18]. Соответствующий код, оснащенный всеми необходимыми атрибутами контроля точности, автоматического выбора шага по пространственной и временной переменным, дробления шага в окрестности переходного слоя, написан на языке C++ Microsoft Visual Studio.

Мы использовали также граничные условия типа условий излучения [19] для того, чтобы можно было ограничиться исследованием региона, который примыкает к области ВПС. Эти условия исходят из наличия известных нам верхнего и нижнего решений уравнения (6):

$$\begin{cases} \left( \frac{dw}{dx} - \frac{-W}{\kappa} \right) \Big|_{x_a} = 0, \\ \left( \frac{dw}{dx} - \frac{C_3}{-W} (-3\omega^2 - 2\gamma_3) e^{-\gamma_3/\omega^2} \right) \Big|_{x_b} = 0, \end{cases} \quad (48)$$

причем  $x_a, x_b$  выбраны так, чтобы  $x_b - x_a \gg d$ ,  $d$  есть толщина ВПС и область ВПС располагалась между  $x_a$  и  $x_b$ . Условия (48) используются вместо условий Дирихле при решении задачи (47) методом частичной дискретизации.

Приведем пример построения точного решения уравнения (10). На рис. 2, а представлен профиль ВПС

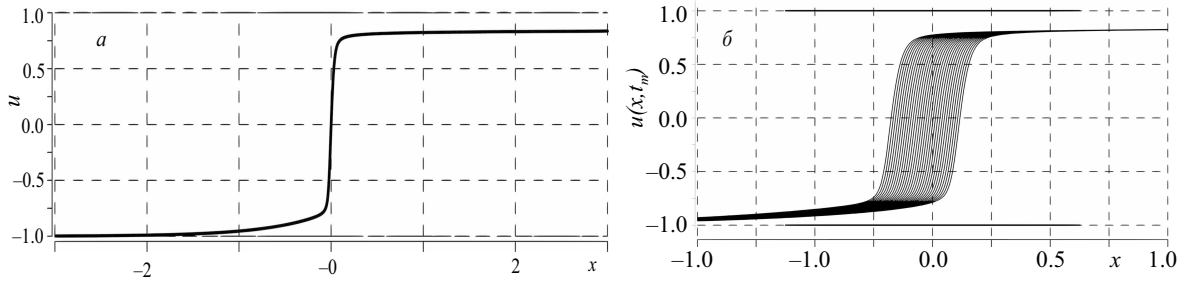


Рис. 2. Профиль внутреннего переходного слоя  $u(x)$  (а) и семейство графиков перемещающегося ВПС  $u(x, t_m)$  для серии значений  $t_m = t_0 + m\Delta t$  (б) для контрастной структуры с бесконечным вырождением двух крайних корней

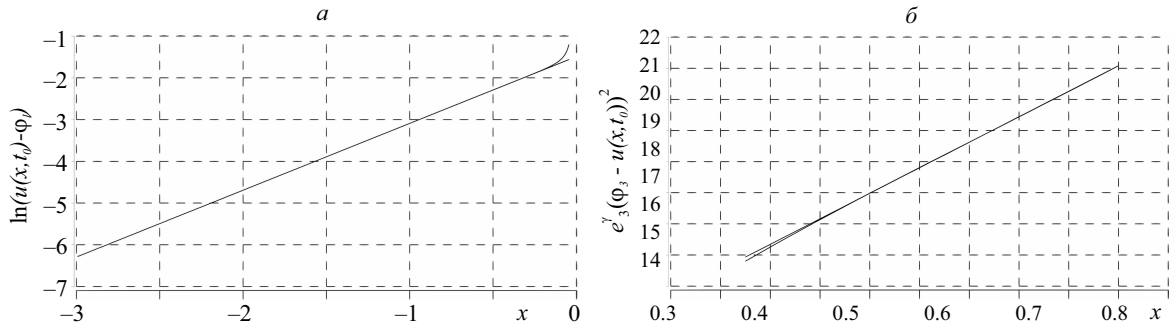


Рис. 3. Исследование точности решения на переднем участке фронта ВПС (а) и на заднем участке фронта ВПС (б) для контрастной структуры с бесконечным вырождением двух крайних корней

