

Редукция мультиплексированных квантовых фантомных изображений

Д. А. Балакин,^{1,а} А. В. Белинский^{2,б}

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
¹кафедра математического моделирования и информатики, ²кафедра физики Земли.
 Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 18.06.2018, после доработки 20.10.2018, принята к публикации 30.10.2018.

Реализация фантомных изображений позволяет извлечь информацию об объекте из пространственной корреляционной функции между фотонами, взаимодействовавшими с объектом, и фотонами восстанавливающего канала/каналов. Восстанавливающий пучок не взаимодействует с объектом, но регистрируется ПЗС-матрицей. Математический метод редукции измерения позволяет использовать как наличие взаимных корреляций мультиплексированных фантомных изображений, так и априорную информацию исследователя о том, каким может быть изображение исследуемого объекта, для улучшения качества восстановленного изображения. Информацией об объекте является разреженность результата заданного преобразования распределения прозрачности. Компьютерное моделирование восстановления изображения по мультиплексированным фантомным изображениям, формируемым в поле четырехчастотных запутанных квантовых состояний, подтвердило эффективность предложенного алгоритма даже при освещении объекта исследования небольшим числом фотонов.

Ключевые слова: редукция измерения, фантомные изображения, мультиплексированные фантомные изображения, запутанные фотоны, сжатые измерения.

УДК: 519.25. PACS: 07.05.Pj, 42.50.Ex.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для расширения визуальных возможностей человека разработана обширная высокотехнологичная база, различные высокочувствительные, высокоточные и скоростные камеры. Тем не менее до сих пор существуют объекты, прямое оптическое наблюдение которых затруднено. Это в первую очередь полутонные биологические объекты, особо чувствительные к пронизывающему их излучению. Фантомные изображения — один из вариантов решения этой проблемы. Для формирования фантомных изображений необходим источник коррелированных световых пучков, один из которых взаимодействует с объектом, а другой — нет [1]. При этом в объектном канале детектор дает информацию только о полной интенсивности прошедшего излучения. Сопряженный пучок не взаимодействует с объектом, но регистрируется ПЗС-матрицей, допуская измерение пространственной корреляционной функции интенсивности между двумя каналами. Это явление было экспериментально реализовано сначала при получении коррелированных световых пучков с помощью параметрического рассеяния фотонов [2, 3]. Позднее фантомные изображения были получены с помощью некогерентного квазиплоского светового излучения (см. [4–9] и цитируемую там литературу). В настоящее время этот способ формирования фантомных изображений является основным [10–13].

В настоящей работе изучается применение многомодовых запутанных квантовых состояний света, которые позволяют создать одновременно несколько фантомных изображений (мультиплексировать фантомные изображения) [14–17] с различающимися частотами. Рассматривается мультиплексирование фантомных изображений с использованием параметрического распада фотонов накачки на два фотона с разными частотами и последующего их смешения в том же кристалле с фотонами накачки [18, 19]. Заметим, что в работах [20–22]

изучено применение для получения фантомных изображений многочастотных некогерентных источников излучения, когда одновременно получают несколько фантомных изображений, а затем их складывают.

Рассмотренные в литературе методы обработки фантомных изображений, как правило, являются методами типа регуляризации, в которых регуляризирующим функционалом является разреженность изображения в некотором базисе [13, 23–25], а собственно минимизируемым функционалом — функционал наименьших квадратов [23–25] или функция правдоподобия [13] либо, напротив, минимизируется [26] функция разреженности (например, норма L^1 в выбранном базисе) при ограничениях, согласно которым измерение восстановленного таким образом изображения дало бы полученные в действительности результаты. В отличие от [13] в методе редукции измерения, включая его предлагаемый вариант, не предполагается только пуассоновская статистика фотоотсчетов, а, в отличие от [13, 23–26], не требуется разреженность изображения в каком-либо базисе. Случай отсутствия информации о разреженности изображения рассмотрен в [15–17], а настоящая статья посвящена тому, как, если такая разреженность известна исследователю, она может быть учтена при обработке изображений для улучшения ее качества.

1. ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАННЫХ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Схема мультиплексирования фантомного изображения, аналогичная рассмотренной в [14–17], приведена на рис. 1. Источником излучения служат связанные параметрические процессы, в которых формируются четырехчастотные запутанные световые поля. На кристалл падает монохроматическое излучение накачки с частотой ω_p . В кристалле фотоны накачки распадаются на два фотона, частоты которых ω_1 и ω_2 связаны: $\omega_p = \omega_1 + \omega_2$.

