Оптические свойства апериодических тонкослойных структур: эффективная оптическая толщина

А. В. Козарь[a]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Статья поступила 22.03.2018, принята к публикации 28.03.2018.

Получены и проанализированы простые аналитические соотношения устанавливающие связь между структурными свойствами апериодических тонкослойных структур и фазовой компонентой коэффициента отражения. Введено понятие и определена аналитически эффективная оптическая толщина апериодической структуры. Для анализа волновых свойств апериодических тонкослойных структур со слабой пространственной неоднородностью показателя преломления предложена в качестве эквивалентной двухслойная тонкослойная модель, позволяющая существенно упростить аналитические соотношения для анализа волновых свойств рассматриваемого класса многослойных структур. Правомерность полученных результатов проиллюстрирована на примере численного эксперимента.

Ключевые слова: многослойные структуры, интерференция.
УДК: 535.4. PACS: 42.25.-p.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие известных и поиск новых методов и подходов при решении задач анализа и синтеза многослойных интерференционных структур является одной из актуальных задач современной оптики и радиофизики. Это обусловлено как фундаментальным интересом — возможностью обнаружения новых свойств и явлений как в природных, так и в искусственно структурированных средах, так и возможностью решения целого спектра прикладных задач приема, локации, преобразования и управления волновыми излучениями и диагностики пространственно неоднородных сред и многослойных структур [1–9].

Развитая к настоящему времени теория анализа и синтеза нового класса многослойных интерференционных структур — тонкослойных интерференционных структур (ТИС) с двух-, трех- и многослойным периодом показала на наличие присущих только этим структурам целого ряда уникальных структурных и волновых свойств как расширяющих представления о физике волновых процессов в слоистых средах, так и дающих новые возможности при решении задач прикладной оптики и радиофизики [10–24]. Развитие этой теории на апериодические структуры с произвольным (случайным) характером пространственной неоднородности показателя преломления не только имеет академический интерес, но и позволяет найти связь и обобщить структурные и волновые свойства сред со случайным характером формирования пространственной неоднородности показателя преломления, что, например, имеет существенное значение при синтезе многослойных четвертьволновых просветляющих покрытий, зеркал, фильтров и т. п., поскольку в силу различных причин (наличие пустот в материале пленки и их нерегулярный характер) наносимые слои пространственно неоднородны и в связи с этим возникает проблема при определении их волновых свойств на заданной длине волны.

В работе [23] аналитически решена задача нахождения связи структурных свойств тонкослойных апериодических структур с такой их волновой характеристикой, как модуль коэффициента отражения. Настоящая работа является ее логическим продолжением, устанавливая на основании полученных аналитических соотношений, связь структурных свойств апериодических тонкослойных структур с фазовой компонентой коэффициента отражения и присущие этой связи свойства и особенности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим, как и в [23], взаимодействие плоской монохроматической волны с некоторой многослойной структурой в предположении, что в обрамляющих ее средах и слоях структуры поглощение отсутствует, падение волны нормально к плоскости ее слоев, частотная дисперсия показателей преломления слоев структуры на рассматриваемом интервале длин волн пренебрежимо мала. Рассмотрение проведем на интервале длин волн, на котором оптические толщины слоев структуры существенно меньше четвертьволновых, а суммарная оптическая толщина всей структуры близка к четвертьволновой.

2. ЭФФЕКТИВНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА

Пусть плоская монохроматическая волна падает из полубесконечной среды с показателем преломления n_L на многослойную структуру, состоящую из N плоскопараллельных слоев с показателями преломления n_j и геометрическими толщинами d_j ($j \in [1, N]$) и расположенную за ней полубесконечную среду с показателем преломления n_S. Решением задачи в такой постановке является нахождение в аналитическом виде связи структурных параметров многослойной структуры (величин и пространственного расположения d_j и n_j) и ее волновых характеристик (на заданной длине волны модуля и фазы коэффициента отражения). При решении воспользуемся хорошо зарекомендовавшей себя методикой «нулевого отражения» [10–13], а именно будем искать решение при условии, что рассматриваемая система (многослойная структура и граничные среды) на некоторой длине волны находится в согласованном режиме, т. е. коэффициент отражения волны от структуры и расположенной за ней средой с показателем преломления n_S равен нулю. Тогда искомое

[a] E-mail: avk@phys.msu.ru

решение представляет собой нахождение эффективного показателя преломления структуры n_{eff}, определяемого ее структурными параметрами и определяющего величину $n_S = n_{\text{eff}}$, а также длины волны, на которой при этом фаза коэффициента отражения от структуры, граничащей слева и справа с полубесконечными средами с показателем преломления n_L, равна π. Первая часть задачи была решена в [23], где были найдены и проанализированы аналитические соотношения определяющие величину n_{eff}.