для контрастной структуры, два крайних корня которой имеют бесконечный порядок вырождения, средний корень простой, ФПИ описана в конце предыдущего раздела. На рис. 2,б показано семейство графиков  $u(x, t)$  для множества значений  $t_m = t_0 + m \Delta t$ ,  $\Delta t = 1/8$ , на рисунке показан промежуток времени протяженностью  $T = 32 \Delta t = 4$ , причем начальный момент времени выбран так, чтобы закончился процесс установления фронта КС (в данной работе тематика переходного процесса не рассматривается). Решение получено методом частичной дискретизации эволюционного уравнения (2) и численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить заметное на графиках различие скорости стремления решения к уровню насыщения для переднего и заднего участков фронта ВПС. В самом деле, перемещающийся влево фронт располагается на рис. 2,б по центру графического окна ( $x = 0$ ), на левой границе ( $x = -1$ )  $u(x, t) - \varphi_1 \approx 0,05$ , на правой границе ( $x = +1$ )  $\varphi_3 - u(x, t) \approx 0,2$ .

Теперь исследуем точность решения на переднем и заднем участках фронта для контрастной структуры с бесконечной степенью вырождения двух крайних корней. На рис. 3,а по горизонтальной оси отложена координата  $x$ , по вертикальной оси использован логарифмический масштаб, показана величина  $\ln(u(x, t^*) - \varphi_1)$ , причем функция  $u(x, t)$  получена решением задачи Коши для уравнения  $\varepsilon u_t = \kappa \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$  с граничными условиями примыкания к уровням насыщения. Начальные условия при  $t = t_0$  выбраны в виде монотонной функции, удовлетворяющей условиям примыкания к уровням насыщения. Момент времени  $t^*$  для сравнения выбран так, чтобы завершился процесс установления профиля движущегося фронта. Показано также точное решение уравнения (13), построенное в том же логарифмическом масштабе. Линейная функция на рис. 3,а

соответствует экспоненциальному стремлению решения к нижнему корню.

На рис. 3,б по горизонтальной оси отложена координата  $x$ , по вертикальной — (1) функция  $e^{\gamma_3/\omega^2(x, t^*)}$ , причем функция  $\omega(x, t) = \varphi_3 - u(x, t)$  получена решением задачи Коши для уравнения  $\varepsilon u_t = \kappa \varepsilon^2 u_{xx} - f(u, x)$  с граничными условиями примыкания к уровням насыщения на бесконечности; (2) линейная функция  $(x - x_3) \frac{2\gamma_3 C_3}{-W}$ , значение  $x_3$  (заранее неизвестное) было найдено методом наименьших квадратов. Заметим, что при точном выполнении (41) оба графика должны быть совпадающими линейными функциями. Отличие графиков на левом фланге рисунка связано с приближением к области ВПС, где асимптотическая формула (41) некорректна.

### 6. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть  $v(x)$  есть точное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям примыкания на бесконечности (5), параметр  $W$  определен из условия существования такого решения. Тогда функция  $u(x, t) = v(x - Wt)$  — точное решение уравнения (2). Однако это не вполне характеризует поведение системы, описываемой уравнением (2), так как, вообще говоря, решение квазилинейного уравнения может не быть устойчивым по отношению к малому возмущению параметров задачи или начальных условий. Таким образом, обоснование физической корректности решения (3) будет состоять в том, что мы покажем, что если начальные условия  $\psi_0(x)$  задачи (2) мало отличаются от  $v(x - x_0)$ , а точнее, заключены между нижним и верхним решениями  $\alpha(x - x_0)$  и  $\beta(x - x_0)$ , то точное решение задачи (2) также мало отличается от  $v(x - x_0 - Wt)$ . Мы используем методику, разработанную в [13], основанную на построении нижнего