^а E-mail: balakin_d_a@physics.msu.ru

^б E-mail: belinsky@physics.msu.ru

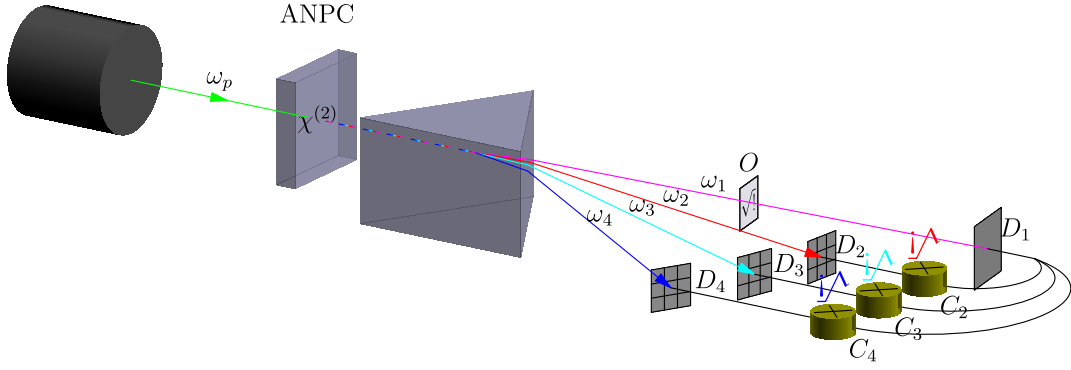


Рис. 1. Схема формирования мультиплицированных фантомных изображений. ANPC — аперийно поляризованный нелинейный кристалл; ω_p — частота накачки; $\omega_1, \dots, \omega_4$ — частоты, на которых генерируются запутанные состояния; O — объект; D_n — фотодетекторы в объектном ($n = 1$) и восстанавливающих ($n = 2, \dots, 4$) каналах; C_n — корреляторы интенсивностей. Объективы в каналах не показаны

Четырехчастотные поля получаются в результате дальнейшего преобразования части полученных фотонов с частотами ω_1 и ω_2 в фотоны с частотами ω_3 и ω_4 в процессах смешения частот, $\omega_p + \omega_1 = \omega_3$, $\omega_p + \omega_2 = \omega_4$. Отметим, что мод в каналах много, но их статистические свойства считаются (приближенно) одинаковыми в каждом канале.

В [18, 19] показано, что эффективный энергообмен между взаимодействующими световыми волнами в указанных процессах можно осуществить в аперийно нелинейных фотонных кристаллах, например в LiNbO_3 , в квазисинхронном режиме, при котором фазовые расстройки Δk_j между взаимодействующими волнами компенсируются векторами обратной нелинейной решетки. Заметим, что рассматриваемый процесс был недавно осуществлен посредством схемы с двумя нелинейными фотонными кристаллами [27] при изучении спектра фотонной пары на частоте, большей частоты накачки.

Рассмотрим рис. 1, где в объектном канале используется детектор, интегрирующий излучение по всей апертуре. Пусть фотонный кристалл достаточно тонок, так что полоса усиления поперечных волновых чисел параметрического преобразования существенно превышает ширину волнового спектра изображаемого объекта. Заметим, что, согласно [14], это условие приводит к тому, что дифракционными эффектами можно пренебречь. В противном случае дифракция приводит к размытию изображения объекта и корреляционные функции (1), (2) пропорциональны не коэффициенту пропускания объекта, а его свертке с фурье-образами произведения пространственно-частотных коэффициентов нелинейного преобразования (ср. с формулами (13), (14) в [12] при отсутствии мультиплексирования). Кроме того, возможно применение для освещения объекта оптических солитонов, обладающих устойчивой пространственной топологией [28].

Получаемые фантомные изображения характеризуются корреляционными функциями четвертого порядка $G_j(\mathbf{r}_j)$, $j = 2, 3, 4$, которые являются средними (по вакуумному состоянию полей на входе нелинейного кристалла) операторов фантомных изображений в представлении Гейзенберга — операторов взаимных флуктуаций интенсивностей 1-го и j -го каналов, и корреляционными функциями восьмого порядка $G_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$, $i, j = 2, 3, 4$, описывающими отклонение фактически измеренных корреляций фотоотсчетов 1-го и j -го кана-

лов от их средних значений. Как показано в [14, 17], при указанных условиях корреляционная функция четвертого порядка имеет вид

$$G_j(\mathbf{r}_j) = \left(\frac{k_1}{2\pi f'} \right)^2 \left| \int Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) d\mathbf{r}_1 \right|^2 |T(-\mathbf{r}_j)|^2, \quad (1)$$

а корреляционная функция восьмого порядка равна

$$G_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{k_1}{2\pi f'} \right)^4 |T(-\mathbf{r}_i)|^2 |T(-\mathbf{r}_j)|^2 \times \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j). \quad (2)$$

Здесь $T(\mathbf{r})$ — коэффициент пропускания исследуемого объекта в точке \mathbf{r} ,

$$Q_{(11j)}(\mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} Q_{11}(\mathbf{q})Q_{j1}^*(\mathbf{q}) + Q_{13}(\mathbf{q})Q_{j3}^*(\mathbf{q}).$$

$Q(\mathbf{q})$ — матрица 4×4 , элемент Q_{mn} которой описывает преобразование в кристалле поля с поперечным волновым вектором \mathbf{q} с частоты ω_n на частоту ω_m (при $m \neq n$) или преобразование оператора поля на частоте ω_m (при $m = n$), f' — фокусное расстояние не показанных на рис. 1 объективов, k_1 — волновое число фотонов в объектном канале. Эта матрица и ее свойства описаны в [29]. Вид функций $W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j)$ в связи с их громоздкостью не показан, он приводится в [17]. Линейная зависимость результатов измерений от прозрачности измеряемого объекта в условиях нелинейного преобразования сигналов (1) вызвана тем, что исследуемый объект находится за нелинейным кристаллом, вследствие чего после прохождения через объект свет в объектном канале не подвергается нелинейному преобразованию.

2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В качестве измерительного устройства в каждом канале используется матрица датчиков, в которой сигнал, регистрируемый каждым из датчиков, пропорционален интенсивности падающего на него излучения. Полученное на выходе i -го коррелятора значение, которое обозначим $\xi^{(i)}(\mathbf{r})$, можно представить как воздействие измерительного преобразователя (ИП) на входной сигнал $f(\mathbf{r}) \sim |T(-\mathbf{r})|^2$.