Решение второй части задачи, по существу, сводится к нахождению в аналитическом виде зависимости длины волны, удовлетворяющей указанному выше фазовому условию, от структурных параметров рассматриваемой системы.

Как было показано в [10–13], все решения такой задачи могут быть найдены из системы двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} {}^N M_{11}{}^N M_{21} - {}^N M_{22}{}^N M_{12} n_{\text{eff}}^2 = 0, \\ {}^N M_{22}{}^N M_{21} - {}^N M_{11}{}^N M_{21} n_L^2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ${}^N M_{lm}$ — элементы характеристической матрицы N-слойной структуры:

$${}^N M = \prod_{j=1}^{N} M_j = \begin{pmatrix} {}^N M_{11} & {}^N M_{12} \\ {}^N M_{21} & {}^N M_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos(\beta_j d_j) & -i n_j^{-1} \sin(\beta_j d)_j \\ -i n_j \sin(\beta_j d_j) & \cos(\beta_j d_j) \end{pmatrix},$$

где $\beta_j = (2\pi n_j)/\lambda$ — постоянная распространения волны в j-м слое, λ — длина волны в вакууме, n_{eff} — эффективный показатель преломления структуры [23]. Подставляя в (1) элементы характеристической матрицы ${}^N M_{lm}$, получим эквивалентную систему уравнений вида [23]:

$$\begin{cases} n_{\text{eff}} n_L = \dfrac{{}^N M_{21}}{{}^N M_{12}}, \\ \dfrac{n_{\text{eff}}}{n_L} = \dfrac{{}^N M_{11}}{{}^N M_{22}}. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему (2), учитывая при этом, что на заданной длине волны в силу структурного алгоритма такого класса тонкослойных структур (при увеличении числа слоев (разбиений) выполняется условие $d_j \sim 1/N$ [10–13]) при $N \gg 1$ $T_{i,j} \ll 1$, с точностью до малых величин порядка $T_j \times T_i$ получим

$$\frac{n_{\text{eff}} - n_L}{n_L} = \frac{8}{\pi^2} \Phi_\Sigma, \tag{3}$$

где

$$\Phi_\Sigma = \frac{n_{\text{eff}}}{n_L} \sum_{j=N}^{2} \left(\frac{T_j}{n_j} \sum_{i=j-1}^{1} T_i n_i \right) - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{T_j}{n_j} \sum_{i=j+1}^{N} T_i n_i \right),$$

$n_{i,j}$ — показатели преломления слоев структуры; $T_{i,j} \equiv \operatorname{tg}(2\pi n_{i,j} d_{i,j}/\lambda)$; $d_{i,j}$ — геометрическая толщина слоев структуры. Поскольку при $N \gg 1$ $T_{i,j} \ll 1$ можно воспользоваться приближением

$$T_{i,j} \approx \frac{2\pi n_{i,j} d_{i,j}}{\lambda},$$

тогда

$$\Phi_\Sigma = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{n_{\text{eff}}}{n_L} \sum_{j=N}^{2} (d_j \sum_{i=j-1}^{1} n_i^2 d_i) - \sum_{j=1}^{N-1} (d_j \sum_{i=j+1}^{N} n_i^2 d_i) \right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \Phi_0. \tag{4}$$

В частности, для многослойных структур, имеющих одинаковые геометрические или оптические толщины слоев, выражение (4) упрощается и имеет вид:

$$d_i = d_j = d,$$

$$\Phi_\Sigma = \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{n_{\text{eff}}}{n_L} \sum_{j=N}^{2} \sum_{i=j-1}^{1} n_i^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=j+1}^{N} n_i^2 \right);$$

$$n_i d_i = n_j d_j = D,$$

$$\Phi_\Sigma = \left(\frac{2\pi D}{\lambda}\right)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{n_{\text{eff}}}{n_L} \sum_{j=N}^{2} \left(\frac{1}{n_j} \sum_{i=j-1}^{1} n_i \right) - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n_j} \sum_{i=j+1}^{N} n_i \right) \right).$$

