ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Явные соотношения для гармонических потенциалов с плотностью, заданной на двух параллельных отрезках

П. А. Крутицкий,[1,a] В. В. Колыбасова[2,б]

[1] *Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН). Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 26.07.2018, после доработки 17.09.2018, принята к публикации 18.09.2018.

В работе представлены явные соотношения для гармонических потенциалов, плотность в которых задана на двух отрезках, расположенных на различных параллельных прямых. Полученные результаты могут использоваться для тестирования численных алгоритмов, предназначенных для вычисления гармонических потенциалов в краевых задачах вне разомкнутых кривых на плоскости. Кроме того, в настоящей работе получены явные решения двух систем сингулярных интегральных уравнений, которые могут быть использованы для тестирования численных методов, применяемых при решении сингулярных интегральных уравнений. Также найдены явные решения задачи Неймана для уравнения Лапласа, когда заданные функции в граничных условиях имеют определенный вид.

Ключевые слова: уравнение Лапласа на плоскости, потенциал простого слоя, угловой потенциал, сингулярные интегральные уравнения.
УДК: 517.956.224. PACS: 02.30.Em.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Лапласа используется для описания процессов в различных областях физики [1, 2], а для моделирования трещин, крыльев, рифов и кос в океане, тонких электродов, экранов и других тонких объектов применяются краевые задачи с границей в виде разомкнутых кривых [3–5]. Решение многих краевых задач для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых на плоскости можно представить в виде суммы гармонических потенциалов, плотность в которых является решением однозначно разрешимой системы интегральных уравнений [6–12]. Для нахождения численых решений таких задач в [13–15] предложены как методы численного решения возникающих там интегральных уравнений, так и квадратурные формулы повышенной точности для вычисления логарифмического и углового (см. [16–18]) потенциалов с плотностью, заданной на разомкнутых кривых. Особенность этих квадратурных формул заключается в том, что они обеспечивают равномерную аппроксимацию потенциалов во всей области, включая границу, т. е. включая сами разомкнутые кривые и их концы. В частности, квадратурная формула для логарифмического потенциала сохраняет свойство его непрерывности при переходе через границу, т. е. через кривую, на которой задана его плотность.

В целях тестирования квадратурных формул для потенциалов с плотностью, заданной на разомкнутых кривых, нужно иметь явные соотношения для потенциалов в канонических областях, например для двух разомкнутых кривых. В настоящей работе получены явные соотношения для логарифмического и углового гармонических потенциалов с плотностью, заданной на отрезках двух различных параллельных прямых. Эти соотношения могут быть использованы при тестировании численных алгоритмов, предназначенных для вычисления потенциалов в задачах вне разомкнутых кривых на плоскости. Кроме того, в настоящей работе получены явные решения двух систем сингулярных интегральных уравнений, которые могут быть использованы для тестирования численных методов, применяемых при решении сингулярных интегральных уравнений. Затем в работе рассматривается задача Неймана для уравнения Лапласа вне двух параллельных разрезов. В случае когда заданные функции в граничных условиях имеют определенный вид, для задачи Неймана получены явные решения.

1. ПОТЕНЦИАЛЫ

На плоскости в декартовых координатах $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим конечное число простых разомкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in C^5$. Считаем, что кривые не имеют общих точек, в том числе не имеют общих концов. Под простой разомкнутой кривой понимается незамкнутая гладкая дуга конечной длины без самопересечений [19, § 1]. Введем обозначение $\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{N} \Gamma_n$. Предположим, что каждая кривая Γ_n параметризована длиной дуги s, отсчитываемой от некоторого вещественного числа a_n:

$$\Gamma_n = \{x: \ x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), \ s \in [a_n, b_n]\},$$
$$n = 1, \dots, N,$$

так что $a_1 < b_1 < \dots < a_N < b_N$. Следовательно, между точками $x \in \Gamma$ и значениями параметра s имеется взаимно-однозначное соответствие. Совокупность отрезков $\bigcup\limits_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$ оси Os будем также обозначать Γ. Для обозначения параметра s также будет использоваться буква σ. Под $y(\sigma) = (y_1(\sigma), y_2(\sigma))$ понимается точка на Γ, в общем случае отличная от точки $x(s) = (x_1(s), x_2(s)) \in \Gamma$.

