АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Оптимальное комплексирование компонент глобальной сети гравитационных антенн

А. В. Гусев,[1,a] В. Н. Руденко[1,2,б]

[1] *Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. Россия, 119991, Москва, Университетский пр-т, д. 13.*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра астрофизики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 16.10.2018, после доработки 06.11.2018, принята к публикации 08.11.2018.

Рассматривается задача оптимального объединения компонент глобальной сети гравитационных лазерных антенн с целью повышения эффективности регистрации и лучшей оценки параметров гравитационно-волновых сигналов астрофизической природы. В качестве сигнала выбран квазигармонический всплеск (чирп), сопровождающий событие слияния релятивистской двойной в конце ее эволюции. Форма такого сигнала известна с точностью до набора параметров, подлежащих оценке на фоне многочисленных когерентных и стохастических помех. В дополнение к известному методу фильтрации совпадений выходных сигналов по времени (объединение компонент сети по выходу) анализируется альтернативная возможность учета когерентной фазы возбуждения отдельных детекторов (объединение компонент по входу). Рассчитываются статистические характеристики детектирования для обоих режимов. Используется методика, типичная для задач различения детерминированных сигналов в радиолокации. Показано существенное увеличение эффективности регистрации при входном объединении компонент сети.

Ключевые слова: гравитационное излучение, гравитационные антенны, слияние релятивистских двойных звезд, глобальная сеть гравитационных детекторов.

УДК: 520.03, 51.71, 53.08. PACS: 95.80, 04.40.Dg, 95.30.Sf, 02.50.r.

ВВЕДЕНИЕ

После сенсационной первой регистрации всплеска гравитационно-волнового излучения от слияния релятивистской двойной с компонентами черных дыр (BH) в сентябре 2015 года лазерными детекторами ЛИГО [1] удалось обнаружить (до конца 2017 г.) и другие подобные сигналы, порядка 5 событий на текущий момент [2, 3]. Качественной ступенью явилась регистрация уже тремя детекторами (включая интерферометр Вирго) всплеска GW170814 от слияния BH-двойной ($M \sim 30$ M) с расстояния ~ 540 Мпс [4], позволившая на порядок уменьшить зону локализации источника на небесной сфере, до ~ 60 кв. град. Наконец, был зарегистрирован ГВ-сигнал от слияния нейтронных звезд (NS), совпавший по времени с гамма-импульсом GRB170817A (с задержкой 1.7 с) [5], подтвердив гипотезу рождения коротких гамма всплесков в результате слияния NS-двойной. Все эти факты позволяют уверенно говорить о реальном появлении нового гравитационно-волнового канала астрофизической информации и эвристическом значении многоканальной астрономии, т. е. стратегии параллельного наблюдения за транзиентами на детекторах разной физической природы.

В этой ситуации новую актуальность приобретает задача построения оптимальной сети гравитационных антенн как в смысле их географического расположения, так и в отношении характера их взаимосвязи, съема и расшифровки их общих сигналов на фоне локальных и глобальных помех. Оптимизация географического расположения лазерных ГВ-антенн, в конфигурации «Телескоп Эйнштейна» с аксиально симметричной (цилиндрической) суммарной диаграммой направленности [6], была проведена в работах [7, 8] путем численной Монте-Карло-симуляции с цепями Маркова. Критериями оптимизации являлись максимально точные оценки поляризации ГВ-сигнала, угловой локализации источника на небесной сфере и параметров его чирп-формы. В свете этих работ на текущем этапе обсуждаются также создание Европейско-азиатской сети из 4 антенн в северном полушарии: VIRGO в Италии, KAGRA в Японии, Индиго в Индии и планируемой антенны в Новосибирске [9].

В отношении характера взаимосвязи отдельных компонент сети, специфики съема (обработки) мультиканального сигнала известны два подхода. Первый, классический «веберовский» анализ совпадений, в котором все звенья сети работают назависимо, а их выходы исследуются (обрабатываются) на предмет наличия совпадений [10], т. е. одновременных выбросов, которые могут порождаться общим глобальным возмущением (условно «объединение компонент сети по выходу»). И второй, в котором учитывается фазовая когерентность входных возбуждений компонент сети. Сигналы каждого звена обрабатываются с учетом этой когерентности. Далее по критерию максимального правдоподобия формируется (синтезируется) интегральная наблюдаемая сети, по статистике которой выносится решение о детектировании ГВ-возмущения (условно, «объединение компонент сети по входу»). Теоретически такой подход рассматривался в работе [11], где, кроме общего описания, был рассчитан пример простой сети из двух детекторов. Было показано, что при заданной (выбраной) ошибке первого рода (вероятности случая) вероятность правильного обнаружения оказывается значительно выше в режиме объединения по входу. Это верно, однако, при умеренном отношении сигнал/шум SNR. При больших значениях SNR оба подхода в принципе эквивалентны, т. е. должны давать одинаковые результаты.