и верхнего решений  $\alpha(x, t, \varepsilon)$  и  $\beta(x, t, \varepsilon)$  эволюционного уравнения (2). Пусть область определения дифференциального оператора

$$\mathcal{N}[u] = -\varepsilon u_t + \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u) \quad (49)$$

включает все дважды непрерывно дифференцируемые в области  $\Pi$ , непрерывные в  $\bar{\Pi}$  функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи (2). Функции  $\alpha$  и  $\beta$  построим так, чтобы выполнялись условия знакоопределенности  $\mathcal{N}[\alpha] > 0$ ,  $\mathcal{N}[\beta] < 0$  и упорядоченности  $\alpha < \beta$  в  $\Pi$ . Покажем, что  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбрать в виде

$$\alpha(x, t) = v(\xi_\alpha) - \varepsilon^\mu r, \quad \beta(x, t) = v(\xi_\beta) + \varepsilon^\mu r, \quad (50)$$

где  $v$  есть точное решение (4), построенное ранее в явном виде,

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha, \beta} &= \frac{x - x_{\alpha, \beta}^*(t)}{\varepsilon}, & x_\alpha^*(t) &= x_0^*(t) + \varepsilon^\gamma q t, \\ x_\beta^*(t) &= x_0^*(t) - \varepsilon^\gamma q t, & x_0^*(t) &= x_{00}^* + W t, \end{aligned} \quad (51)$$

константы  $q > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\mu > 0$  мы найдем в процессе построения. Найдем результат действия оператора  $\mathcal{N}$  на функцию  $\beta$  из (50):

$$\mathcal{N}[\beta] = W v_{\xi_\beta} - \varepsilon^\gamma q v_{\xi_\beta} + \kappa v_{\xi_\beta \xi_\beta} - f(v(\xi_\beta) + \varepsilon^\mu r). \quad (52)$$

Покажем, что выполняются условия знакоопределенности оператора и условия упорядоченности. Проведем доказательство для верхнего решения, для нижнего решения доказательство аналогично. Так как  $f(\beta) = [f(v(\xi_\beta) + \varepsilon^\mu r) - f(v(\xi_\beta))] + f(v(\xi_\beta))$ , то найдется  $\zeta$  такое, что  $0 < \zeta < 1$  и  $f(\beta) = f(v(\xi_\beta)) + f_v(v(\xi_\beta) + \zeta \varepsilon^\mu r) \varepsilon^\mu r$ , поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\beta] &= [W v_{\xi_\beta} + \kappa v_{\xi_\beta \xi_\beta} - f(v(\xi_\beta))] - \\ &\quad - \varepsilon^\gamma q v_{\xi_\beta} - f_v(v(\xi_\beta) + \zeta \varepsilon^\mu r) \varepsilon^\mu r. \end{aligned}$$

Из (4) следует, что выражение в скобках равно нулю, поэтому

$$\mathcal{N}[\beta] = -\varepsilon^\gamma q v_{\xi_\beta} - f_v(v(\xi_\beta) + \zeta \varepsilon^\mu r) \varepsilon^\mu r. \quad (53)$$

В области определения функции  $f_v(v)$  выделим три подобласти:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\varphi_1 - \delta\varphi_1 \leq v \leq \varphi_1 + \delta\varphi_1\}, \\ G_2 &= \{\varphi_1 + \delta\varphi_1 \leq v \leq \varphi_3 - \delta\varphi_3\}, \\ G_3 &= \{\varphi_3 - \delta\varphi_3 \leq v \leq \varphi_3 + \delta\varphi_3\}. \end{aligned}$$

Покажем, что параметры (50) можно выбрать так, что  $\mathcal{N}[\alpha] > 0$  и  $\mathcal{N}[\beta] < 0$  на каждой из областей  $G_{1;2;3}$ .