[a] E-mail: krutitsk@mail.ru
[б] E-mail: kolybasova@physics.msu.ru

Положим $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ и

$$\int\limits_\Gamma \ldots d\sigma = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{a_n}^{b_n} \ldots d\sigma.$$

Единичный вектор касательной к Γ в точке $x(s)$, указывающий направление возрастания параметра s, обозначим $\tau_x = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, а единичный вектор нормали, совпадающий с вектором касательной τ_x при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x = (\sin\alpha(s), -\cos\alpha(s))$. При выбранной параметризации $\cos\alpha(s) = x_1'(s)$, $\sin\alpha(s) = x_2'(s)$.

Положим

$$Q(s) = \prod_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(s-a_n)\sqrt{|s-a_n||b_n-s|}. \tag{1}$$

Будем говорить, что $\mu(s) \in C^{\omega}_{1/2}(\Gamma)$, где $\omega \in (0, 1]$, если

$$\mu_*(s) = \mu(s)Q(s) = \\ = \mu(s)\prod_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(s-a_n)\sqrt{|s-a_n||b_n-s|} \in C^{0,\omega}(\Gamma), \tag{2}$$

где $C^{0,\omega}(\Gamma)$ — пространство гёльдеровых функций с показателем ω. Норма в пространстве $C^{0,\omega}(\Gamma)$ вводится формулой

$$\|\mu_*(s)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma)} = \sup_{s\in\Gamma}|\mu_*(s)| + \sup_{\substack{s,\sigma\in\Gamma\\ s\neq\sigma}} \frac{|\mu_*(s)-\mu_*(\sigma)|}{|s-\sigma|^{\omega}}.$$

Норма в $C^{\omega}_{1/2}(\Gamma)$ определяется равенством

$$\|\mu(s)\|_{C^{\omega}_{1/2}(\Gamma)} = \|\mu_*(s)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma)}.$$

Введем логарифмический и угловой потенциалы для уравнения Лапласа с плотностью $\mu(s) \in C^{\omega}_{1/2}(\Gamma)$, заданной на Γ, где $\omega \in (0,1]$. Логарифмический потенциал $w[\mu](x)$ имеет вид

$$w[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mu(\sigma)\ln|x-y(\sigma)|\,d\sigma.$$

Рассмотрим угловой потенциал $\nu[\mu](x)$ для уравнения Лапласа, изучавшийся в [6, 7, 16, 17]:

$$\nu[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mu(\sigma)V(x,\sigma)\,d\sigma. \tag{3}$$

Ядро углового потенциала $V(x,\sigma)$ — многозначная функция, определяемая (с точностью до $2\pi m$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$) формулами

$$\cos V(x,\sigma) = \frac{x_1-y_1(\sigma)}{|x-y(\sigma)|}, \\ \sin V(x,\sigma) = \frac{x_2-y_2(\sigma)}{|x-y(\sigma)|}, \tag{4}$$

где $y(\sigma) = (y_1(\sigma), y_2(\sigma)) \in \Gamma$,

$$|x-y(\sigma)| = \sqrt{(x_1-y_1(\sigma))^2+(x_2-y_2(\sigma))^2}.$$

Пусть x — произвольная фиксированная точка в $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$, тогда под $V(x,\sigma)$ в (3) будем понимать любую фиксированную ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по σ вдоль каждой разомкнутой кривой Γ_n, $n = 1,\ldots,N$. При таком определении $V(x,\sigma)$ потенциал $\nu[\mu](x)$ — многозначная функция. Для того чтобы угловой потенциал $\nu[\mu](x)$ был однозначной функцией в $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$, необходимо потребовать выполнения следующих условий:

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} \mu(\sigma)\,d\sigma = 0, \qquad n = 1,\ldots,N. \tag{5}$$

Интегрируя угловой потенциал по частям, получим его представление через потенциал двойного слоя (см. [6, 16, 17]):

$$\nu[\mu](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \rho(\sigma)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y(\sigma)|\,d\sigma,$$

где

$$\rho(\sigma) = \int\limits_{a_n}^{\sigma}\mu(\xi)\,d\xi, \quad \sigma\in[a_n, b_n], \quad n = 1,\ldots,N.$$

2. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В СЛУЧАЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ

Пусть Γ — два параллельных отрезка:

$$\Gamma_1: \quad x_1(s) = s+2a, \quad x_2(s) = b, \quad s\in[-3a, -a], \\ \Gamma_2: \quad x_1(s) = s-2a, \quad x_2(s) = -b, \quad s\in[a, 3a].$$

Отрезки лежат на двух различных параллельных прямых симметрично относительно начала координат. Введем функцию комплексной переменной $z = x_1+ix_2$:

$$q(z) = \sqrt{z-D}\sqrt{z+D}\sqrt{z-\bar D}\sqrt{z+\bar D}, \\ D = a+ib, \tag{6}$$

где ветви квадратных корней выбраны так, что $\sqrt{\zeta} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, где $\zeta = re^{i\varphi}$, $r \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Тогда функция $q(z)$ является аналитической вне Γ. Заметим, что функция $q(z)$ имеет следующую асимптотику на бесконечности:

$$q(z) = \left(\sqrt{z}\right)^4\sqrt{1-\frac{D}{z}}\sqrt{1+\frac{D}{z}}\sqrt{1-\frac{\bar D}{z}}\sqrt{1+\frac{\bar D}{z}} = \\ = z^2\sqrt{1-\frac{D^2}{z^2}}\sqrt{1-\frac{\bar D^2}{z^2}} = \\ = z^2\left[1-\frac{D^2}{2z^2}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)\right]\left[1-\frac{\bar D^2}{2z^2}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)\right] = \\ = z^2\left[1-\frac{D^2}{2z^2}-\frac{\bar D^2}{2z^2}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)\right] = \\ = z^2-a^2+b^2+o\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z\to\infty.$$

Положим $p(z) = z^2-a^2+b^2$. Рассмотрим функцию

$$\Upsilon(z) = \frac{q(z)-p(z)}{2}. \tag{7}$$

Функция $\Upsilon(z)$ — решение следующей задачи о скачке.

Задача. *Найти функцию $\Upsilon(z)$, аналитическую вне Γ, непрерывную на концах Γ, непрерывно продолжимую на Γ сверху и снизу, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую условию скачка*

$$\Upsilon^+(t) - \Upsilon^-(t) = q^+(t), \qquad t \in \Gamma,$$

где $\Upsilon^+(t)$ и $\Upsilon^-(t)$ — предельные значения функции $\Upsilon(z)$ на верхней и нижней сторонах Γ соответственно, и $q^+(t)$ — предельное значение функции $q(z)$ на верхней стороне Γ.

Согласно [19, § 31], [20] эта задача однозначно разрешима, и ее решение дается формулой

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{q^+(t)}{t - z}\, dt. \tag{8}$$

В силу единственности решения задачи о скачке из (7) вытекает, что

$$\Upsilon(z) \equiv \frac{q(z) - p(z)}{2} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{q^+(t)}{t - z}\, dt. \tag{9}$$

Интегрируя (8) по частям и принимая во внимание, что $q(\pm D) = q\left(\pm \bar{D}\right) = 0$, откуда

$$\int\limits_{\Gamma_j} \left(q^+(t)\right)' dt = 0, \qquad j = 1,\, 2,$$

получим

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} q^+(t)\, d\ln(t - z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(q^+(t)\right)' \ln(t - z)\, dt = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(q^+(t)\right)' \ln(z - t)\, dt. \tag{10}$$

Вычисляя производную, находим

$$q'(z) = \left[(z + D)\left(z - \bar{D}\right)\left(z + \bar{D}\right) + (z - D)\left(z - \bar{D}\right)\left(z + \bar{D}\right) + (z - D)(z + D)\left(z + \bar{D}\right) + (z - D)(z + D)\left(z - \bar{D}\right)\right] / (2q(z)) = 2\frac{z^3 - \left(a^2 - b^2\right) z}{q(z)} = \frac{2zp(z)}{q(z)},$$

поэтому

$$\left(q^+(t)\right)' = \frac{2tp(t)}{q^+(t)}. \tag{11}$$

Если t принадлежит верхней стороне Γ_1: $t \in \Gamma_1^+$, то

$$t - D = |t - D| e^{i\pi}, \quad t + \bar{D} = \left|t + \bar{D}\right|,$$
$$t - \bar{D} = \left|t - \bar{D}\right| e^{i\varphi_1}, \quad t + D = |t + D| e^{i\varphi_2},$$