[a] E-mail: avg@sai.msu.ru
[б] E-mail: valentin.rudenko@gmail.com

Заметим, что современное понимание обнаружения по «схеме совпадений» не сводится только к фиксации одновременного превышения мощности на отдельных детекторах. Требуется также превышение шумового порога по взаимной мощности (кросс-корреляции), что означает дополнительное ограничение отбора сигнальных совпадений (похожесть формы импульсов) [5]. Иными словами, имеет место так называемый «прецизионный отбор совпадений» (критерии excess power и cross power).

Такое качество прецизионного отбора совпадений следует сохранить и в подходе (режиме работы), который выше назван как «объединение по входу». Здесь, однако, следует вспомнить, что при регистрации чирп-сигналов используется согласованный или корреляционный прием, когда входная смесь «сигнал + шум» проходит через фильтр с частотной характеристикой, пропорциональной спектру сигнала, который предполагается известным. Шумовой всплеск на выходе такого фильтра также будет иметь спектр подобный спектру чирпа (для модели белого входного шума), но его надо будет отличать от случая прихода реального ГВ-сигнала, сопровождающего слияние двойной. По этой причине разумно формулировать проблему регистрации при входном объединении компонент сети как задачу различения внешнего воздействия, когерентного для всех детекторов сети, от сигналов той же формы, но порожденных локальным шумовым фоном отдельного звена. В общей теории фильтрации это соответствует т. н. «минимаксному критерию» ведущему к мажорирующей оценке вероятности правильного обнаружения ГВ-сигнала [12, 13]. Именно такой подход реализуется в данной статье что является принципиальным отличием от цитированной выше работы [11].

Структура статьи следующая. Вначале в рамках критерия максимального правдоподобия исследуется детектирование ГВ сигналов от слияния релятивистских двойных сетью гравитационных антенн при их объединении по входу (разд. 2, 3, 4). В разд. 5 приводится алгоритм такого детектирования в небаесовской постановке, когда параметры сигнала являются детерминированными, но неизвестными. Далее как альтернатива исследуется задача регистрации при оптимальном объединении выходов отдельных компонент сети (разд. 6). Затем рассмотрен типичный для практики случай фильтрации ГВ-возмущений по схеме совпадений (разд. 7). Наконец, в разд. 8 оценивается относительная эффективность различных схем детектирования. В заключении обсуждаются полученные результаты и планируемая Европейско-азиатская сеть из 4 детекторов, включая российское звено под Новосибирском [9].

1. СЕТЕВАЯ РЕГИСТРАЦИЯ КАК ЗАДАЧА РАЗЛИЧЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

При выводе алгоритма сетевой регистрации мы используем результаты теории обнаружения векторных сигналов на фоне гауссовых помех [14–16].

Пусть с помощью антенной системы из l элементов наблюдается векторный случайный процесс

$$\mathbf{y}(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{matrix} \right\| = \|y_1(t) \ldots y_l(t)\|^T = \\ = \lambda \mathbf{s}(t) + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{n}(t), \; -\infty \leqslant t \leqslant \infty, \quad (1)$$

где $\lambda = (0, 1)$ — т. н. параметр состояния, формализующий наличие (отсутствие) возмущений; $\mathbf{s}(t)$ — полезный гравитационный сигнал, $\boldsymbol{\eta}(t)$ — квазидетерминированная помеха, $\mathbf{n}(t)$ — аддитивный гауссов фоновый шум. При дальнейшем анализе будем предполагать, что гауссов фон некоррелирован во времени (белый шум) и по отдельным элементам антенной системы (по пространству), и, следовательно, корреляционная матрица случайного процесса $\mathbf{n}(t)$ упрощается

$$\mathbf{K}(t,\tau) = \left\langle \mathbf{n}(t)\mathbf{n}^{\mathrm{T}}(\tau) \right\rangle = N_0 \mathbf{I} \delta(t-\tau),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. В такой ситуации логарифм условного отношения правдоподобия может быть представлен в виде [15]

$$\ln \Lambda(\mathbf{y}|\mathbf{s}) = \frac{1}{N_0} \int\limits_9^T \mathbf{y}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{s}(t)dt - \frac{1}{2} q_s, \quad (2а)$$

$$\ln \Lambda(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{N_0} \int\limits_9^T \mathbf{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\eta}(t)dt - \frac{1}{2} q_\eta, \quad (2б)$$

