Функция эволюции оператора $-(-\Delta)^{\nu}$

В. Н. Ваховский,[а] П. И. Пронин[б]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 08.06.2018, после доработки 06.08.2018, принята к публикации 29.08.2018.

Вычислена функция эволюции дифференциального оператора $-(-\Delta)^{\nu}$ в d-мерном евклидовом пространстве. Получено ее аналитическое выражение через пси-функции Фокса–Райта, которое хорошо определенно при как целых, так и нецелых значениях ν и d. Обсуждены возможные применения полученных функций в квантовой теории поля и связи с дробным анализом.

Ключевые слова: метод собственного времени, метод теплового ядра, функции Грина, функции эволюции, пси-функции Фокса–Райта, дробное интегро-дифференцирование.
УДК: 51-71, 51-72, 517.95, 517.984.5, 517.956.227, 517.588, 530.145, 530.145.7.
PACS: 02.30.Gp, 02.30.Jr, 03.70.+k.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование классических уравнений математической физики и их приложений основано на изучении поведения их фундаментальных решений — функций Грина соответствующих линейных дифференциальных операторов. В квантовой теории поля (КТП) функции Грина — пропагаторы элементарных частиц — также играют фундаментальную роль. С помощью перенормированной теории возмущений из них строятся вакуумные средние от произведений фундаментальных полей (которые в КТП также обыкновенно называются функциями Грина, а в статистической физике — корреляционными функциями), эффективное действие теории, учитывающее квантовые поправки, и наблюдаемые в эксперименте величины, например сечения рассеяния.

Однако в середине прошлого века, благодаря основополагающим работам Фока [1], Минакшисундарама [2, 3], Швингера [4] и ДеВитта [5], стало ясно, что вычисление как различных физических величин, так и самих функций Грина удобно проводить с помощью введения новых объектов — функций эволюции, зависящих от дополнительного параметра — «собственного времени» (см. разд. 1). Успех этого нового вычислительного алгоритма, получившего дальнейшее развитие, в частности в работах Сили [6] и Джилки [7, 8], был обусловлен тем фактом, что для дифференциальных операторов второго порядка функция эволюции связана с фундаментальным решением уравнения теплопроводности — хорошо известным «тепловым ядром» (см. разд. 2). Этот факт позволяет построить фундаментальные инварианты дифференциальных операторов — коэффициенты Адамара–Минакшисундарама–ДеВитта–Сили (HMDS).

В настоящее время метод теплового ядра является одним из наиболее мощных инструментов математической физики, находящим применения в широком спектре областей от чистой математики (спектральная геометрия) до анализа финансовых рынков. В КТП его важность обусловлена тем, что, будучи объединенным с методом фонового поля, он позволяет вычислять эффективное действие и исследовать перенормируемость теорий, наличие в них аномалий и т. д. непосредственно в координатном пространстве. Это делает его незаменимым для вычислений в присутствии внешних полей или на искривленном пространстве-времени, что критически важно для калибровочных теорий и особенно для квантования гравитации [9–11].

Метод теплового ядра применим также к операторам высшего порядка. Это имеет значение при регуляризации высшими ковариантными производными, а также для теорий с высшими производными, вызывающими большой интерес в последние годы, – R^2-гравитации, нелокальных и суперперенормируемых теорий [12, 13], моделей Хоравы–Лифшица [14, 15] и т. д. Одна из возможных модификаций метода теплового ядра была предложена в работе [16]. Она состоит в том, что операторы высших порядков деформируются к минимальным операторам, являющимся степенями оператора типа Лапласа, что позволяет использовать тепловое ядро и HMDS-коэффициенты. Обсуждение применения метода теплового ядра для операторов высшего порядка можно также найти в [17, 18].

Тем не менее функции эволюции дифференциальных операторов сами по себе являются важными величинами. Поэтому упомянутая возможность применения метода теплового ядра к операторам высшего порядка не делает менее интересной задачу исследования их функций эволюции, являющихся обобщениями теплового ядра. При этом прежде чем переходить к рассмотрению операторов на многообразиях, необходимо исследовать поведение функций эволюции в евклидовом пространстве. Настоящая статья, посвященная вычислению функции эволюции оператора $-(-\Delta)^{\nu}$, и является первым шагом к реализации программы исследований поведения оператора эволюции для теории с высшими производными.