В настоящей работе мы рассматриваем кусочно-постоянные изображения, т.е. прозрачность в пределах каждого пикселя постоянна. Области постоянной прозрачности и постоянной яркости, соответствующие пикселям, считаются упорядоченными произвольным, но фиксированным образом. В силу этого \mathbf{r} принимает конечное число значений, а f как вектор прозрачностей является элементом конечномерного евклидова пространства \mathcal{F} . Это предположение сделано для упрощения изложения и не является принципиальным. О редукции измерения в бесконечномерном случае см., например, [30, гл. 10] и [31]. Результатом применения описанного ниже алгоритма к объекту, прозрачность которого не кусочно-постоянна, будет оценка линейных комбинаций прозрачности с весами, зависящими от выбранного идеального измерительного прибора (см. ниже) и аппаратной функции реального измерительного прибора. Так, в рассмотренном в качестве примера в разд. 3 случае идеального прибора, соответствующего датчику размером 1 усл. ед., и одинаковым датчикам в восстанавливающих каналах, имеющим втрое больший размер, будет получена оценка распределения прозрачности объекта, усредненного по областям размером 1 усл. ед.

Алгоритм интерпретации изображения должен давать максимально точную оценку интересующей исследователя характеристики исходного изображения f по полученным данным ξ — совокупности зарегистрированных изображений $\xi^{(i)}(\mathbf{r})$, $i = 2, 3, 4$. Рассмотрим метод редукции измерения, позволяющий получить такую оценку. Запишем модель измерения в виде

$$\xi = Af + \nu,$$

где f — априори неизвестный вектор, описывающий распределение прозрачности измеряемого объекта, ν — шум измерения с нулевым средним значением, $\mathbb{E}\nu = 0$, что означает отсутствие систематической погрешности измерений, и ковариационным оператором $\Sigma_\nu = \mathbb{E}\nu\nu^*$, оператор A описывает формирование фантомных изображений и их регистрацию: матричный элемент A_{ij} равен среднему сигналу i -го детектора при единичной прозрачности j -го элемента объекта и нулевой прозрачности остальных. Размерность вектора f определяется числом пикселей изображения, а размерность вектора ξ — числом пикселей в матрице измерения. Условие отсутствия систематической погрешности измерений $\mathbb{E}\nu = 0$ означает, в частности, что из результатов измерений вычтено математическое ожидание их составляющей, связанной с темновыми шумами детекторов, аналогично [32].

Операторы A и Σ_ν связаны с рассмотренными выше корреляционными функциями. Поскольку в измерительной схеме используются корреляторы, измеряющие корреляции между первым каналом и остальными, матрица описывающего воздействие ИП на изображение оператора A имеет блочный вид и состоящей из трех блоков, выражающих сигналы на выходах корреляторов — корреляции объектного канала с воспроизводящими:

$$A = \begin{pmatrix} B_2C_2 \\ B_3C_3 \\ B_4C_4 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где при условиях, при которых в [17] получены корреляционные функции фантомных изображений 2-го (1) и 4-го порядка (2), матрицы C_2 – C_4 равны единичным, умноженным (с точностью до множителя, характеризующего выбор единиц измерения) на размер пикселя и множитель перед $|T(\mathbf{r}_i)|^2$ в выражении для корреляционной функции G_j (1), а матрицы B_2 – B_4 описывают детекторы: матричный элемент $(B_i)_{pk}$ равен отклику детектора в i -м канале, находящегося в p -й позиции, на единичную яркость k -го пикселя и нулевую яркость остальных. Заметим, что при учете дифракции, влиянием которой, как говорилось выше, при условиях, при которых были получены корреляционные функции (1) и (2), можно пренебречь, матрицы C_2 – C_4 не кратны единичным, а описывают операторы типа свертки.

Матрица ковариационного оператора погрешностей также имеет блочный вид

$$\Sigma_\nu = \begin{pmatrix} B_2\Sigma_{22}(f)B_2^* & B_2\Sigma_{23}(f)B_3^* & B_2\Sigma_{24}(f)B_4^* \\ B_3\Sigma_{32}(f)B_2^* & B_3\Sigma_{33}(f)B_3^* & B_3\Sigma_{34}(f)B_4^* \\ B_4\Sigma_{42}(f)B_2^* & B_4\Sigma_{43}(f)B_3^* & B_4\Sigma_{44}(f)B_4^* \end{pmatrix} + \Sigma_{\nu'}, \quad (4)$$

где элемент с индексами k, k' блока Σ_{ij} равен (с точностью до множителя, зависящего от единиц измерения) значению интеграла G_{ij} (2) по значениям \mathbf{r}_i , принадлежащим k -му пикселю и по значениям \mathbf{r}_j , принадлежащим k' -му пикселю, где порядок нумерации пикселей тот же, что и в матрице оператора A . Слагаемое $\Sigma_{\nu'}$ — ковариационный оператор не связанной с формированием фантомных изображений части погрешности ν' , например теплового шума в электросхемах и погрешности оцифровки. Основная часть шума, возникающего до корреляторов, подавляется ими при условии независимости этого шума в объектном и воспроизводящих каналах, но к шуму, возникающему после корреляторов, это не относится.