где

$$q_s = \frac{1}{N_0} \int\limits_0^T \mathbf{s}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{s}(t)dt, \quad q_\eta = \frac{1}{N_0} \int\limits_0^T \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\eta}(t)dt$$

— отношения сигнал/шум для сигнала и квазидетерминированной помехи; T — интервал наблюдения. Общие формулы (2а), (2б) далее уточняются подстановкой конкретной волновой формы астрофизического ГВ-возмущения и ассоциированных шумовых всплесков.

2. СИГНАЛЫ ЧИРП-ФОРМЫ

К настоящему времени успешно зарегистрированы только астрофизические ГВ-всплески, сопровождающие слияние компонент релятивистской двойной в конце ее эволюции. Форма такого гравитационного сигнала $\mathbf{s}(t) = \|s_1(t) \ldots s_l(t)\|^{\mathrm{T}}$ подробно проанализирована в литературе и вошла в монографии. В частности, одной из первых является монография [17], где расчет спиральной фазы двойной выполнен в ньютоновском приближении, а потери вращательной энергии вычислялись по квадрупольной формуле ОТО для гравитационного излучения. Постньютоновские поправки к траектории здесь опущены. Для целей данной статьи достаточно уже такой упрощенной формы гравитационного чирп-сигнала, являющегося по своему типу квазигармоническим колебанием с нарастающей амплитудой и несущей частотой, так что

$$s_i(t) = a f_i(t_c - t; M, \varphi), \; i = \overline{1, l}, \quad (3а)$$

где t_c — момент слияния (коаллестенции), означающий конец спиральной фазы ГВ всплеска, M — т. н. масса чирпа, $a = M/d$ — масштабный коэффициент: d — расстояние до источника,рассчитанное по гравитационной светимости

$$f_i(t; M, \varphi) = \gamma_i A(t; M) \cos\left[\Psi(t; M) + \psi_i + \varphi\right],$$

$$A(t;M) = \left[\frac{5}{256}\frac{M}{t}\right]^{1/4},$$

$$\Psi(t;M) = -2\left[\frac{t}{5M}\right]^{5/8}, \quad t \geqslant 0,$$

γ_i и ψ_i — коэффициенты, определяющие диаграмму направленности, φ — начальная фаза.

Чтобы конкретизировать прием сигнала (3а) отдельной ячейкой сети, следует для каждой из них ввести запаздывание Δt_i, зависящее от пространственного положения ячейки. Эту поправку формально нужно добавить к характерной временной метке сигнала $t_c = t_1 + \Delta t_i$, при $i = 2, 3, \ldots l$, где t_1 — метка первой ячейки, от которой идет отсчет запаздывания. Тогда реакция отдельной компоненты (ячейки) сети будет зависеть от ее координат.

В дальнейшем анализе используем также форму сигнала $f_i(t;M,\psi)$ в комплексной записи

$$f_i(t;M,\psi) = \mathrm{Re}\left[\widetilde{\gamma}_i\widetilde{s}(t;M)\exp\{j\varphi\}\right], \qquad (3б)$$

где

$$\widetilde{\gamma}_i = \gamma_i\exp\{j\psi_i\}, \quad \widetilde{s}(t;M) = aA(t;M)\exp\{j\Psi(t;M)\}. \qquad (3в)$$

В небайесовской постановке масса чирпа из банка сигнальных шаблонов $M \in \mathbf{M}$ рассматривается как неизвестный, но неслучайный дискретный параметр.

Определим теперь локальные шумы. При выборе формы квазидетерминированных помех $\boldsymbol{\eta}(t) = \|\eta_1() \ldots \eta_l(t)\|^{\mathrm{T}}$ в условиях априорной неопределенности воспользуемся минимаксным подходом, в соответствии с которым в наихудшей ситуации формы гравитационных $s_i(t)$ и негравитационных $\eta_i(t)$ возмущений совпадают:

$$\eta_i(t) = a_i\mathrm{Re}\left[\widetilde{\gamma}_i\widetilde{s}(t_i - t; M_i)\exp\{j\varphi_i\}\right], \ M_i \in \mathbf{M}. \qquad (3г)$$

Индекс i маркирует отдельный детектор сети, таким образом подчеркивая индивидуальность помех $\eta_i(t)$ в каждом ее звене.

3. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЯ РАЗЛИЧЕНИЯ

В соответствии с алгоритмом отношения правдоподобия решение $\lambda = 1$ (присутствует гравитационный сигнал) в байесовской постановке принимается, если выполняется следующее условие:

$$\frac{\Lambda(\mathbf{y}|\lambda=1)}{\Lambda(\mathbf{y}|\lambda=\mathbf{0})} \geqslant \frac{P(\lambda=1)}{P(\lambda=0)}, \qquad (4а)$$

где $\Lambda(\mathbf{y}|\lambda)$ — безусловное отношение правдоподобия в состоянии λ, $P(\lambda)$ — априорные вероятности наличия и отсутствия полезного гравитационного сигнала. Минимаксный подход ассоциирован с гипотезой равенства априорных вероятностей $P(\lambda = 1) = P(\lambda = 0) = 1/2$, что ведет к мажорирующей оценке вероятности пропуска гравитационного сигнала [12, 13].

Вероятность различения детерминированных гравитационных сигналов и спорадических негравитационных помех на белом гауссовом фоне, описываемая статистическими ошибками 1го и 2го рода α, β, определена следующим уравнением [15] (см. также Приложение A)

$$\alpha = \beta = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q}\right), \qquad (4б)$$

где α и β — вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала, а параметр q задан формулой

$$q = \frac{1}{N_0}\int\limits_0^T [\mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)]^{\mathrm{T}}[\mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)]dt. \qquad (4в)$$

В небайесовской постановке решение $\lambda = 1$ принимается, если выполняется следующее условие:

$$\ln\Lambda^*(\mathbf{y}|\lambda=1) \geqslant \ln\Lambda^*(\mathbf{y}|\lambda=0), \qquad (4г)$$

где $\Lambda^*(\mathbf{y}|\lambda)$ — логарифм отношения правдоподобия, в котором неизвестные параметры сигнала и помехи в состояниях $\lambda = 1, 0$ заменены их максимально правдоподобными оценками (при этом параметры $t_c, t_1, \ldots, t_l$ и $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_l$ считаются неэнергетическими и несущественны).

4. КРИТЕРИЙ РАЗЛИЧЕНИЯ ПРИ ВХОДНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ КОМПОНЕНТ СЕТИ

На практике в руках наблюдателя имеются только реализации выходных случайных процессов отдельных компонент (ячеек) сети. Их следует инвертировать ко входу используя известную функцию передачи каждого приемника. Результатом будет входной векторный процесс (1). После этой операции наблюдатель сможет рассматривать алгоритм сетевой регистрации (см. п. 2) при оптимальном входном объединении компонент сети.

Конкретизируем теперь общие соотношения (2), подставляя в них волновую форму чирп-сигнала $\mathbf{s}(t)$ и квазидетерминированной помехи $\boldsymbol{\eta}(t)$. В случае $\lambda = 1$ (есть гравитационный сигнал) приходим к выражению

$$\ln\Lambda(\mathbf{y}|\lambda=1) = \frac{1}{N_0}\left[a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{l} y_i(t)f_i(t_c - t; M,\varphi)dt - \right. \left. - \frac{1}{2}a^2E_s(M)\right], \qquad (5а)$$

выше введено обозначение энергии сигнала

$$E_s(M) = \sum_{i=1}^{l}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i^2(\cdot)dt.$$

Далее основные неизвестные параметры сигнала, амплитудный (масштабный) фактор и начальную фазу (a, φ) в небайессовском подходе следует заменить их правдоподобными оценками, которые находятся приравниванием нулю соответствующих частных производных выражения (5а). Выполнение этой процедуры по масштабному фактору $\widehat{a}$ дает

$$\ln\Lambda(\mathbf{y}|\lambda=1;\widehat{a}) = \frac{1}{2N_0E_s(M)}\left[\mathrm{Re}\left\{\exp(j\varphi)\times \right.\right. \left.\left. \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{l} y_i(t)\widetilde{\gamma}_i\widetilde{s}(t_c - t; M)dt\right\}\right]^2. \qquad (5б)$$

В формулу (5б) входит суммарный по компонентам антенной сети случайный процесс, полученный согласованной фильтрацией общего гравитационного сигнала отдельными звеньями сети, который для краткости записи обозначаем далее как $z(t;M)$ (запись дана в математическом виде физически нереализуемого фильтра, содержащего интегрирование также по отрицательным значениям времени)

$$z(t;M) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{l} y_i(\tau)\widetilde{\gamma}_i\widetilde{s}(t-\tau;M)d\tau.$$