Разд. 1 и 2 носят вводный характер. В разд. 1 определяется функция эволюции для произвольного дифференциального оператора F в евклидовом пространстве и приводятся соответствующие интегральные представления для функций Грина. Затем в разд. 2 в качестве примера приводится применение стандартного метода теплового ядра к вычислению функции Грина $G_{\Delta^{\nu}}(\mathbf{x})$. В разд. 3 двумя различными способами проводится вычисление функции эволюции оператора $-(-\Delta)^{\nu}$, а в разд. 4 приводится ее представление через пси-функцию Фокса–Райта.

Оказывается, что полученные решения хорошо определены не только при целых, но и при нецелых значениях ν. В последнем случае оператор $-(-\Delta)^{\nu}$

[а] E-mail: vladvakh@gmail.com
[б] E-mail: petr@phys.msu.ru

следует понимать как оператор дробного интегро-дифференцирования — производную Рисса, а уравнение на его функцию эволюции (8) — как дифференциальное уравнение дробного порядка, называемое дробным уравнением диффузии. Соответствующие уравнения и их решения давно обсуждаются в литературе [19–23]. Поэтому в разд. 5 мы кратко обсуждаем отличия настоящей работы от результатов, полученных в [20, 23]. Наконец, в Заключении кратко обсуждаются полученные результаты и перспективы развития их в теории дробного интегро-дифференцирования.

1. МЕТОД СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ

Пусть F — некоторый дифференциальный оператор в плоском d-мерном евклидовом пространстве. Наша задача состоит в нахождении функции Грина этого оператора, т. е. такой функции $G_F(\mathbf{x})$, что

$$FG_F(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}).$$

Эта задача разрешается, если известна функция $U_F(\tau;\mathbf{x})$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\partial_\tau U_F(\tau;\mathbf{x}) = FU_F(\tau;\mathbf{x}) \tag{1}$$

с начальным условием

$$U_F(0;\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \tag{2}$$

В этом случае параметр τ называется «собственным временем», а функция $U_F(\tau) = e^{F\tau}$ — «функцией эволюции» оператора F.

Пусть оператор F таков, что, во-первых, фундаментальное решение $U_F(\tau;\mathbf{x})$ определено при всех $\tau > 0$, во-вторых, $U_F(\tau;\mathbf{x}) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$ (для этого необходимо, чтобы F был строго отрицательным и, в частности, невырожденным) и, наконец, функция $U_F(\tau;\mathbf{x})$ при стремлении τ к бесконечности убывает достаточно быстро, чтобы сходились приведенные ниже интегралы.

Легко видеть, что при выполнении этих трех условий для функции Грина оператора $F-m^2$, где m^2 — некоторая константа, существует интегральное представление

$$G_{F-m^2}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{F-m^2} = \int\limits_0^\infty d\tau e^{-m^2\tau} U_F(\tau;\mathbf{x}). \tag{3}$$

Функция Грина произвольной натуральной степени ν оператора F также выражается через функцию эволюции

$$G_{F^\nu}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{F^\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \int\limits_0^\infty d\tau\tau^{\nu-1} U_F(\tau;\mathbf{x}). \tag{4}$$

Соотношение (4) можно проверить ν раз поочередно действуя на него оператором F и интегрируя по частям. Тот же ответ можно получить, если $\nu-1$ раз продифференцировать представление (3) по параметру m^2, а затем положить $m^2 = 0$.