В выражениях (3) и (4) предполагается единичная квантовая эффективность детекторов и нулевое время срабатывания схемы совпадений, т.е. их безынерционность. К чему же приведет невыполнение этих условий, что всегда имеет место на практике?

Неидеальность квантовой эффективности детекторов повлечет за собой пропуск части фотонов, что учитывается добавлением к (3) и (4) соответствующих множителей, определенных квантовой эффективностью детекторов, и дополнительного слагаемого к (4), характеризующего увеличение шума из-за пропуска части фотонов. Таким образом, неединичная квантовая эффективность детекторов повышает погрешность результата измерения и снижает точность оценки распределения прозрачности объекта.

Инерционность схемы совпадений приводит к дополнительному усреднению корреляционных функций по времени срабатывания и к тому, что часть шумовых фотонов, регистрируемых одним из детекторов в течение времени срабатывания после регистрации фотона в другом канале соответствующим детектором, увеличивает измеренные значения корреляций. Однако малоинтенсивное освещение объекта, обычно имеющее место при формировании и регистрации фантомных изображений, практически нивелирует этот фактор хотя бы потому, что вероятность случайных совпадений при небольшом количестве фотонов

(за время срабатывания) снижается. Тем не менее при проведении реального эксперимента соответствующие поправки легко могут быть введены в компьютерную часть обработки изображений.

Задача интерпретации измерения заключается в построении по результату измерения ξ наиболее точной оценки сигнала Uf , где оператор $U \in \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ описывает идеальный (для исследователя) измерительный прибор.

В силу линейности зависимости результатов измерений от f можно применить для решения задачи модель $[A, \Sigma_\nu, U]$, которая описана в монографии [30]. Если процесс интерпретации описывается линейным оператором R ($R\xi$ — интерпретация измерения ξ), то сопутствующая среднеквадратичная (с. к.) погрешность в наилучшем по f случае, $h(R, U) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} \|R\xi - Uf\|^2$, как показано в [30], минимальна при R , равном оператору линейной несмещенной редукции

$$R_* \stackrel{\text{def}}{=} U(A^* \Sigma_\nu^{-1} A)^{-1} A^* \Sigma_\nu^{-1}, \quad (5)$$

где « $^{-1}$ » обозначает псевдообращение. $h(R_*, U) = \text{tr } U(A^* \Sigma_\nu^{-1} A)^{-1} U^*$, а ковариационным оператором оценки линейной редукции $R_* \xi$ является

$$\Sigma_{R_* \xi} = U(A^* \Sigma_\nu^{-1} A)^{-1} U^*. \quad (6)$$

Синтез такой оценки возможен (с. к. погрешность оценки конечна), если выполняется условие $U(I - A^{-1}A) = 0$, где, как отмечалось выше, A характеризует *реальный* измерительный прибор, а U — *идеальный* измерительный прибор с требуемой исследователю аппаратной функцией и, следовательно, *требуемым разрешением*. Выбор исследователем идеального измерительного прибора ограничен следующими требованиями.

- Условие $U(I - A^{-1}A) = 0$ означает, что если для каких-либо двух *априори возможных* распределений коэффициента пропуска $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ $Uf^{(1)} \neq Uf^{(2)}$, то должно выполняться $Af^{(1)} \neq Af^{(2)}$. Иными словами, синтезируемый идеальный измерительный прибор способен различать лишь объекты, различимые реальным измерительным прибором, с помощью которого выполняется синтез, т. е. лишь объекты, отклик реального измерительного прибора на которые *в отсутствие шума* отличается.
- Уровень шума на выходе синтезированного идеального измерительного прибора, характеризуемый с. к. погрешностью результата редукции (6), должен быть приемлемым для исследователя. Как правило, чем больше желаемое разрешение идеального прибора по сравнению с разрешением реального прибора, тем больше с. к. погрешность синтезируемой оценки.

Выбором U исследователь может выбрать приемлемый, по его мнению, компромисс между получаемым разрешением и достигаемым уровнем шума. Пример синтеза идеального измерительного прибора в случае, когда исследователь априори может указать класс измерительных приборов приемлемого для него качества (например, приемлемого разрешения) приведен в [33, 34] и [30, §9.2]. Подчеркнем, что, в отличие от условия $U(I - A^{-1}A) = 0$, выполнение второго

условия определяется не только свойствами модели измерения, но и *целью исследования* (приемлемым для исследователя уровнем шума).

В рассматриваемом случае, как видно из (3), диагональные элементы каждого блока (которые с точностью до ненулевого множителя равны множителю перед $|T(-\mathbf{r}_j)|^2$ в выражении корреляционной функции G_j) не обращаются в ноль. Соответственно каждый блок A_j оказывается невырожденным, из чего следует, что при невырожденных B_j ошибка редукции принимает лишь конечные значения.