Асимптотика выражения (4) для пространственно однородного слоя (многослойная структура, у которой $n_i = n_j = n$), граничащей слева и справа со средами с показателем преломления n_L, имеет вид:

$$\Phi_\Sigma = \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{n_{\text{eff}}}{n_L} \sum_{j=N}^{2} \left(d_j \sum_{i=j-1}^{1} d_i \right) - \sum_{j=1}^{N-1} \left(d_j \sum_{i=j+1}^{N} d_i \right) \right) = \left(\frac{2\pi n d}{\lambda}\right)^2 \frac{n_{\text{eff}} - n_L}{n_L} \cdot \frac{N^2}{2},$$

или из (3) имеем

$$\lambda = 4\,(ndN)$$

и полная оптическая толщина такой структуры (в данном случае однородного слоя с фазой коэффициента отражения равной π) равна четверти длины волны

$$D_{\Sigma\text{одн}} = ndN = \frac{\lambda}{4},$$

т. е. асимптотическое значение выражения (3) дает хорошо известный в оптике и радиофизике результат для оптической толщины однородной пленки с фазой коэффициента отражения, равной π.

Из соотношений (3) и (4) можно определить значение длины волны λ_π ($\lambda_\pi \gg 2\pi n_i d_i$), при котором фаза коэффициента отражения от многослойной структуры, расположенной между двумя полубесконечными средами с показателем преломления n_L и с характеристиками слоев заданными кусочно-непрерывными функциями $n(z)$ и $d(z)$, равна π:

$$\lambda_\pi = \left(\frac{32 n_L \Phi_0}{n_{\text{eff}} - n_L} \right)^{1/2}, \tag{5}$$

где [23]:

$$n_{\text{eff}} = \frac{1}{n_L} \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i^2 d_i}{L}, \tag{6}$$

$L = \sum\limits_{i=1}^{N} d_i$ — полная геометрическая толщина структуры. Причем, как было показано в [10–13], найденное из (5) значение длины волны λ_π является максимальным для данной слоисто-неоднородной структуры (при длинах волн $\lambda > \lambda_\pi$ фаза коэффициента отражения электромагнитной волны от данной слоисто-неоднородной структуры асимптотически стремится к нулю). Таким образом, на этой длине волны данная слоисто-неоднородная структура эквивалентна четвертьволновой пленке с эффективным показателем преломления n_{eff} и эквивалентным показателем преломления $n_{\text{eq}} = \sqrt{n_{\text{eff}} n_L}$ [23]. Тогда правомерно ввести понятие эффективной оптической толщины, которая в таком случае может быть определена как

$$D_{\text{eff}} = \lambda_\pi / 4 = \left(\frac{2 n_L \Phi_0}{n_{\text{eff}} - n_L} \right)^{1/2}. \tag{7}$$

С другой стороны, оптическая толщина многослойной структуры по определению равна:

$$D_\Sigma = \sum_{j=1}^{N} n_j d_j, \tag{8}$$

однако, как видно из соотношения (8), D_Σ инвариантна относительно порядка чередования слоев в структуре, т. е., например, при падении волны на структуру либо с фронтальной стороны, либо с тыльной соотношение (8) дает один и тот же результат. В то же самое время как из общих свойств такого класса структур [12, 13], так и из вида функции Φ_0 видно, что D_{eff} таким инвариантным свойством не обладает, т. е. структурные параметры D_Σ и D_{eff} описывают разные оптические (волновые) характеристики таких пространственно-неоднородных сред.

Физический смысл D_{eff} и D_Σ рассмотрим на примере наиболее приближенного к практике случая структур со слабой пространственной неоднородностью показателя преломления.

3. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ СО СЛАБОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Слабой пространственной неоднородностью показателя преломления, как и в [23], будем считать такую пространственную неоднородность показателя преломления, при которой для всего множества его значений n_j $(j \in [1, N])$, лежащих в интервале значений $[n_M, n_m]$, где n_M, n_m — максимальное и минимальное их значения из всего множества, справедливы следующие условия: $n_j = \bar{n} \pm \delta_j$, $\bar{n} = (n_M + n_m)/2$ и $0 \leqslant |\delta_j| \ll \bar{n}$. В этом случае, как было показано в [23], оптические свойства такой многослойной структуры (пространственно неоднородной среды с произвольным (случайным) видом кусочно-непрерывной функции $n(z)$), граничащей слева и справа со средой с показателем преломления n_L, могут быть описаны эквивалентной двухслойной оптически равнотолщинной структурой в зависимости от взаимного расположения слоев с показателями преломления n_M и n_m относительно падающей слева волны $\Rightarrow(n_L, n_M, n_m, n_L)$ или $\Rightarrow(n_L, n_m, n_M, n_L)$, эффективный показатель преломления которой равен:

$$n_{\text{eff}} = \frac{n_M n_m}{n_L}, \tag{9}$$

причем, как показано в [23], как соотношение (6), так и соотношение (9) практически с графической точностью (по сравнению с точным расчетом) описывают зависимость коэффициента отражения от длины волны на всем длинноволновом участке спектра ($\lambda \geqslant 8 n_M d_M$) для апериодической тонкослойной структуры со слабой пространственной неоднородностью показателя преломления. В рамках рассматриваемой двухслойной модели максимально возможная длина волны, при которой $\varphi_r = \pi$ для такого класса структур, может быть найдена из соотношения [12]:

$$\lambda_\pi = \pi D_\Sigma / \operatorname{arctg}(P)^{-1/2}; \tag{10}$$

тогда для эффективной оптической толщины можно записать

$$D_{\text{eff}} = \frac{\pi}{4} \frac{D_\Sigma}{\operatorname{arctg}(P)^{-1/2}}, \tag{11}$$

где $D_\Sigma = 2D$; $D = d_M n_M = d_m n_m$; d_M, d_m — геометрические толщины слоев такой эквивалентной двухслойной структуры, причем:

$$d_M + d_m = L; \quad d_M = L\frac{n_m}{n_M + n_m}, \quad d_m = L\frac{n_M}{n_M + n_m},$$

L — полная геометрическая толщина исходной N-слойной структуры. Параметр P в зависимости от ориентации структуры относительно падающей волны имеет вид [12]:

$$P = \begin{cases} P_M = \dfrac{n_M^3 - n_m n_L^2}{n_M \left(n_M n_m - n_L^2\right)}, \ \Rightarrow(n_L, n_M, n_m, n_L), \\ P_m = \dfrac{n_m^3 - n_M n_L^2}{n_m \left(n_m n_M - n_L^2\right)}, \ \Rightarrow(n_L, n_m, n_M, n_L). \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, зная лишь экстремальные значения n_M и n_m кусочно-непрерывной функции $n(z)$, из соотношения (10) можно определить максимальную длину волны λ_π, при которой фаза коэффициента отражения от такой структуры равна π, а из соотношения (9) — ее эффективный показатель преломления, а следовательно, и модуль коэффициента отражения на длине волны λ_π, который в этом случае будет равен:

$$|r_\pi| = \left| \frac{n_{\text{eff}} - n_L}{n_{\text{eff}} + n_L} \right| = \left| \frac{n_{\text{eq}}^2 - n_L^2}{n_{\text{eq}}^2 + n_L^2} \right|, \tag{13}$$

т. е. определить волновые параметры пространственно-неоднородной пленки, при которых она эквивалентна четвертьволновой.

Соотношение (10) имеет действительные решения, если параметр $P > 0$, а именно, если $n_L < n_M \times \times \left(1 - \frac{\delta}{n_M}\right)$ или $n_L > n_M \left(1 + \frac{\delta}{n_M}\right)$. В случае если

$n_M n_m = n_L^2$, параметр $P \to \infty$ и при заданной длине волны толщина $L \to 0$, а $n_{\text{eff}} = n_L$, т. е. вся структура представляет собой однородную среду с показателем преломления n_L. При распространении волны в свободном пространстве ($n_L = 1$) условие $P_M > 0$ выполняется при $n_M^3 > n_m$ (очевидное неравенство) и $P_m > 0$ при $n_m^3 > n_M$, что при слабой пространственной неоднородности показателя преломления практически всегда справедливо, за исключением случая, когда n_m и n_M близки по величине к 1, тогда условие $P_m > 0$ выполняется при $\Delta > \delta$, где $\Delta = n_m - 1 \ll 1$.