Известно, что приведенные выше три условия — а значит, и следующие из них представления (3), (4) — заведомо верны, если F — оператор типа Лапласа, получающийся добавлением к лапласиану потенциального члена, и, соответственно, если F^ν — минимальный оператор, являющийся натуральной степенью оператора типа Лапласа. Интересно было бы попытаться точно охарактеризовать класс всех таких (псевдо)дифференциальных операторов для которых существуют представления (3), (4). К сожалению, если эта задача и решена, то соответствующие работы неизвестны авторам. В этой и следующей, готовящейся к публикации статье, мы покажем, что при $m^2 \neq 0$ условия выполняются при произвольном d по крайней мере для всех операторов вида $-(-\Delta)^\nu$ с $\nu > 1/2$, а при $m^2 = 0$ — при $1/2 < \nu < d/2$, а также приведем выражения для более широкого класса операторов.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА $(\Delta - m^2)^\nu$

Если $F = \Delta$ — оператор Лапласа, то уравнение (1) будет уравнением теплопроводности

$$\partial_\tau U_\Delta(\tau;\mathbf{x}) = \Delta U_\Delta(\tau;\mathbf{x}),$$

а начальное условие (2) задают его хорошо известное фундаментальное решение («тепловое ядро»):

$$U_\Delta(\tau;\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4\tau}\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем следующее представление функции Грина оператора $(\Delta - m^2)^\nu$ в виде интеграла по собственному времени[1]:

$$G_{(\Delta-m^2)^\nu}(\mathbf{x}) = \\ = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\nu)} \int\limits_0^\infty d\tau\tau^{\nu-\frac{d}{2}-1} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4\tau} - m^2\tau\right). \tag{6}$$

Также это представление можно получить, если записать функцию Грина через интеграл в импульсном пространстве, стандартным образом представить знаменатель $(k^2+m^2)^\nu$ в виде интеграла от экспоненты $e^{-(k^2+m^2)\tau}$, выделить полный квадрат и взять гауссов интеграл по импульсам.

Интеграл (6) выражается через функции Ханкеля. Для них существует известное интегральное представление (см, напр., [24, с. 30])

$$\pi H^{(1)}_\lambda(\alpha z) = \\ = (-i)^{\lambda+1}\alpha^\lambda \int\limits_0^\infty \exp\left\{\frac{iz}{2}\left(\tau + \frac{\alpha^2}{\tau}\right)\right\} \tau^{-\lambda-1} d\tau,$$

верное при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im}(z\alpha^2) > 0$. Полагая $\lambda = d/2 - \nu$, $z = 2im^2$, $\alpha = x/2m$ и $\alpha z = imx$, получим ($x = \sqrt{\mathbf{x}^2}$)

$$G_{(\Delta-m^2)^\nu}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\nu-1} i\pi}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\nu)} \left(\frac{-ix}{2m}\right)^{\nu-\frac{d}{2}} H^{(1)}_{\frac{d}{2}-\nu}(imx).$$

[1] Заметим, что выбор знака «$-$» перед m^2 обусловлен тем, что мы работаем в евклидовом пространстве. При переходе в пространство Минковского с сигнатурой $(+-\ldots-)$ оператор Лапласа $\Delta = \sum \partial_i^2$ перейдет в оператор Даламбера $-\Box = -\partial_0^2 + \partial_1^2 + \ldots + \partial_{d-1}^2$, а оператор $\Delta - m^2$ — во взятый с минусом оператор Клейна–Гордона $-(\Box + m^2)$. (В импульсном представлении: $-(k^2+m^2)$ перейдет в $k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2$.)

Формуле можно придать более удобный вид, переписав ее через функции Макдональда

$$G_{(\Delta-m^2)^\nu}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\nu-1}2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2m}\right)^{\nu-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}-\nu}(mx).$$

Это выражение справедливо для всех $\operatorname{Re} m^2 > 0$.