Метод редукции измерения в случае, когда априори известно, что значение интересующей исследователя характеристики u является произвольным элементом не всего \mathcal{U} , а его выпуклого замкнутого подмножества $\mathcal{U}_{\text{пр}}$, рассмотрен в [35, 36]. Уточнение с помощью этой информации оценки редукции определяется решением уравнения

$$\hat{u} = \Pi_{\Sigma_{R_* \xi}} \left(\tilde{R}_{\Sigma_{R_* \xi}} (\xi^T, \hat{u}^T)^T \right) \quad (7)$$

относительно \hat{u} , где « T » обозначает транспонирование, $\tilde{R}_{\Sigma_{R_* \xi}}$ — оператор редукции измерения для измерительного преобразователя $(A^T, U^T)^T$ при шуме, ковариационный оператор которого $\begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \Sigma_{R_* \xi} \end{pmatrix}$, оператор

$$\Pi_{\Sigma_{R_* \xi}}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{U}_{\text{пр}}} (v - u, \Sigma_{R_* \xi}^{-1}(v - u)) \quad (8)$$

описывает проецирование на $\mathcal{U}_{\text{пр}}$ при минимизации расстояния Махаланобиса $\|\Sigma_{R_* \xi}^{-1/2} \cdot\|$, связанного с ковариационным оператором $\Sigma_{R_* \xi}$ (6) погрешности оценки линейной редукции $R_* \xi$. Заметим, что в предложенном в [17] и в [35] методе редукции при использовании такой же информации применялось проецирование при минимизации «обычного» евклидова расстояния, а не расстояния Махаланобиса. В [36] показаны преимущества проецирования при минимизации расстояния Махаланобиса, а не евклидова расстояния.

2.1. Представление имеющейся у исследователя информации об объекте исследования

Очевидно, что априори $|T(-\mathbf{r}_j)|^2 \in [0, 1]$, откуда $f \in [0, 1]^{\dim \mathcal{F}}$, $Uf \in [0, 1]^{\dim \mathcal{F}}$.

Предполагается также, что распределение прозрачности исследуемого объекта не является произвольным: прозрачности соседних пикселей, как правило, отличаются незначительно, и вследствие этого в определенном (априори известном) базисе изображение является разреженным (значительная часть его компонент нулевая), как и при обработке фантомных изображений методами сжатых измерений [13, 25, 32]. Предположение « i -я компонента оценки \hat{u} является нулевой в заданном базисе» рассматривается как статистическая гипотеза, проверяемая по результатам наблюдений при альтернативе, согласно которой эта компонента отлична от нуля. Отклонение этой гипотезы контролируется максимальной вероятностью отклонить гипотезу, если она верна (вероятностью ошибки первого рода) или каким-либо строго монотонно связанным с ней параметром λ статистического критерия.

Исследователю также известен оператор A (3), описывающий условия регистрации изображений, и оператор Σ_{ν} с точностью до вектора f (4), описывающий погрешность зарегистрированных изображений. Заметим, что наилучший по f случай реализуется, если все пиксели одинаково прозрачны.

2.2. Предлагаемый алгоритм редукции

Предлагаемый алгоритм интерпретации мультиплицированных квантовых фантомных изображений методом редукции измерения имеет следующий вид.

1. Вычисление оценки линейной несмещенной редукции $R_*\xi$ (5) по зарегистрированным фантомным изображениям, считая при вычислении ковариационного оператора (4), что все пиксели одинаково прозрачны.
2. Уточнение оценки $R_*\xi$ с помощью информации $\mathcal{U}_{\text{pr}} = [0, 1]^{\dim \mathcal{F}}$ методом (7) с помощью метода простой итерации, т. е. последовательным применением отображения (7), при использовании $\Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}(R_*\xi)$ в качестве начального приближения. Обозначим полученную таким образом оценку \hat{u} .
3. Применение к \hat{u} преобразования T , результат TUf которого для распределения прозрачности исследуемого объекта, по мнению исследователя, является разреженным.
4. Вычисление максимальных (в наихудшем по f случае) дисперсий $\sigma_{(T\hat{u})_1}^2, \dots, \sigma_{(T\hat{u})_{\dim \mathcal{F}}}^2$ компонент $T\hat{u}$ — диагональных матричных элементов $T\Sigma_{R_*\xi}T^*$ и вычисление $T\hat{u}_{\text{thr}}$: $(T\hat{u}_{\text{thr}})_i \stackrel{\text{def}}{=} 0$, если $|(T\hat{u})_i| < \lambda\sigma_{(T\hat{u})_i}$, иначе $(T\hat{u}_{\text{thr}})_i \stackrel{\text{def}}{=} (T\hat{u})_i$.
5. Применение к $T\hat{u}_{\text{thr}}$ обратного преобразования T^{-1} (если преобразование унитарно, то $T^{-1} = T^*$), т. е. вычисление $\hat{u}_{\text{thr}} \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1}T\hat{u}_{\text{thr}}$.
6. Вычисление проекции $\Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}(\hat{u}_{\text{thr}})$, рассматриваемой как интерпретация зарегистрированных фантомных изображений.

Величина $\lambda \geq 0$ является параметром алгоритма. Он отражает приемлемый для исследователя компромисс между подавлением шума (чем больше λ , тем больше подавляется шум) и искажением изображений, компоненты которых близки к 0. Шаг 4 может рассматриваться как проверка статистической гипотезы, согласно которой $(TUf)_i = 0$ (при альтернативе $(TUf)_i \neq 0$) для всех i . В настоящей работе в шаге 4 для этого используется простейший критерий, основанный на неравенстве Чебышева: если $(TUf)_i = 0$, то $\text{Pr}(|(T\hat{u})_i| \geq \lambda\sigma_{(T\hat{u})_i}) \leq \lambda^{-2}$. В связи с этим можно предположить, что искажение изображений несущественно при, по крайней мере, выборе $\lambda \leq 1$, поскольку такое искажение неотличимо от шума. Шаг 4 можно также интерпретировать как замену исходного оператора U на такой, ядру которого принадлежат наиболее пораженные шумом компоненты оценки после выбранного преобразования. Как правило, при обработке фантомных изображений методами сжатых измерений в качестве преобразования, результат применения которого к распределению прозрачности исследуемого объекта является разреженным, используется дискретное косинусное преобразование (DCT) [13, 25, 32].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЛАГАЕМОГО АЛГОРИТМА РЕДУКЦИИ