где $\pi/2 \leqslant \varphi_1 < \pi$, $0 < \varphi_2 \leqslant \pi/2$, $\varphi_1 = \arctan \frac{2b}{s+a} + \pi$, $\varphi_2 = \arctan \frac{2b}{s+3a}$. Следовательно,

$$q(t)|_{\Gamma_1^+} = i\sqrt{|t - D||t + D|\left|t - \bar{D}\right|\left|t + \bar{D}\right|} e^{i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}. \tag{12}$$

Если $t \in \Gamma_2^+$, то

$$t - \bar{D} = \left|t - \bar{D}\right| e^{i\pi}, \quad t + D = |t + D|,$$
$$t - D = |t - D| e^{i\varphi_3}, \quad t + \bar{D} = \left|t + \bar{D}\right| e^{i\varphi_4},$$

где $-\pi < \varphi_3 \leqslant -\pi/2$, $-\pi/2 \leqslant \varphi_4 < 0$, $\varphi_3 = \arctan \frac{2b}{3a-s} - \pi$, $\varphi_4 = -\arctan \frac{2b}{s-a}$. Следовательно,

$$q(t)|_{\Gamma_2^+} = i\sqrt{|t - D||t + D|\left|t - \bar{D}\right|\left|t + \bar{D}\right|} e^{i\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}}. \tag{13}$$

Принимая во внимание (10)–(13), получим

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{2tp(t) e^{-i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}}{\sqrt{|t - D||t + D|\left|t - \bar{D}\right|\left|t + \bar{D}\right|}} \ln(z - t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{2tp(t) e^{-i\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}}}{\sqrt{|t - D||t + D|\left|t - \bar{D}\right|\left|t + \bar{D}\right|}} \ln(z - t)\, dt.$$

Поскольку на Γ: $t = s \pm 2a \pm ib$, имеем $dt = ds$.

Если $t \in \Gamma_1$, то $t = s + 2a + ib$ и

$$tp(t) = s^3 + 3(2a + ib)s^2 + \left(11a^2 - 2b^2 + 12iab\right) s + 6a^3 - 4ab^2 + 11ia^2 b. \tag{14}$$

Если $t \in \Gamma_2$, то $t = s - 2a - ib$ и

$$tp(t) = s^3 - 3(2a + ib)s^2 + \left(11a^2 - 2b^2 + 12iab\right) s - 6a^3 + 4ab^2 - 11ia^2 b. \tag{15}$$

Введем функцию

$$Q_1(s) = \sqrt{|t - D||t + D|\left|t - \bar{D}\right|\left|t + \bar{D}\right|} = \sqrt{(3a - |s|)(|s| - a)} \times \sqrt[4]{\left[(|s| - a)^2 + 4b^2\right]\left[(3a - |s|)^2 + 4b^2\right]},$$

если $t \in \Gamma_1$ либо $t \in \Gamma_2$. Тогда находим

$$\operatorname{Re} \Upsilon(z) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \mu_{11}(s) \ln|x - y(s)|\, ds - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \mu_{21}(s) V(x, s)\, ds - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_2} \mu_{12}(s) \ln|x - y(s)|\, ds - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_2} \mu_{22}(s) V(x, s)\, ds;$$

$$\operatorname{Im} \Upsilon(z) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \left(-\mu_{21}(s)\right) \ln|x - y(s)|\, ds - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \mu_{11}(s) V(x, s)\, ds - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_2} \left(-\mu_{22}(s)\right) \ln|x - y(s)|\, ds - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_2} \mu_{12}(s) V(x, s)\, ds,$$