В пределе $z \gg |\alpha^2 - 1/4|$ асимптотика функций Макдональда имеет вид $K_\alpha(z) \sim \sqrt{\pi/2z}e^{-z}$. Соответственно при $mx \gg |(d/2-\nu)^2 - 1/4|$

$$G_{(\Delta-m^2)^\nu}(\mathbf{x}) \sim \frac{(-1)^{\nu-1}2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2m}\right)^{\nu-\frac{d}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2mx}}e^{-mx}.$$

В пределе $z \ll \sqrt{\alpha+1}$ имеем

$$K_\alpha(z) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(|\alpha|)}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^{|\alpha|}, & \text{при } \alpha \neq 0,\\ -\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma, & \text{при } \alpha = 0.\end{cases}$$

Соответственно в пределе $mx \ll \sqrt{|d/2-\nu|+1}$ получим следующую асимптотику функции Грина

$$G_{(\Delta-m^2)^\nu}(\mathbf{x}) \sim \begin{cases} C\Gamma\left(\frac{d}{2}-\nu\right)\left(\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{d}{2}-\nu}, & \text{при } d/2 > \nu,\\ C\left(\frac{x}{2m}\right)^{\nu-\frac{d}{2}}\left[-\ln\left(\frac{mx}{2}\right)-\gamma\right], & \\ & \text{при } d/2 = \nu,\\ C\Gamma\left(\nu-\frac{d}{2}\right)m^{d-2\nu}, & \text{при } d/2 < \nu,\end{cases}$$

где $C = (-1)^{\nu-1}2(4\pi)^{-d/2}/\Gamma(\nu)$. В первом случае функция Грина перестает зависеть от m, а в третьем — от $\mathbf{x}$.

Устремляя m к нулю, получим, что при $\nu < d/2$

$$G_{\Delta^\nu}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\nu-1}\Gamma(d/2-\nu)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\nu)}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{d}{2}-\nu}. \tag{7}$$

При $\nu \geqslant d/2$ предела не существует и функция Грина $G_{\Delta^\nu}(\mathbf{x})$ не определена. Если взять исходный интеграл (6), положив в нем $m = 0$, то при $\nu < d/2$ он даст (7), а при $\nu \geqslant d/2$ будет расходиться при больших τ.

3. ФУНКЦИЯ ЭВОЛЮЦИИ ОПЕРАТОРА $-(-\Delta)^\nu$

Перейдем к вычислению функции эволюции оператора $F = -(-\Delta)^\nu$. Будем обозначать ее $U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x})$. Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$\partial_\tau U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = -(-\Delta)^\nu U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}). \tag{8}$$

Его решение записывается в виде следующего интеграла по импульсному пространству ($k = \sqrt{\mathbf{k}^2}$):

$$U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\exp\left(-k^{2\nu}\tau + i\mathbf{k}\mathbf{x}\right). \tag{9}$$

Мы возьмем этот интеграл двумя разными способами.

3.1. Первый способ вычисления $U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x})$

Заметим, что функция эволюции, во-первых, инвариантна относительна вращений $U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = U_{\nu,d}(\tau;\sigma)$, где $\sigma = \mathbf{x}^2/2$, и, во-вторых, масштабно инвариантна $\alpha^d U_{\nu,d}(\alpha^{2\nu}\tau;\alpha\mathbf{x}) = U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x})$. Поэтому она имеет вид

$$U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = C_0\tau^{-\frac{d}{2\nu}}\mathcal{E}_{\nu,d/2}\left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}}\right), \tag{10}$$

где $\mathcal{E}_{\nu,d/2}(z)$ — некоторая неизвестная функция[2], а C_0 — нормировочная постоянная.

Найдем разложение функции $\mathcal{E}_{\nu,d/2}(z)$ в ряд Тейлора. Используя соотношения $\nabla\sigma^k = k\sigma^{k-1}\mathbf{x}$ и $\nabla(\sigma^k\mathbf{x}) = (d+2k)\sigma^k$, по индукции легко проверить, что для произвольной функции $f(\alpha\sigma)$, где α — постоянная, выполнено следующее правило дифференцирования:

$$\Delta^m f(\alpha\sigma) = \\ = (2\alpha)^m\sum_{k=0}^{m} C_m^k\frac{\Gamma(d/2+m)}{\Gamma(d/2+k)}(\alpha\sigma)^k f^{(m+k)}(\alpha\sigma).$$