**Теорема 5.** Для любых  $\theta_1, \theta_3, \gamma_1 > 0$  и  $\gamma_3 > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  найдутся значения  $r > 0, q > 0, \mu > 0, \gamma > 0$  такие, что  $\mathcal{N}[\beta] < 0, \mathcal{N}[\alpha] > 0$  и  $\alpha < \beta$  в  $\Pi$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\varepsilon^\mu r = 2 \Delta v$ , тогда в  $G_1$  из (52) найдем

$$\mathcal{N}[\beta] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - [f(v(\xi) + 2 \Delta v) - f(v(\xi))]. \quad (54)$$

Очевидно,  $-\varepsilon^\gamma q v_\xi \leq -\varepsilon^\gamma q D_1 \leq 0$ , где  $D_1 = \frac{\partial v}{\partial \xi} \geq 0$ , производная берется в некоторой точке области  $G_1$ .

Найдем минимальное значение второго слагаемого (54) при заданном фиксированном значении  $\Delta v$  и всех возможных значениях  $v \in G_1$ . Из (33) следует, что  $\min(f(v + 2 \Delta v) - f(v)) \geq f(\varphi_1 + \Delta v) - f(\varphi_1 - \Delta v)$ . Поэтому

$$f(v(\xi) + 2 \Delta v) - f(v(\xi)) \geq 2 \mu \varepsilon^{-1/\Delta v^2} = 2 \mu \varepsilon^{-4/(\varepsilon^{2\mu} r^2)}. \quad (55)$$

Тогда в  $G_1$  получим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\beta] &\leq -\varepsilon^\gamma q D_1 - 2 \mu \varepsilon^{-1/\Delta v^2} = \\ &= -\varepsilon^\gamma q D_1 - 2 \mu \varepsilon^{-4/(\varepsilon^{2\mu} r^2)} < 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Аналогично можно построить оценку и в  $G_3$  :  $\mathcal{N}[\beta] < 0$ . Рассмотрим теперь  $\mathcal{N}[\beta]$  в  $G_2$ . Представим (54) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\beta] &= -\varepsilon^\gamma q v_\xi - [f(v(\xi) + \Delta v(\xi)) - f(v(\xi))] = \\ &= -\varepsilon^\gamma q v_\xi - f_v(v^*) \varepsilon^\mu r, \end{aligned} \quad (57)$$

где  $v^*$  – некоторое значение  $v$  из промежутка  $v(\xi) < v^* < v(\xi) + \Delta v(\xi)$ . Заметим, что  $v_\xi$  вычисляется для некоторого значения  $\xi$ , принадлежащего  $G_2$ , поэтому найдется такое число  $V_2 > 0$ , что  $v_{x^*} > V_2$  в  $G_2$ , мы использовали монотонность функции  $v(\xi)$  и условие отделенности области  $G_2$  от корней  $\varphi_{1;3}$  функции  $f$ . Запишем оценку первого слагаемого  $-\varepsilon^\gamma q v_\xi \leq -\varepsilon^\gamma q D_2$  и оценку второго  $|f_v(v^*) \varepsilon^\mu r| \leq M \varepsilon^\mu r$ , где  $M = \max(f_v) > 0$  вычисляется по всей области  $G_2$ ,  $M > 0$ ; из условий задачи следует, что это некоторое положительное число. Положим  $\mu = \gamma, q > r M / D_2$ . Тогда

$$\mathcal{N}[\beta] \leq -\varepsilon^\gamma q D_2 + M \varepsilon^\mu r < 0. \quad (58)$$

Также построим нижнее решение  $\alpha$  и докажем для него условие  $L[\alpha] > 0$ . ■

Теперь из результатов [9] следует

**Теорема 6.** Для задачи (2) существует упорядоченная пара нижнего и верхнего решений  $\alpha(x, t, \varepsilon)$  и  $\beta(x, t, \varepsilon)$  соответственно. Если начальное условие заключено между ними, т. е.  $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^0(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$ , то (2) имеет единственное классическое решение  $u(x, t, \varepsilon)$ , причем

$$\alpha(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon) \quad (59)$$

для всех  $x \in [a, b]$  и  $t \in [0, T)$ .