Результаты обработки изображений предлагаемым алгоритмом показаны на рис. 2 для одинаковых датчиков в восстанавливающих каналах, имеющих размер, вдвое больший размера элемента исходного изображения, т. е. при обработке изображения методом редукции, кроме подавления флуктуаций, увеличивается разрешение. Результаты приведены для тех же значений параметров оптической системы, что и в [17]: волновые числа пучков $k_1 = 6 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, $k_3 = 1.7 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, параметр кристалла $\beta = 10 \text{ см}^{-1}$, параметр кристалла $\xi = \gamma/\beta = 0.4$, безразмерная толщина кристалла $\zeta = \beta l = 6$.

Видно, что дополнительная информация о разреженности преимущественно позволяет в большей степени подавить шум, а на получаемое разрешение влияет слабо. Как и предполагалось, при $0 \leq \lambda \leq 1$ эти искажения неразличимы на фоне шума. По мере возрастания λ шум подавляется во все большей степени (ср., например, рис. 2, *г* и *ж*), но также возрастают и искажения, обусловленные отбрасыванием и «значимых» компонент изображения (см., например, рис. 2, *и*), влияние которых при больших λ перевешивает улучшение качества изображения из-за подавления шума в связи с подавлением вместе с шумом и мелких деталей изображения. Поэтому оптимальное значение λ зависит от намерений исследователя: ему целесообразно выбрать максимальное значение λ , при котором сохраняются интересующие его детали. Для этого он может смоделировать регистрацию тестового изображения, содержащего требуемые детали, и использовать максимальное значение λ , при котором эти детали сохраняются, либо задать λ , наблюдая результаты редукции при разных λ . В случае изображения, содержащего резкий

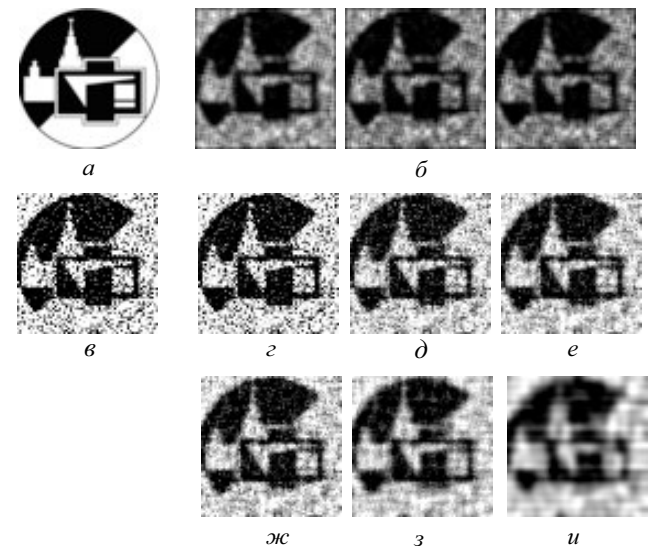


Рис. 2. Обрабатываемые изображения (*б*) объекта исследования (*а*), 64×64 пикселя, полученные при моделировании освещения каждого пикселя объекта в среднем 10 фотонами, и результаты их редукции: *в* — без использования информации о разреженности изображения и при использовании информации о разреженности результата дискретного косинусного преобразования (DCT) и выборе параметра алгоритма $г - \lambda = 0.5$, $д - \lambda = 1.0$, $е - \lambda = 1.25$, $ж - \lambda = 1.5$, $з - \lambda = 2.0$, $и - \lambda = 3.0$

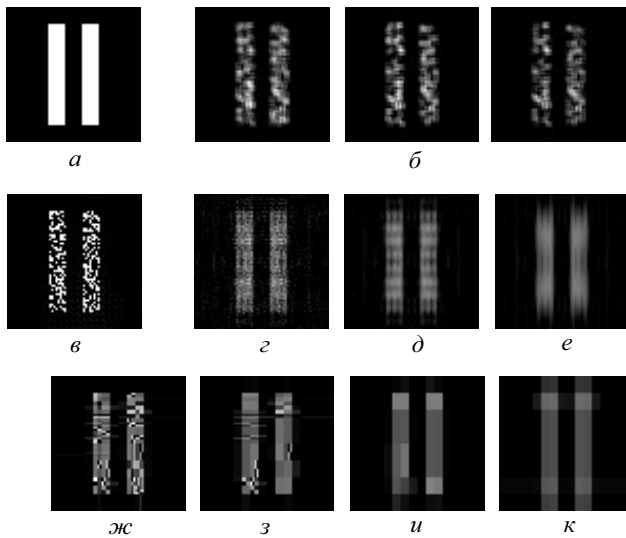


Рис. 3. Обрабатываемые изображения (б) объекта исследования (а), 64×64 пикселя, полученные при моделировании освещения каждого пикселя объекта в среднем 1 фотоном, и результаты их редукции: в — без использования информации о разреженности изображения; при использовании информации о разреженности результата DCT и выборе параметра алгоритма $z - \lambda = 1.25$, $d - \lambda = 1.5$, $e - \lambda = 2.0$; при использовании информации о разреженности результата преобразования Хаара и выборе параметра алгоритма: $ж - \lambda = 1.0$, $з - \lambda = 1.25$, $и - \lambda = 2.0$, $к - \lambda = 3.0$

перепад прозрачности (рис. 3), использование дополнительной информации позволило подавить ложный сигнал в области непрозрачности объекта исследования, но лишь при использовании преобразования Хаара (при использовании дискретного косинусного преобразования ложный сигнал в этой области, напротив, усилился).