Полагая $f = \mathcal{E}_{\nu,d/2}$, $\alpha = -1/2\tau^{1/\nu}$, $\sigma = 0$, получим

$$(-\Delta)^m U_{\nu,d}(\tau;0) = C_0\tau^{-\frac{d/2+m}{\nu}}\frac{\Gamma(d/2+m)}{\Gamma(d/2)}\mathcal{E}^{(m)}_{\nu,d/2}(0). \tag{11}$$

Однако эти величины легко вычислить непосредственно:

$$(-\Delta)^m U_{\nu,d}(\tau;0) = \int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}k^{2m}\exp\left(-k^{2\nu}\tau\right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int_0^\infty dk k^{2m+d-1}\exp(-k^{2\nu}\tau) = \\ = \frac{\tau^{-\frac{d/2+m}{\nu}}\Gamma\left(\frac{d/2+m}{\nu}\right)}{(4\pi)^{d/2}\nu\Gamma(d/2)}. \tag{12}$$

Сравнивая выражения (11) и (12), получим, что при выборе нормировки $C_0 = 1/(4\pi)^{d/2}\nu$ функция $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ определяется следующим рядом Тейлора:

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \sum_{m=0}^\infty\frac{e_m}{m!}z^m, \\ \text{где} \quad e_m = \mathcal{E}^{(m)}_{\nu,\alpha}(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m}{\nu}\right)}{\Gamma(\alpha+m)}. \tag{13}$$

3.2. Второй способ вычисления $U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x})$

Выражение (13) можно получить и другим путем. Пусть угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ в выражении (9) равен θ. Проинтегрировав по всем остальным углам, получим:

$$U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\times \\ \times\int_0^\infty e^{-k^{2\nu}\tau}k^{d-1}dk\int_0^\pi e^{ikx\cos\theta}\sin^{d-2}\theta d\theta. \tag{14}$$

Разложим $\exp(ikx\cos\theta)$ в ряд Тейлора и проинтегрируем по θ, пользуясь тем, что интеграл $\int_0^\pi\cos^m\theta\times$ $\times\sin^n\theta d\theta$ равен нулю при нечетных m и $B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$ при четных m:

---

[2] Мы используем для этой функции букву $\mathcal{E}$, поскольку она стоит на месте экспоненты в обычном выражении для теплового ядра (5) и в этом смысле может рассматриваться как одно из ее возможных обобщений. Однако это не функция Миттаг–Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$, которую также рассматривают как обобщение экспоненты и поэтому обозначают той же буквой.

$$\int_0^\pi \exp(ikx\cos\theta)\sin^{d-2}\theta d\theta =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikx)^m}{m!} \int_0^\pi \cos^m\theta \sin^{d-2}\theta d\theta =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikx)^{2m}}{(2m)!} B\left(\frac{d-1}{2}, m+\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m k^{2m}}{4^m m! \Gamma\left(\frac{d}{2}+m\right)}.$$

Здесь в последней строчке мы воспользовались формулой удвоения Лежандра $\sqrt{\pi}\Gamma(2m+1) = 2^{2m}\Gamma(m+1/2)\Gamma(m+1)$.

Подставляя этот результат в (14) и интегрируя по k (этот интеграл в точности совпадает с тем, что был в формуле (12)), получим

$$U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^m}{m!\Gamma(d/2+m)} \times$$
$$\times \int_0^\infty \exp(-k^{2\nu}\tau) k^{2m+d-1} dk =$$
$$= \frac{\tau^{-d/2\nu}}{(4\pi)^{d/2}\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{d/2+m}{\nu}\right)}{m!\Gamma(d/2+m)} \left(\frac{-x^2}{4\tau^{1/\nu}}\right)^m. \quad (15)$$

Полученное выражение совпадает с результатом, задаваемым формулами (10) и (13).