В итоге приходим к компактной форме

$$\ln\Lambda(\mathbf{y}|\lambda=1;\widehat{a}) = \frac{1}{2N_0E_s(M)}\left[\mathrm{Re}\left\{\exp(j\varphi)z(t_c;M)\right\}\right]^2,$$

которую остается оптимизировать подстановкой правдоподобного значения параматра начальной фазы $\widehat{\varphi}$. Это дает

$$\ln\Lambda(\mathbf{y}|\lambda=1;\widehat{a},\widehat{\varphi}) = \frac{1}{2N_0E_s(M)}|z(t_c;M)|^2.$$

Оптимизация по параметрам чирп-сигнала здесь не производится. На практике она заменяется набором дискретных фильтров, согласованных с чирп-сигналами, соответствующих выбранным интервальным значениям $M+\Delta M$, $t_c+\Delta t_c$. Следовательно, в небайесовском подходе оптимизированный логарифм отношения правдоподобия, при наличии гравитационного сигнала и дискретного банка шаблонов согласованной фильтрации, имеет вид

$$\ln\Lambda^*(\lambda=1) = \max_{\substack{M\in\mathbf{M},\\ -\infty<t<\infty}} \frac{1}{2N_0E_s(M)}|z(t;M)|^2. \quad (5в)$$

В этой формуле подстрочная запись вариаций по парпметрам чирп-сигнала означает селекцию дискетного согласованного фильтра, дающего максимальный отклик.

Совершенно аналогично можно найти логарифм отношения правдоподобия в состоянии отсутствия гравитационного сигнала, но наличия квазидетерминированной помехи, индивидуальной в каждом звене сети детекторов со своими случайными значениями амплитуды и фазы (3г). Тогда для $\ln\Lambda^*(\mathbf{y}|\lambda=0)$ получим

$$\ln\Lambda^*(\mathbf{y}|\lambda=0) = \sum_{i=1}^{l} \max_{\substack{M\in\mathbf{M},\\ -\infty<t<\infty}} \frac{1}{2N_0E(M_i)}|z_i(t;M)|^2. \quad (5г)$$

В этом выражении, в отличие от (5в), идет суммирование по отдельным детекторам сети, для каждого из которых результат согласованной фильтрации $z_i(t;M)$ определен своим индивидуальным шаблоном, зависящим от локальной квазидетерминированной помехи, при этом

$$z_i(t;M) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_i(\tau)\widetilde{\gamma}_i\widetilde{s}(t-\tau;M)d\tau.$$

Формулы (5в) и (5г) при подстановке в решающее правило (4г) позволяют вынести суждение о воздействии гравитационного сигнала на сеть детекторов при оптимальном объединении компонент по входу.

5. РАЗЛИЧЕНИЕ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ВЫХОДОВ

Для целей сравнения различных методик комплексирования элементов антенной сети рассмотрим кратко традиционный вариант «объединения по выходам» в его оптимальной формулировке.

Пусть $y_i(t)$ — случайный процесс на выходе отдельного элемента антенной системы, а $\widehat{\mathbf{x}}$ — вектор параметров сигнала или квазидетерминированной помехи. В сосотоянии $\lambda=0$ вектор параметров индивидуален для каждого звена

$$\widehat{\mathbf{x}}_i = \|\widehat{a}_i\,\widehat{t}_i\,\widehat{M}_i\,\widehat{\varphi}_i\|^{\mathrm{T}},$$

как и ранее, «шляпки» означают максимально правдоподобные оценки неивестных значений a_i, t_i, M_i, φ_i. В состоянии $\lambda=1$ вектор параметров является общим для всей сети $\widehat{\mathbf{x}} = \|\widehat{\mathbf{x}}_1\ \ldots\ \widehat{\mathbf{x}}_l\|^{\mathrm{T}}$.

При больших отношениях сигнал/шум максимально правдоподобные оценки можно представить как истинные с небольшим флуктуационным отклонением, в частности для вектора параметров отдельного звена запишем

$$\widehat{\mathbf{x}}_i \simeq \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\xi}_i, \quad (6а)$$

где вектор истинных значений есть $\mathbf{x}_i = \|a_i\,t_i\,M_i\,\varphi_i\|^{\mathrm{T}}$, а вектор отклонений $\boldsymbol{\xi}_i = \|\delta a_i\,\delta t_i\,\delta M_i\,\delta\varphi_i\|^{\mathrm{T}}$ представляется как гауссова помеха с нулевым средним значением и корреляционной матрицей

$$\mathbf{K}_i = \left\langle \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \right\rangle = \mathbf{I}_i^{-1}, \quad (6б)$$

обратной информационной матрице Фишера $\mathbf{I}_i$ [15].