где

$$\mu_{11}(s) = -\frac{4}{Q_1(s)}\operatorname{Re}\left(tp(t)e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\right) = -\frac{4}{Q_1(s)}\left\{\left[s^3+6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s+6a^3-4ab^2\right]\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+ \right.$$
$$\left. + \left(3bs^2+12abs+11a^2b\right)\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right\}, \qquad s\in\Gamma_1;$$

$$\mu_{12}(s) = -\frac{4}{Q_1(s)}\operatorname{Re}\left(tp(t)e^{-i\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2}}\right) = -\frac{4}{Q_1(s)}\left\{\left[s^3-6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s-6a^3+4ab^2\right]\cos\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2}+ \right.$$
$$\left. + \left(-3bs^2+12abs-11a^2b\right)\sin\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2}\right\}, \qquad s\in\Gamma_2;$$

$$\mu_{21}(s) = \frac{4}{Q_1(s)}\operatorname{Im}\left(tp(t)e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\right) = \frac{4}{Q_1(s)}\left\{-\left[s^3+6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s+6a^3-4ab^2\right]\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+ \right.$$
$$\left. + \left(3bs^2+12abs+11a^2b\right)\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right\}, \qquad s\in\Gamma_1;$$

$$\mu_{22}(s) = \frac{4}{Q_1(s)}\operatorname{Im}\left(tp(t)e^{-i\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2}}\right) = \frac{4}{Q_1(s)}\left\{-\left[s^3-6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s-6a^3+4ab^2\right]\sin\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2}+ \right.$$
$$\left. + \left(-3bs^2+12abs-11a^2b\right)\cos\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2}\right\}, \qquad s\in\Gamma_2.$$

где $\mu_k(s) = \begin{cases}\mu_{k1}(s), & \text{если } s\in\Gamma_1,\\ \mu_{k2}(s), & \text{если } s\in\Gamma_2,\end{cases} \quad k=1,2.$

Функции $\mu_{k*}(s)$, соответствующие функциям $\mu_k(s)$, определяются по формуле (2), так что

$$\mu_{k*}(s) = \mu_k(s)\sqrt{(s^2-a^2)(9a^2-s^2)}\,\operatorname{sgn}(s-a),\ k=1,\,2.$$

С другой стороны, функция $\Upsilon(z)$ определена в (7), поэтому получаем равенства

$$w[\mu_1](x)+\nu[\mu_2](x) = \operatorname{Re}[q(z)-p(z)], \tag{16}$$

$$\nu[\mu_1](x)-w[\mu_2](x) = \operatorname{Im}[q(z)-p(z)], \tag{17}$$

В результате находим

$$\mu_{1*}(s) = \frac{4\sqrt{(a-s)(3a-s)}}{\sqrt[4]{\left[(s+a)^2+4b^2\right]\left[(3a+s)^2+4b^2\right]}}\left\{-\left[s^3+6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s+\right.\right.$$
$$+6a^3-4ab^2\big]\sin\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{s+a}+\arctan\frac{2b}{s+3a}\right)\right]+$$
$$\left.+\left(3bs^2+12abs+11a^2b\right)\cos\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{s+a}+\arctan\frac{2b}{s+3a}\right)\right]\right\}, \quad s\in\Gamma_1;$$

$$\mu_{1*}(s) = \frac{4\sqrt{(a+s)(3a+s)}}{\sqrt[4]{\left[(s-a)^2+4b^2\right]\left[(3a-s)^2+4b^2\right]}}\left\{-\left[s^3-6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s-\right.\right.$$
$$-6a^3+4ab^2\big]\sin\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{3a-s}-\arctan\frac{2b}{s-a}\right)\right]+$$
$$\left.+\left(-3bs^2+12abs-11a^2b\right)\cos\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{3a-s}-\arctan\frac{2b}{s-a}\right)\right]\right\}, \quad s\in\Gamma_2;$$

$$\mu_{2*}(s) = \frac{4\sqrt{(a-s)(3a-s)}}{\sqrt[4]{\left[(s+a)^2+4b^2\right]\left[(3a+s)^2+4b^2\right]}}\left\{\left[s^3+6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s+\right.\right.$$
$$+6a^3-4ab^2\big]\cos\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{s+a}+\arctan\frac{2b}{s+3a}\right)\right]+$$
$$\left.+\left(3bs^2+12abs+11a^2b\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{s+a}+\arctan\frac{2b}{s+3a}\right)\right]\right\}, \quad s\in\Gamma_1;$$

$$\mu_{2*}(s) = \frac{4\sqrt{(a+s)(3a+s)}}{\sqrt[4]{\left[(s-a)^2+4b^2\right]\left[(3a-s)^2+4b^2\right]}}\left\{\left[s^3-6as^2+\left(11a^2-2b^2\right)s-\right.\right.$$
$$-6a^3+4ab^2\big]\cos\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{3a-s}-\arctan\frac{2b}{s-a}\right)\right]+$$
$$\left.+\left(-3bs^2+12abs-11a^2b\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2b}{3a-s}-\arctan\frac{2b}{s-a}\right)\right]\right\}, \quad s\in\Gamma_2.$$