Как отмечалось выше, в отличие от амплитудной (модуль коэффициента отражения), фазовая компонента отраженной волны (фаза коэффициента отражения) не обладает инвариантным свойством относительно направления падения волны на структуру. Действительно, из соотношения (10) и (12) видно, что при изменении направления падения волны на структуру параметр $P_M \neq P_m$, а следовательно, и λ_π будут иметь разные значения, т. е. фазовая компонента отраженной волны в пространственно-неоднородных средах обладает свойством невзаимности.

Из анализа соотношений (10)–(12) установим общие для структур такого класса закономерности. Пусть длина волны, определяемая из соотношения (11) при $P = P_M$, равна $\lambda_{\pi M}$ и, соответственно, $\lambda_{\pi m}$ при $P = P_m$. Тогда из отношения P_M/P_m в приближении слабой пространственной неоднородности показателя преломления из (11) и (12) при заданных эквивалентных параметрах структуры, полагая $n_L = 1$, получим:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_M} \approx \frac{2}{\pi}\frac{\Delta n}{n_{\text{eq}}}, \tag{14}$$

где $\Delta\lambda = \lambda_{\pi M} - \lambda_{\pi m}$; $\lambda_M = 4D_\Sigma$; $\Delta n = n_M - n_m$. Из соотношения (14) следует, что поскольку $\Delta n > 0$, то соответственно $\Delta\lambda > 0$ и $\lambda_{\pi M} > \lambda_{\pi m}$. Таким образом, большее значение длины волны, при которой фаза коэффициента отражения равна π, реализуется в случае падения волны на структуру со стороны слоя с большим показателем преломления, а невзаимные свойства таких структур ($\Delta\lambda$), как видно из соотношения (14), усиливаются с ростом Δn. Кроме того, из соотношения (12) видно, что всегда, поскольку $n_M > n_m$, то $P_M > 1$, а $P_m < 1$, тогда, как следует из (10), $\lambda_{\pi m} < \lambda_M < \lambda_{\pi M}$. Причем если $\Delta n \to 0$, то $P_M, P_m \to 1$, $\Delta\lambda \to 0$ и $\lambda_{\pi M}, \lambda_{\pi m} \to \lambda_M$, т. е. структура в этом случае представляет собой однородный четвертьволновый слой на длине волны равной λ_M и эффективным показателем преломления $n_{\text{eff}} = n^2/n_L$, где $n_M = n_m = n$, а на длине волны λ_M реализуется максимальное значение модуля коэффициента отражения от рассматриваемой структуры.

Таким образом, физический смысл эффективной оптической толщины пространственно-неоднородной среды D_{eff} заключается в том, что она определяет такую волновую характеристику пространственно-неоднородной среды, при которой на определенной длине волны λ_π фаза коэффициента отражения равна π, а амплитудная характеристика (модуль коэффициента отражения) определяется эффективным показателем преломления n_{eff}. В отличие от эффективной, оптическая толщина пространственно неоднородной среды D_Σ определяет такую ее волновую характеристику (длину волны λ_M), при которой наблюдается максимальное значение модуля коэффициента отражения, однако при этом фаза коэффициента отражения не равна π и пространственно-неоднородная структура на этой длине волны не эквивалентна четвертьволновой по фазовой компоненте.

Волновые свойства апериодической тонкослойной структуры по ее структурным характеристикам могут быть аналитически определены при использовании как классического определения оптической толщины структуры D_Σ, так и введенного выше понятия эффективной оптической толщины D_{eff}, которые в совокупности определяют длины волн, на которых реализуется фаза коэффициента отражения, равная π (D_{eff}), и максимальное значение коэффициента отражения волны от структуры (D_Σ).