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПСИ-ФУНКЦИИ ФОКСА–РАЙТА

Из разложения (13) следует, что

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = {}_1\Psi_1\left[\left(\frac{\alpha}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right); (\alpha, 1); z\right],$$

где ${}_p\Psi_q[(a,A);(b,B);z]$ — пси-функция Фокса–Райта, задаваемая рядом Тейлора

$${}_p\Psi_q[(a,A);(b,B);z] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+A_1k)\ldots\Gamma(a_p+A_pk)}{\Gamma(b_1+B_1k)\ldots\Gamma(b_q+B_qk)} \frac{z^k}{k!}. \quad (16)$$

Эта довольно редко встречающаяся специальная функция является одним из возможных дальнейших расширений обобщенного гипергеометрического ряда (${}_pF_q[a;b;z] = {}_p\Psi_q[(a,1);(b,1);z]\Gamma(b)/\Gamma(a)$) и находит применения, в частности, в теории дробного интегро-дифференцирования и ее приложениях [19, 21–23, 25–27]. Она была впервые введена в 1935 г. в работах Э.М. Райта, изучившего ее асимптотическое поведение [28, 29]. В последние годы свойства пси-функции Фокса–Райта подробно исследовались в работах [30–33].

Таким образом, имеем следующее представление функции эволюции

$$U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x}) = \frac{\tau^{-d/2\nu}}{(4\pi)^{d/2}\nu} {}_1\Psi_1\left[\left(\frac{d}{2\nu}, \frac{1}{\nu}\right); \left(\frac{d}{2}, 1\right); -\frac{\mathbf{x}^2}{4\tau^{1/\nu}}\right]. \quad (17)$$

Выражение (17) является обобщением известного теплового ядра. Действительно, при $\nu = 1$

$$\mathcal{E}_{1,\alpha}(z) = {}_1\Psi_1[(\alpha,1);(\alpha,1);z] = e^z,$$

что при подстановке в (17) приводит к (5).

Члены ряда (16) хорошо определены при таких параметрах (a_1, A_1), $\ldots$, (a_p, A_p), что $a_j + A_j m \neq 0, -1, -2, \ldots$ для всех $j = 1, \ldots, p$ и всех m. При этом известно, что ряд абсолютно сходится на всей комплексной плоскости z, если при положительных A_j и B_j выполнено $\delta = \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j > -1$.

Применительно к функции $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ оба эти условия выполнены при действительном $\nu > 1/2$ и комплексном $\alpha \neq -m - n\nu$, для натуральных m и n. Таким образом, при этих значениях параметров $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ является целой функцией z. Соответственно функции $U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x})$ хорошо определены не только при всех натуральных d и ν, но и при всех $\nu > 1/2$ и $d \neq -2m - 2n\nu$.

5. ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

При нецелом ν полученное выражение (17) является решением уравнения (8), в котором оператор $-(-\Delta)^\nu$ следует понимать как так называемую дробную производную Рисса порядка 2ν, определяемую с помощью преобразования Фурье [25]:

$$D^\alpha_{\text{Riesz}} f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(k^\alpha f(\mathbf{k})), \quad f(\mathbf{k}) = \mathcal{F}(f(\mathbf{x})).$$

Соответствующие уравнения называются дробными уравнениями диффузии и давно и широко обсуждаются в математической литературе, см., например, [19–23]. Однако в соответствующих работах обычно рассматриваются дробные уравнения в $(1+1)$-мерном пространстве.

Так, например, работа [23] посвящена нахождению фундаментальных решений уравнения

$${}_xD^\alpha_\theta u(x,t) = {}_tD^\beta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где ${}_xD^\alpha_\theta$ — дробная производная Рисса—Феллера с ассиметрией θ, переходящая в производную Рисса при $\theta = 0$, а ${}_tD^\beta$ — дробная производная Капуто или Римана—Лиувилля (подробнее об определениях и свойствах разных типов операторов дробного порядка смотрите в [25]). В работе получены интегральные представления и рассмотрены частные случаи функций Грина для значений параметров $\alpha, \beta \in (0,2)$, но не дано их общего представления в виде рядов или специальных функций. Таким образом, проведенное в ней рассмотрение является, с одной стороны, более общим, чем у нас, т.к. производная по времени также является дробной, а дробная производная по пространственной переменной имеет более общий вид, а с другой — гораздо менее общим, так как ограничивается случаем размерности $(1+1)$, т.е. $d = 1$ в наших обозначениях.