В концевых точках Γ_1, Γ_2 найдем предельные значения, которые можно использовать в численных методах:

$$\mu_{1*}(\pm 3a) = \mp \frac{8a^2\sqrt{3b}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}} \left[(a+b)\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right) + (a-b)\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right)\right],$$
$$\mu_{1*}(\pm a) = \mp \frac{8a^2\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}} \left[(a+b)\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right) + (a-b)\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right)\right],$$
$$\mu_{2*}(\pm 3a) = \mp \frac{8a^2\sqrt{3b}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}} \left[(b-a)\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right) + (a+b)\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right)\right],$$
$$\mu_{2*}(\pm a) = \pm \frac{8a^2\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}} \left[(b-a)\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right) + (a+b)\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}\right)\right].$$

Равенства (16), (17) можно использовать в целях проверки численных алгоритмов, предназначенных для вычисления потенциалов с плотностью, заданной на разомкнутых кривых. Такие алгоритмы были предложены, например, в [13].

3. ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пользуясь предельными значениями для потенциалов (см. [17]), найдем предельные значения нормальной производной при $x \to x(s) \in \Gamma^{\pm}$ выражений, стоящих в левых частях тождеств (16), (17). Тогда из (16) получим

$$\pm\frac{1}{2}\mu_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu_1(\sigma)\frac{\sin(V(x(s),\sigma)-\alpha(s))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu_2(\sigma)\frac{\cos(V(x(s),\sigma)-\alpha(s))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma = \pm\operatorname{Re}\left.\frac{\partial q(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma^+} - \operatorname{Re}\left.\frac{\partial p(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma}. \quad (18)$$

Из (17) находим

$$\mp\frac{1}{2}\mu_2(s) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu_2(\sigma)\frac{\sin(V(x(s),\sigma)-\alpha(s))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu_1(\sigma)\frac{\cos(V(x(s),\sigma)-\alpha(s))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma = \pm\operatorname{Im}\left.\frac{\partial q(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma^+} - \operatorname{Im}\left.\frac{\partial p(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma}. \quad (19)$$

Второй интеграл в обоих соотношениях является сингулярным и понимается в смысле главного значения по Коши. Верхний знак соответствует тождеству на Γ^+, а нижний — тождеству на Γ^-. Тем самым каждое из соотношений (18), (19) определяет по два тождества. Тождества (18) вместе с условиями (5), где $N = 2$, можно рассматривать как систему граничных сингулярных интегральных уравнений относительно функций $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$. Аналогично тождества (19) с условиями (5), где $N = 2$, можно рассматривать как другую систему сингулярных интегральных уравнений относительно $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$. При решении краевых задач вне разомкнутых кривых на плоскости методом потенциалов возникают как раз такие системы интегральных уравнений. Определенные выше функции $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ из тождеств (16), (17) дают явное решение системы уравнений (18) с условиями (5), где $N = 2$. Кроме того, эти же функции $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ дают явное решение системы уравнений (19) с условиями (5), где $N = 2$. Правые части в (18), (19) можно упростить, используя формулу (11) и соотношения

$$\left.\frac{\partial q(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma^+} = i(q^+(t))' = \frac{2itp(t)}{q^+(t)},$$
$$\frac{\partial p(z)}{\partial x_2} = -2x_2 + 2ix_1,$$

а $q^+(t)$ на Γ_1 и на Γ_2 определяется в (12) и (13). В свою очередь выражение $tp(t)$ на Γ_1 и на Γ_2 определяется в (14) и (15).