Не менее актуальным представляется возможность использования полученных результатов для решения обратных задач по восстановлению профиля пространственной неоднородности исследуемой среды. Построение эквивалентной двухслойной модели реальной пространственно неоднородной структуры (неоднородной пленки) с неизвестным характером пространственной неоднородности показателя преломления на практике может быть реализовано набором экспериментально измеренных величин: $\lambda_{\pi M}$, $\lambda_{\pi m}$, λ_M, $|r_\pi|$, зная которые из соотношений (10), (12)–(14) могут быть однозначно определены структурные параметры эквивалентной модели и тем самым получена возможность оценки отклонения параметров реальной структуры от требуемых и их корректировки. Кроме того, в случаях когда требуется восстановление характера (профиля) пространственной неоднородности исследуемой структуры, эквивалентная модель может быть использована в качестве начального приближения при решении такого класса обратных задач.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе [23] в качестве примера, иллюстрирующего правомерность найденного аналитического решения и применимости предложенного эквивалентного представления для определения n_{eff} апериодических тонкослойных структур, была рассмотрена 16-слойная апериодическая структура со слабой пространственной неоднородностью показателя преломления. Рассмотрим эту же структуру в рамках предложенного эквивалентного представления как иллюстрацию правомерности использования полученных аналитических результатов при определении ее волновых или структурных свойств.

Определим эквивалентные четвертьволновым волновые характеристики апериодической 16-слойной структуры, граничащей слева и справа со свободным пространством ($n_L = 1$) с равномерным изменением показателя преломления от слоя к слою от 2.0 до 2.15 с шагом 0.01 и одинаковыми оптическими толщинами слоев, равными $n_i d_i = 0.2$. Полная геометрическая толщина структуры $L = 1.543$ мкм, $n_M = 2.15$, $n_m = 2.00$, $d_M = 0.744$ мкм, $d_m = 0.799$ мкм, $n_{\text{eff}} = 4.3$, $D_\Sigma = 3.2$.

В результате численного эксперимента было получено, что длины волн, при которых фаза коэффициента отражения от такой структуры равна π, рассчитанные:

а) по точным формулам зависимости от длины волны модуля и фазы коэффициента отражения для данной 16-слойной структуры ($\lambda_{\pi M,m}$; $D_{\text{eff}M,m}$);

б) по приближенным формулам (5), (6) ($\lambda_{\pi M,m1}$; $D_{\text{eff}M,m1}$);

в) по приближенным формулам (10), (11) для эквивалентной двухслойной модели ($\lambda_{\pi M,m2}$; $D_{\text{eff}M,m2}$)

при нормальном падении волны на структуру со стороны меньшего показателя преломления были равны:

$$\lambda_{\pi m} = 12.48 \text{ мкм}; \quad \lambda_{\pi m1} = 12.46 \text{ мкм } (|\chi| = 0.16\%);$$
$$\lambda_{\pi m2} = 12.32 \text{ мкм } (|\chi| = 1.28\%);$$
$$D_{\text{eff}m} = 3.12; \quad D_{\text{eff}m1} = 3.115 \ (|\chi| = 0.16\%);$$
$$D_{\text{eff}m2} = 3.08 \ (|\chi| = 1.28\%),$$

а в случае падения волны со стороны большего показателя преломления соответственно

$$\lambda_{\pi M} = 13.12 \text{ мкм}; \quad \lambda_{\pi M1} = 13.13 \text{ мкм } (|\chi| = 0.08\%);$$
$$\lambda_{\pi M2} = 13.26 \text{ мкм } (|\chi| = 1.07\%);$$
$$D_{\text{eff}M} = 3.28; \quad D_{\text{eff}M1} = 3.283 \ (|\chi| = 0.09\%);$$
$$D_{\text{eff}M2} = 3.315 \ (|\chi| = 1.07\%),$$

где χ — относительное в процентах отклонение рассчитанных по приближенным соотношениям соответствующих параметров от точных.