Заметим, что ряд, аналогичный ряду (15), был приведен в работе [20] в контексте изучения аномальной диффузии в d-мерном пространстве и сферически симметричных устойчивых распределений. Однако в этой работе параметр ν ограничен интервалом $(1/2, 1)$ и не приводятся выражения через пси-функции Фокса–Райта. Также сравнительно недавно аналогичный результат для $d = 3$ был получен в работе [15] применительно к модели Хоравы–Лифшица.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами получено аналитическое выражение для функции эволюции $U_{\nu,d}(\tau;\mathbf{x})$ оператора $-(-\Delta)^{\nu}$, являющейся обобщением известного теплового ядра, в терминах пси-функций Фокса–Райта. Следует подчеркнуть, что ее вычисление проведено двумя существенно разными методами, первый из которых перспективен для дальнейшего обобщения на случай искривленного пространства, а второй — на операторы более сложного вида.

Особый интерес вызывают обнаруженные пересечения с теорией дробного интегро-дифференцирования и тот факт, что полученные функции эволюции (17) хорошо определены как для целых, так и для нецелых значений d и ν. С одной стороны, это позволяет использовать их в КТП как при размерной регуляризации, когда формально рассматриваются пространства нецелой размерности, так и при вводе дифференциальных операторов нецелого порядка. Такие операторы можно использовать для регуляризации фейнмановских диаграмм в КТП вместо введения новых членов с высшими производными, смещая порядок исходных членов на малую величину $\nu = 2 + \epsilon$. Принципиальная возможность такой регуляризации показана недавно в работе [34] на примере безмассовой ϕ^4-теории. Возможности и перспективы применения этого нового метода нуждаются в дальнейшем исследовании.

С другой стороны, связь с дробным анализом открывает перспективы применения полученных функций эволюции далеко за пределами КТП. Дело в том, что теория дифференциальных уравнений дробного порядка может быть эффективно применена для построения феноменологических моделей фрактальных сред, систем с памятью и нелокальным взаимодействием. Благодаря этому в последние годы она начинает все шире применяться в самых разных областях физики, химии и биологии — в гидродинамике и физике плазмы, теории металлов и полупроводников, полимеров и наноматериалов, описании аномальной диффузии, высокотемпературной сверхпроводимости и т. д. Можно говорить о быстром формировании новой междисциплинарной области и особой парадигмы исследований — «дробной динамики». Многочисленные применения дробного анализа к физическим задачам обсуждаются, например, в [35] и цитируемой там литературе.

Широкое применение этих новых методов к решению самых разных практических задач настоятельно требует дальнейшего совершенствования вычислительных методов. В связи с этим нам представляется, что объединение двух ранее не пересекавшихся областей — дробного анализа и метода теплового ядра — может оказаться чрезвычайно плодотворным и требует тщательного изучения.

В последующих статьях мы обсудим некоторые примечательные интегро-дифференциальные соотношения для функций $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ и их асимптотическое поведение, а также сделаем обобщение полученного результата на случай произвольных постоянных операторов в евклидовом пространстве, в частности приведем точные аналитические выражения для функций эволюции и функции Грина произвольного сферически-симметричного оператора.