Как правило, при обработке фантомных изображений методами сжатых измерений в качестве преобразования, результат применения которого к распределению прозрачности исследуемого объекта является разреженным, используется дискретное косинусное преобразование (DCT) [13, 25, 32]. Хотя в работе [37] рассматривается применение различных преобразований (тождественного преобразования, дискретного вейвлет-преобразования, DCT) и показано преимущество в ряде ситуаций DCT, представляется, что преобразование Хаара может быть предпочтительно в случае распределения прозрачности, содержащего области слабо изменяющейся прозрачности с резкими границами, если эти области имеют большой размер по сравнению с разрешением идеального измерительного преобразователя, а исследователю важно установить положение этих границ. Это предположение подтверждают рис. 3, з–и, из которых видно, что преобразование Хаара в этом случае, в отличие от рис. 2, позволяет использовать более высокие значения λ без существенных искажений (ср., например, рис 3, е и и, где использование DCT при том же λ приводит к размытию поперечных границ щели).

Таким образом, использование преобразования Хаара для формализации информации исследователя о разреженности распределения прозрачности объекта исследования предпочтительно в случае распределения

прозрачности, содержащего области слабо изменяющейся прозрачности с резкими границами, если эти области имеют большой размер по сравнению с разрешением идеального измерительного преобразователя, а исследователю важно установить положение этих границ. Использование же дискретного косинусного преобразования предпочтительно в случае распределения прозрачности, содержащего незначительные перепады прозрачности, которые требуется показать при интерпретации, например, биологических объектов, не имеющих резко контрастных границ. Значения параметра $\lambda \sim 1 - 1.5$ оптимальны в случае наличия мелких деталей, которые интересуют исследователя, в противном случае целесообразно использовать большие значения $\lambda \sim 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Актуальная проблема повышения помехозащищенности обостряется работой системы передачи и приема фотонов в режиме их счета ввиду повышенной информативности каждого фотона или его отсутствия. Мультиплексирование фантомных изображений позволяет увеличить помехозащищенность, поскольку увеличивает количество передаваемой информации, что может быть использовано для улучшения качества интерпретации полученных данных.

В этом случае известная исследователю дополнительная информация о схеме измерения и об объекте исследования позволяет еще больше подавить шум при тех же условиях регистрации или ухудшить условия регистрации (например, уменьшить число фотонов) при том же качестве интерпретации. В качестве дополнительной информации о схеме измерения в работе выступают корреляционные функции мультиплексированных фантомных изображений. В качестве же дополнительной информации об объекте исследования выступает информация, что распределение прозрачности объекта исследования не произвольно, а прозрачности соседних пикселей, как правило, отличаются незначительно. Эта информация формализуется как разреженность результата заданного преобразования распределения прозрачности, например, дискретного косинусного преобразования, аналогично сжатым измерениям.

В отличие от сжатых измерений, в которых, как правило, погрешность измерения моделируется как произвольный вектор с ограниченной нормой, в предлагаемом методе для выбора компонент оценки, которые считаются нулевыми, учитывается часть статистических свойств погрешности, а именно их дисперсии. Использование не только дисперсий компонент полученной оценки, но и их ковариаций является темой дальнейших исследований.