Мы показали, что для уравнения реакции–диффузии, функция плотности источников которого имеет два крайних корня с бесконечными степенями вырождения, существует решение типа контрастной структуры, причем передний и задний участки фронта принципиально по-разному зависят от координаты. На заднем участке фронта стремление к стационарному уровню более медленное (степенно-логарифмическое), чем на переднем (экспоненциальное). Этот вывод имеет большое значение в практике моделирования реакции адвекции-диффузии, в том числе для реакции горения.

Авторы благодарят В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. **4**, N 3. С. 799.
2. Butuzov V. F., Vasileva A. B. // Singularly Perturbed Problems with Boundary and Interior Layers: Theory and Application. New York: John Wiley Sons, 2007.
3. Бутузов В. Ф. // ЖВМиМФ. 2011. **51**, № 1. С. 44.
4. Butuzov V. F. // Mathematical Notes. 2016. **99**, N 2. P. 36.
5. Бутузов В. Ф. // Вестник кибернетики. 2017. **1**, № 25. С. 18.
6. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р. // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. **23**, № 3. С. 247.
7. Бутузов В. Ф., Бычков А. И. // Чебышевский сборник. 2015. **16**, № 4. С. 41.
8. Butuzov V. F., Bychkov A. I. // Computational mathematics and mathematical physics. 2016. **56**, N 4. P. 593.
9. Pao C. V. // Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum, 1992.
10. Бутузов В. Ф. // Дифференциальные уравнения. 2015. **51**, № 12. С. 1593.
11. Butuzov V. F. // Differential Equations. 2015. **51**, N 12. P. 1593.
12. Бутузов В. Ф., Белошапко В. А. // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. **23**, № 5. С. 515.
13. Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. // ЖВМиМФ. 2010. **50**, № 2. С. 276.
14. Оран Э., Борис Дж. // Численное моделирование реагирующих потоков. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
15. Альшин А. Б., Корпусов М. О., Юшков Е. В. // ЖВМиМФ. 2008. **48**, № 5. С. 808.
16. Найфе А. Х. // Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
17. Самарский А. А. // Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
18. Быков А. А. // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. **23**, № 3. С. 256.
19. Свешников А. Г. // ЖВМиМФ. 1963. **3**, № 2. С. 314.

### Exact Solutions of the Equations of a Nonstationary Front with Equilibrium Points of an Infinite Order of Degeneracy

A. A. Bykov<sup>a</sup>, K. E. Ermakova

*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: <sup>a</sup>abkov@yandex.ru.*

A family of exact solutions for a quasilinear evolution equation that describes the reaction–diffusion process in a medium with an infinite order of degeneracy of the two extreme roots of the source density function is found. Several terms of the formal asymptotic series are constructed for solving the type of a contrast structure that represents the solution of the initial-boundary value problem in a spatially homogeneous medium for the case of a Gaussian source density function in the neighborhood of the extreme roots. The correctness of the partial sum of the asymptotic series using the method of differential inequalities is justified. It is shown that the leading edge of the moving front of the contrast structure is exponential and the trailing edge of the front is represented by a much more slowly decreasing function, which is expressed by a power function of the logarithm of the coordinate for the Gaussian source density function.

*Keywords:* nonlinear differential equations, asymptotic methods, contrast structure, differential inequalities.

PACS: 02.30.Jr.

*Received 20 March 2018.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **73**, No. 6. Pp. 583–591.

#### Сведения об авторах

1. Быков Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33; e-mail: [abkov@yandex.ru](mailto:abkov@yandex.ru).
2. Ермакова Кристина Евгеньевна — аспирант; e-mail: [kristinaermakova1908@gmail.com](mailto:kristinaermakova1908@gmail.com).