Причем длина волны, на которой наблюдается максимум коэффициента отражения волны от структуры, как отмечалось выше, не зависит от направления распространения волны и в данном случае равна $\lambda_M = 12.8$ мкм (численный расчет по точным формулам). Значение λ_M может быть также определено аналитически при использовании соотношения (8)

$$\lambda_M = 4D_\Sigma = 12.8 \text{ мкм}.$$

В случае если характер пространственной неоднородности пленки неизвестен, то, как отмечалось выше, по экспериментально измеренным ее оптическим характеристикам можно синтезировать эквивалентную ей двухслойную структуру. Так, в рассматриваемом случае, беря в качестве измеренных значений оптических характеристик рассматриваемой структуры по результатам расчета по точным формулам, а именно:

$$\lambda_{\pi M} = 13.12 \text{ мкм}, \qquad \lambda_{\pi m} = 12.48 \text{ мкм},$$
$$|r_\pi| = 0.623, \qquad \lambda_M = 12.8 \text{ мкм}.$$

Из соотношений (10), (12)–(14) для искомых параметров можно записать:

$$n_{\text{eff}} = \frac{|r_\pi| + 1}{|r_\pi| - 1} n_L, \quad n_{\text{eq}} = \sqrt{n_{\text{eff}} n_L}, \quad D_\Sigma = \lambda_M/4,$$
$$n_M = n_{\text{eq}} \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_M} \frac{\pi}{4}\right), \quad n_m = n_{\text{eq}} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_M} \frac{\pi}{4}\right),$$
$$d_M = \frac{\lambda_{\pi M} + \lambda_{\pi m}}{16 n_M}, \quad d_m = \frac{\lambda_{\pi M} + \lambda_{\pi m}}{16 n_m},$$
$$L = d_M + d_m.$$

После подстановки соответствующих численных значений получим:

$$n_{\text{eff}} = 4.3, \quad n_{\text{eq}} = 2.074, \quad D_\Sigma = 3.2,$$
$$n_M = 2.155 \ (|\chi| = 0.23\%),$$
$$n_m = 1.993 \ (|\chi| = 0.35\%),$$
$$d_M = 0.743 \text{ мкм } (|\chi| = 0.13\%),$$
$$d_m = 0.803 \text{ мкм } (|\chi| = 0.5\%),$$
$$L = 1.542 \text{ мкм } (|\chi| = 0.19\%).$$

Таким образом, проведенный численный эксперимент иллюстрирует возможность использования представленных в работе аналитических соотношений для определения с высокой степенью соответствия структурных и волновых свойств апериодических тонкослойных структур.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение по результатам проведенного в настоящей работе анализа можно сделать следующие основные выводы.

1. На основании полученных в настоящей работе аналитических соотношений и их анализа показано, что для любой плоскослоистой среды (многослойной структуры) с произвольным (случайным) видом кусочно-непрерывной функции пространственной зависимости показателя преломления $n(z)$ существует и может быть рассчитана на основании предложенных соотношений максимально возможная для данной структуры длина волны, при которой фаза коэффициента отражения от такой структуры равна π, и структура в этом случае эквивалентна четвертьволновой пленке с эффективным показателем преломления n_{eff} и эффективной оптической толщиной D_{eff}.

2. В отличие от эффективного показателя преломления n_{eff} и суммарной оптической толщины D_Σ эффективная оптическая толщина D_{eff} апериодической тонкослойной структуры с произвольным (случайным) видом пространственной зависимости кусочно-непрерывной функции $n(z)$ не обладает свойством инвариантности относительно порядка чередования ее слоев.

3. Зависимость эффективной оптической толщины рассматриваемой многослойной структуры от порядка чередования ее слоев обусловливает наличие у такого класса структур свойства невзаимности, а именно значение фазы коэффициента отражения равное π реализуется на разных длинах волн в зависимости от направления падения волны на такую структуру, причем эти длины волн не совпадают с длиной волны, на которой наблюдается максимум модуля коэффициента отражения от рассматриваемой структуры.

4. Исследование волновых и структурных свойств тонкослойных апериодических многослойных структур со слабой пространственной неоднородностью показателя преломления с высокой степенью соответствия может быть проведено на основе анализа эквивалентной двухслойной тонкослойной модели при использовании простых аналитических соотношений.