Используя расположение прямолинейных отрезков Γ_1 и Γ_2, учитывая формулы (4) и тот факт, что $\alpha(s) = 0$ на Γ, тождества (18) можно записать в следующем виде. На Γ_1:

$$\pm\frac{1}{2}\mu_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{2b\mu_1(\sigma)}{(s-\sigma+4a)^2+(2b)^2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mu_2(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{(s-\sigma+4a)\mu_2(\sigma)}{(s-\sigma+4a)^2+(2b)^2}d\sigma = \pm\operatorname{Re}\frac{2itp(t)}{q^+(t)} + 2b,$$
$$t = s+2a+ib, \quad s\in[-3a,-a]; \quad (20)$$

на Γ_2:

$$\pm\frac{1}{2}\mu_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{-2b\mu_1(\sigma)}{(s-\sigma-4a)^2+(2b)^2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{(s-\sigma-4a)\mu_2(\sigma)}{(s-\sigma-4a)^2+(2b)^2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\mu_2(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma = \pm\operatorname{Re}\frac{2itp(t)}{q^+(t)} - 2b,$$
$$t = s-2a-ib, \quad s\in[a,3a]. \quad (21)$$

Аналогично тождества (19) запишем в следующем виде. На Γ_1:

$$\mp\frac{1}{2}\mu_2(s) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{2b\mu_2(\sigma)}{(s-\sigma-4a)^2+(2b)^2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mu_1(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{(s-\sigma+4a)\mu_1(\sigma)}{(s-\sigma+4a)^2+(2b)^2}d\sigma = \pm\operatorname{Im}\frac{2itp(t)}{q^+(t)} - 2(s+2a),$$
$$t = s+2a+ib, \quad s\in[-3a,-a]; \quad (22)$$

на Γ_2:

$$\mp\frac{1}{2}\mu_2(s)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{-2b\mu_2(\sigma)}{(s-\sigma-4a)^2+(2b)^2}d\sigma+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{(s-\sigma-4a)\mu_1(\sigma)}{(s-\sigma-4a)^2+(2b)^2}d\sigma+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\mu_1(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma=\pm\,\mathrm{Im}\,\frac{2itp(t)}{q^+(t)}-2(s-2a),$$
$$t=s-2a-ib,\quad s\in[a,3a].\qquad(23)$$

В (20)–(23), как и в (18), (19), функция $q^+(t)$ на Γ_1 и на Γ_2 берется из (12) и (13), а функция $tp(t)$ на Γ_1 и на Γ_2 берется из (14) и (15).

Тождества (20)–(23) можно использовать для проверки численных методов, предназначенных для решения сингулярных интегральных уравнений.

4. ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Различные краевые задачи для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости, включающие задачу Неймана, рассматривались в [7, 12]. В обозначениях разд. 2 рассмотрим следующую задачу Неймана вне двух разрезов, расположенных на отрезках двух различных параллельных прямых.

Задача N. *Найти функцию $u(x)$, исчезающую на бесконечности, удовлетворяющую в $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ уравнению Лапласа $\Delta u(x)=0$ и граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x(s)\in\Gamma^\pm}=F^\pm(s).\qquad(24)$$

Рассмотрим 2 случая.

I. Пусть

$$F^\pm(s)=\pm\,\mathrm{Re}\left.\frac{\partial q(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma^+}-\mathrm{Re}\left.\frac{\partial p(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma}.$$

Тогда, разыскивая решение $u(x)$ задачи Неймана в виде комбинации логарифмического и углового потенциалов $u(x)=w[\mu_1](x)+\nu[\mu_2](x)$, где плотность углового потенциала μ_2 удовлетворяет условиям (5) с $N=2$, и подставляя функцию $u(x)$ в граничное условие (24), получаем систему сингулярных интегральных уравнений (18) относительно плотностей μ_1 и μ_2. Как показано в предыдущем разделе, эта система вместе с условиями (5), где $N=2$, имеет явное решение. Более того, явное решение задачи Неймана в данном случае представимо в виде левой и правой частей тождества (16). Явное решение задачи Неймана в виде правой части тождества (16) можно использовать для тестирования различных численных методов (разностных и др.), предназначенных для решения граничных задач вне разомкнутых кривых на плоскости.