Авторы выражают свою благодарность профессору кафедры теоретической физики А. В. Борисову и коллегам А. Е. Казанцеву, А. А. Лобашеву и М. М. Поповой за многочисленные и плодотворные обсуждения материала статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fock V.* // Phys. Zeit. d. Sowjetunion. 1937. **12**. P. 404.
2. *Minakshisundaram S., Pleijel A.* // Canadian Journal of Mathematics. 1949. **1**. P. 242.
3. *Minakshisundaram S.* // The Journal of the Indian Mathematical Society. 1953. **17**, N 4. P. 158.
4. *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1951. **82**, N 5. P. 664.
5. *ДеВитт Б. С.* // Динамическая теория групп и полей. М. Наука. 1987.
6. *Seeley R. T.* // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 1967. **10**. P. 288.
7. *Gilkey P. B.* // Journal of Differential Geometry. 1975. **10**. P. 601.
8. *Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J.* // Phys. Rep. 1980. **66**, N 6. P. 213.
9. *Avramidi I. G.* // Heat kernel and quantum gravity. Berlin Heidelberg. Springer–Verlag. 2000.
10. *Avramidi I. G.* // Proceedings of the International Conference “Quantum Gravity and Spectral Geometry”. Naples, Italy. 2001.
11. *Vassilevich D. V.* // Phys. Rep. 2003. **388**, NN 5–6. P. 279.
12. *Tomboulis E. T.* // Superrenormalizable gauge and gravitational theories. UCLA/97/TEP/2. 1997.
13. *Modesto L.* // Astron. Rev. 2013. **8**, N 2. P. 4.
14. *Barvinsky A. O., Blas D., Herrero-Valea M.* et al. // JHEP. 2017. **6**.
15. *Mamiya A., Pinzul A.* // Journal of math. phys. 2014. **55**, N 6.
16. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* // Phys. Rep. 1985. **119**, N 1. P. 1.
17. *Avramidi I. G.* // Phys. Lett. B. 1997. **403**, NN 3–4. P. 280.
18. *Avramidi I. G.* // Journal of math. phys. 1998. **39**, N 5. P. 2889.
19. *Псху А. В.* // Уравнения в частных производных дробного порядка. М. Наука. 2005.
20. *Золотарев В. М., Учайкин В. В., Саенко В. В.* // ЖЭТФ. 1999. **115**, № 4. С. 1411.
21. *Mainardi F.* // App. Math. Lett. 1996. **9**, N 6. P. 23.
22. *Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F.* // Journal of computational and applied mathematics. 2000. **118**. P. 175.
23. *Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G.* // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2001. **4**, N 2. P. 153.
24. *Бейтман Г., Эрдейи А.* // Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М. Наука. 1966.
25. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* // Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.
26. *Kilbas A. A.* // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2005. **8**, N 2. P. 113.
27. *Lavault Ch.* // Fractional calculus and generalized Mittag–Leffler type functions. LIPN, Université Paris 13. 2017.
28. *Wright E. M.* // Journal of the London Mathematical Society. 1935. **10**, N 4. P. 286.
29. *Wright E. M.* // Proceedings of the London Mathematical Society. 1940. **46**, N 2. P. 389.
30. *Kilbas A. A., Saigo M., Trujillo J. J.* // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. **5**, N 4. P. 437.
31. *Килбас А. А., Королева А. А.* // Вестник БГУ. 2006. **1**, № 2. С. 53.
32. *Килбас А. А., Липневич В. В.* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2009. **17**, № 2. С. 15.
33. *Mehrez Kh.* // Preprint arXiv:1711.08368[math].
34. *Tarasov V. E.* // Preprint arXiv:1805.08566v1[hep-th].
35. *Тарасов В. Е.* // Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.–Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2011.

The Evolution Function of the Operator $-(-\Delta)^{\nu}$

W. N. Wachowski[a], **P. I. Pronin**[b]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]*vladvakh@gmail.com,* [b]*petr@phys.msu.ru.*

The evolution function of the differential operator $-(-\Delta)^{\nu}$ in a d-dimensional Euclidean space is calculated. We obtain its analytic expression through the Fox—Wright psi-functions, which is well-defined for both integer and noninteger values of ν and d. Possible applications of the obtained functions in quantum field theory and the connection with fractional calculus are discussed.

Keywords: proper time method, heat kernel method, Green's functions, evolution functions, Fox—Wright psi-functions, fractional integro-differentiation.
PACS: 02.30.Gp, 02.30.Jr, 03.70.+k
Received 08 June 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 1. Pp. 17–23.

Сведения об авторах

1. Ваховский Владислав Николаевич — аспирант; e-mail: vladvakh@gmail.com.
2. Пронин Петр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: petr@phys.msu.ru.