Компьютерный эксперимент, проведенный на основании разработанного алгоритма, показал высокую эффективность предложенного метода работы с фантомными изображениями как с точки зрения повышения их качества, так и помехозащищенности: плохо различимые изображения в результате такой обработки становятся хорошо узнаваемыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00598А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский А. В., Клышко Д. Н. // ЖЭТФ. 1994. **105**, № 3. С. 487. (Belinskii A. V., Klyshko D. N. // JETP. 1994. **78**, N 3. P. 259.)
2. Strekalov D. V., Sergienko A. V., Klyshko D. N., Shih Y. H. // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**, N 18. P. 3600.
3. Pittman T. B., Shih Y. H., Strekalov D. V., Sergienko A. V. // Phys. Rev. A. 1995. **52**, N 5. R3429.
4. Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**, N 9. 093602.
5. Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 2004. **70**, N 1. 013802.
6. Гатти А., Брамбилла Э., Баке М., Луджуато Л. А. Фантомные изображения // Квантовое изображение / Под ред. М. И. Колобова. Гл. 5. 2009. P. 81. (Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. Ghost Imaging // Quantum Imaging / Ed. by M. I. Kolobov. Ch. 5. 2007. P. 79.)
7. Erkmann B. I., Shapiro J. H. // Advances in Optics and Photonics. 2010. **2**, N 4. P. 405.
8. Shapiro J. H., Boyd R. W. // Quantum Information Processing. 2012. **11**, N 4. P. 949.
9. Shirai T. // Progress in Optics. 2017. **62**. P. 1.
10. Erkmann B. I., Shapiro J. H. // Phys. Rev. A. 2009. **79**, N 2. 023833.
11. Ferri F., Magatti D., Lugiato L. A., Gatti A. // Phys. Rev. Lett. 2010. **104**, N 25. 253603.
12. Tasca D. S., Aspden R. S., Morris P. A. et al. // Optics Express. 2013. **21**, N 25. P. 30460.
13. Morris P. A., Aspden R. S., Bell J. E. C. et al. // Nature Communications. 2015. **6**. P. 5913.
14. Чиркин А. С. // Письма в ЖЭТФ. 2015. **102**, № 6. С. 444. (Chirkin A. S. // JETP Letters. 2015. **102**, N 6. P. 404.)
15. Balakin D. A., Belinsky A. V., Chirkin A. S., Yakovlev V. S. Multiplicated ghost images reconstruction // ICONO/LAT 2016 Technical Digest. ICONO-03 Quantum and Atom Optics. 2016.
16. Balakin D. A., Belinsky A. V., Chirkin A. S. // Journal of Russian Laser Research. 2017. **38**, N 2. P. 164.
17. Балакин Д. А., Белинский А. В., Чиркин А. С. // ЖЭТФ. 2017. **152**, № 2. С. 252. (Balakin D. A., Belinsky A. V., Chirkin A. S. // JETP. 2017. **125**, N 2. P. 210.)
18. Чиркин А. С., Шутлов И. В. // Письма в ЖЭТФ. 2007. **86**, № 11. С. 803. (Chirkin A. S., Shutov I. V. // JETP Letters. 2008. **86**, N 11. P. 693.)
19. Чиркин А. С., Шутлов И. В. // ЖЭТФ. 2009. **136**, № 4. С. 639. (Chirkin A. S., Shutov I. V. // JETP. 2009. **109**. P. 547.)
20. Duan D., Du Sh., Xia Yu. // Phys. Rev. A. 2013. **88**, N 5. 053842.
21. Zhang D.-J., Li H.-G., Zhao Q.-L. et al. // Phys. Rev. A. 2015. **92**, N 1. 013823.
22. Chan K. W. C., O'Sullivan M. N., Boyd R. W. // Optics Letters. 2009. **34**, N 21. P. 3343.
23. Zerom P., Chan K. W. C., Howell J. C., Boyd R. W. // Phys. Rev. A. 2011. **84**, N 6. 061804.
24. Gong W., Han S. // Phys. Lett. A. 2012. **376**, N 17. P. 1519.
25. Gong W., Han S. // Scientific Reports. 2015. **5**, N 1. P. 9280.
26. Katz O., Bromberg Y., Silberberg Y. // Appl. Phys. Lett. 2009. **95**, N 13. 131110.
27. Suchowski H., Bruner B. D., Israel Yo. et al. // Appl. Phys. B. 2016. **122**, N 2. P. 25.
28. Губин М. Ю., Гладуш М. Г., Лексин А. Ю. и др. // Оптика и спектроскопия. 2016. **121**, № 5. С. 778. (Gubin M. Yu., Gladush M. G., Leksin A. Yu. et al. // Optics and Spectroscopy. 2016. **121**, N 5. P. 729.)
29. Сайгин М. Ю., Чиркин А. С. // ЖЭТФ. 2010. **138**, № 1. С. 16. (Chirkin A. S., Saygin M. Yu. // JETP. 2010. **111**, N 1. P. 11.)
30. Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3 изд. М.: Физматлит, 2012.
31. Чуличков А. И., Юань Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 3. С. 15. (Chulichkov A. I., Yuan B. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2014. **69**, № 3. P. 218.)
32. Shi X., Huang X., Nan S. et al. // Laser Phys. Lett. 2018. **15**, N 4. 045204.
33. Пытьев Ю. П. // ДАН. 1980. **255**, № 3. С. 540.
34. Жохов Н. Л., Козлов А. А., Пытьев Ю. П. // Матем. моделирование. 1991. **3**, № 7. С. 57.
35. Балакин Д. А., Пытьев Ю. П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 2. С. 3. (Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 2. P. 101.)
36. Балакин Д. А., Пытьев Ю. П. // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2018. № 5. 180301.
37. Du J., Gong W., Han Sh. // Optics Letters. 2012. **37**, N 6. P. 1067.

Reduction of Multiplexed Quantum Ghost Images

D. A. Balakin^{1,a}, A. V. Belinsky^{1,2,b}

¹Department of Mathematical Modeling and Computer Science, ²Department of Earth Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: ^abalakin_d_a@physics.msu.ru, ^bbelinsky@physics.msu.ru.

Ghost imaging allows extracting information about an object from the spatial correlation function between the photons that interacted with an object and the photons in the reference arm(s). The reference beam does not interact with the object; however, it is measured by a CCD matrix. The mathematical method of measurement reduction allows using both the mutual correlations of multiplexed ghost images and prior information about how the image of the research object can look in order to improve the quality of the reconstructed image. The information about the object is the sparsity of its transparency distribution under a given transform. Computer modelling of image reconstruction using multiplexed ghost images formed by four-mode entangled quantum light states confirms the efficiency of the proposed algorithm even with a small number of photons that illuminate the research object.

Keywords: measurement reduction, ghost images, multiplexed ghost images, entangled photons, compressive sensing.

PACS: 07.05.Pj, 42.50.Ex.

Received 18 June 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 1. Pp. 8–16.

Сведения об авторах

1. Балакин Дмитрий Александрович — физик; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: balakin_d_a@physics.msu.ru.
2. Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, профессор; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@physics.msu.ru.