II. Пусть

$$F^\pm(s)=\pm\,\mathrm{Im}\left.\frac{\partial q(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma^+}-\mathrm{Im}\left.\frac{\partial p(z)}{\partial x_2}\right|_{z=t(s)\in\Gamma}.$$

Тогда, разыскивая решение $u(x)$ задачи Неймана в виде комбинации логарифмического и углового потенциалов $u(x)=\nu[\mu_1](x)-w[\mu_2](x)$, в которой плотность углового потенциала μ_1 удовлетворяет условиям (5) с $N=2$, и подставляя функцию $u(x)$ в граничное условие (24), получаем систему сингулярных интегральных уравнений (19) относительно плотностей μ_1 и μ_2. В разд. 3 было показано, что эта система уравнений вместе с условиями (5), где $N=2$, имеет явное решение. В данном случае явное решение задачи Неймана представимо в виде левой и правой частей тождества (17). Явное решение задачи Неймана в виде правой части тождества (17) можно использовать для тестирования методов конечных элементов, разностных и других численных методов, применяемых для решения краевых задач на плоскости с разрезами. Явное решение задачи Неймана в виде левой части тождества (17) можно также применить для тестирования численных методов, построенных на методе потенциалов и граничных интегральных уравнений.

Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00422 А) и программы президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Франк Ф., Мизес Р.* // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., 1937.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* // Уравнения математической физики. М.—Л., 1951.
3. *Мусхелишвили Н. И.* // Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.
4. *Лифанов И. К.* // Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
5. *Belotserkovskii S. M., Lifanov I. K.* // Method of discrete vortices. Boca Raton, 1993.
6. *Krutitskii P. A.* // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1997. **16**, N 3. P. 739.
7. *Krutitskii P. A.* // IMA J. of Appl. Math. 1998. **60**. P. 285.
8. *Krutitskii P. A., Krutitskaya N. Ch., Malysheva G. Yu.* // Mathematical Problems in Engineering. 1999. **5**. P. 83.
9. *Крутицкий П. А.* // Дифференциальные уравнения. 1997. **33**. С. 1181.
10. *Крутицкий П. А.* // Доклады академии наук. 2008. **418**, № 4. С. 458.
11. *Крутицкий П. А.* // Дифференциальные уравнения. 2009. **45**, № 1. С. 86.
12. *Крутицкий П. А.* // Дифференциальные уравнения. 2013. **49**, № 9. С. 1100.
13. *Крутицкий П. А., Колыбасова В. В.* // Дифференциальные уравнения. 2016. **52**, № 9. С. 1262.
14. *Крутицкий П. А., Колыбасова В. В.* // Дифференциальные уравнения. 2017. **53**, № 10. С. 1397.
15. *Krutitskii P. A. , Kwak D. Y., Hyon Y. K.* // J. of Eng. Math. 2007. **59**. P. 25.
16. *Габов С. А.* // Матем. сборник. 1977. **103(145)**, № 4. С. 490.
17. *Крутицкий П. А.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. **34**, № 8–9. С. 1237.
18. *Крутицкий П. А.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. **34**, № 11. С. 1652.
19. *Мусхелишвили Н. И.* // Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
20. *Гахов Ф. Д.* // Краевые задачи. М., 1963.

Explicit Relations for Harmonic Potentials with the Density Defined at Two Parallel Segments

P. A. Krutitskii[1,a], **V. V. Kolybasova**[2,b]

[1]*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow 125047, Russia.*
[2]*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a]*krutitsk@mail.ru*, [b]*kolybasova@physics.msu.ru*.

Explicit relations for harmonic potentials are obtained when the density of the potentials is defined at two segments of parallel straight lines. These results can be used for testing numerical algorithms of calculating the harmonic potentials in boundary value problems outside open arcs in a plane. Moreover, explicit solutions to two systems of singular integral equations are obtained, and these solutions can be used for testing numerical methods for solving singular integral equations. Futhermore, explicit solutions to Neumann problem for the Laplace equation are obtained for specific functions in the boudary conditions.

Keywords: 2D Laplace equation, logarithmic potential, angular potential, singular integral equations.
PACS: 02.30.Em.
Received 26 July 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 1. Pp. 1–7.

Сведения об авторах

1. Крутицкий Павел Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотрудник; тел.: (499) 220-78-84, e-mail: krutitsk@mail.ru.
2. Колыбасова Валентина Викторовна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: kolybasova@physics.msu.ru.