5. Результаты численного эксперимента подтверждают работоспособность приведенных в работе аналитических соотношений и справедливость сделанных выводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розенберг Т. В.* Оптика тонкослойных покрытий. М.: Наука, 1958.
2. *Кард П.* Анализ и синтез многослойных интерференционных покрытий. Таллин: Валгус, 1971.
3. *Бреховских Л. В.* Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1973.
4. *Macleod H. A.* Thin-film optical filters. CRC press, 2001.
5. *Morlens A. S.* // Optics letters. 2006. **31**, № 10. P. 1558.
6. *Козарь А. В., Трофимов А. В.* // Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 5. С. 25. (*Kozar A. V., Trofimov A. V.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2013. **68**, N 5. P. 377.)
7. *Kikuchi A., Miyamoto T.* // Japan. J. of Appl. Phy. 2014. **53**, N 8S2. P. 08MC02.
8. *Дадашадзе Н., Романов О. Г.* // Вестник БГУ. 2014. **1**, № 1. С. 825.
9. *Canova F., Poletto L.* Optical Technologies for Extreme-Ultraviolet and Soft X-ray Coherent Courses. M. Springer Series in Optical Sciences. 2015.
10. *Козарь А. В.* // Тр. Всесоюзн. научно-технич. конф. «Проектирование и применение радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах». Саратов, 1983. С. 136.
11. *Козарь А. В.* // Тр. Всесоюзн. научн. сем. «Методы синтеза и применение многослойных интерференционных систем». М. 1984. С. 118.
12. *Козарь А. В.* // Оптика и спектроскопия. 1985. **5**, № 59. С. 1132.
13. *Козарь А. В.* // Оптика и спектроскопия. 1988. **5**, № 64. С. 1130.
14. *Kozar A. V.* // Mater. of Intern. Congr. on Optical Science and Engineering «Optical Thin Films and Applications». Hague, Netherlands, 1990. P. 45.
15. *Козарь А. В., Рязанова Е. Л.* // Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. **31**, № 5. С. 52. (*Kozar A. V., Ryazanova E. L.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 1990. **45**, N 5. P. 50.)
16. *Kozar A. V.* // Mater. of «Optical Interference Coatings Topical Meeting» of the Optical Society of America. USA. 1992. P.97.
17. *Козарь А. В.* // Препринт физ. ф-та МГУ. М., 2003. № 8. С. 1.
18. *Козарь А. В., Путрина Е. В.* // Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. **31**, № 6. С. 57.
19. *Козарь А. В., Путрина Е. В., Фионова О. В.* // Вестн. Моск. ун-та Физ. Астрон. 1995. **36**, № 3. С. 39. (*Kozar A. V., Putrina E. V., Fionova O. V.* Moscow Univ. Phys. Bull. 1995. **1995**, N 3. P. 36.)
20. *Козарь А. В., Путрина Е. В.* // Вестн. Моск. ун-та Физ. Астрон. 1992. **33**, № 6. С. 57. (*Kozar A. V., Putrina E. V.* Moscow Univ. Phys. Bull. 1992. **47**, N 6. P. 53.)
21. *Алейникова С. П., Козарь А. В., Путрина Е. В.* // IV Всерос. школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах». Красновидово, 1994. С. 114.
22. *Бобровников Ю. А., Горохов П. Н., Козарь А. В.* //Квантовая электроника. 2003. **53**, № 11. С. 1019.
23. *Козарь А. В.* // Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 3. С. 54. (*Kozar A. V.* Moscow Univ. Phys. Bull. 2009. **64**, N 3. P. 291.)
24. *Бобровников Ю. А., Козарь А. В., Горохов П.Н.* // VIII Всерос. школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах». М., 2013. С. 53.

The Optical Properties of Aperiodic Thin-Layer Structures: The Effective Optical Thickness

A. V. Kozar

Department of Photonics and Microwave Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: avk@phys.msu.ru.

Simple analytical relationships between the geometry of aperiodic thin-layer structures and the phase component of the reflection coefficient were deduced and investigated. The effective optical thickness of an aperiodic structure was introduced as a new parameter and then was analytically defined. The two-layer thin-layer model was proposed to describe wave properties of aperiodic thin layer structures with a weak spatial heterogeneity of the refractive index. This model significantly simplifies the relations that are used to analyze wave properties of this class of multilayer structures. The validity of the analytical results was proved by corresponding numerical calculations.

Keywords: multilayer structures, interference.
PACS: 42.25.-p.
Received 22 March 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. **73**, No. 6. Pp. 638–643.

Сведения об авторе

Козарь Анатолий Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: avk@phys.msu.ru.