По аналогии с уравнением (1) применим логику задачи различения к вектору параметров $\widehat{\mathbf{x}}$. Тогда в условиях априорной неопределенности можно рассматривать приближенное уравнение

$$\widehat{\mathbf{x}} \simeq \lambda\mathbf{x}_s + (1-\lambda)\mathbf{x}_\eta + \boldsymbol{\xi},$$

где $\mathbf{x}_s$ — вектор параметров сигнала, и $\mathbf{x}_\eta$ — вектор параметров квазидетерминированной помехи; компоненты этих векторов зависят от параметра состояния λ.

Оптимальное различении гравитационных и негравитационных сигналов при объединении компонент сети по их выходам выполниется по условию аналогичному (4г), но примененному к вектору параметров $\widehat{\mathbf{x}}$ вместо входного случайного процесса $\mathbf{y}(t)$, т. е. решение $\lambda=1$ принимается, если выполняется следующее условие:

$$\ln\Lambda^*(\widehat{\mathbf{x}}|\lambda=1) \geqslant \ln\Lambda^*(\widehat{\mathbf{x}}|\lambda=0), \quad (6в)$$

где $\ln\Lambda^*(\widehat{\mathbf{x}}|\lambda)$ — условное отношение правдоподобия случайного процесса $\widehat{\mathbf{x}}$ при замене неизвестных параметров оценками максимального правдоподобия.

Учитывая стандартную методику расчета отношения правдоподобия векторных гауссовых сигналов [15, 16], можно свести (6в) к условию регистрации ГВ-сигнала на фоне квазидетерминированной помехи

$$\widehat{\lambda} = 1: \sum_{i=1}^{l} \widehat{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_i^{-1}(\widehat{\mathbf{x}}_{si} - \widehat{\mathbf{x}}_{\eta i}) \geqslant 0, \quad (6г)$$

где $\mathbf{K}_i^{-1} = \mathbf{I}_i$,

$$\widehat{\mathbf{x}}_{si} = \|\widehat{a}_i\,\widehat{t}_c\,\widehat{M}\,\widehat{\varphi}\|^T$$

— максимально правдоподобная оценка вектора параметров $\mathbf{x}_{si}$.

Выражение (6г) определяет оптимальный алгоритм селекции гравитационных сигналов при объединении гравитационных антенн по выходу, который требует, однако, знания корреляционной матрицы сети (6б).

6. РАЗЛИЧЕНИЕ ПО СХЕМЕ СОВПАДЕНИЙ

Исторически простейшим принципом обнаружения гравитационно-волновых воздействий по наблюдениям за выходными сигналами гравитационных детекторов являлся принцип «регистрации совпадений» на пространственно разнесенных инструментах. Совпадение понималось как одновременность выходных сигналов в виде коротких импульсных всплесков. Фактически это означает объединение компонент сети по выходам при использовании только одного главного параметра, характеризующего сигнал — времени его прибытия.

Рассмотрим оптимальное комплексирование компонент сети гравитационных детекторов по схеме совпадений. В соответствии с методикой, принятой в этой статье для максимально правдоподобной оценки момента прихода возмущений, имеем

$$y_i(t) \to \widehat{\mathbf{t}},\ \widehat{\mathbf{t}} = \|\widehat{t}_1\,\ldots\,\widehat{t}_l\|^{\mathrm{T}} \simeq \|t_1\,\ldots\,t_l\|^T + \delta\mathbf{t},$$

где $t_1, \ldots, t_l$ — истинные значения моментов появления возмущений, а $\boldsymbol{\delta}\mathbf{t} = \|\delta t_1\,\ldots\,\delta t_l\|^{\mathrm{T}}$ — вектор отклонения оценок.

Следовательно, для различения приходов гравитационных сигналов и помехи имеем

$$\widehat{\mathbf{t}} \simeq \lambda\|t_c\,\ldots\,t_c\|^{\mathrm{T}} + (1-\lambda)\|t_1\,\ldots\,t_l\|^{\mathrm{T}} + \delta\mathbf{t}.$$

В объединении компонент сети по схеме совпадений решение $\lambda = 1$ принимается при условии

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\sigma_i^2}\widehat{t}_i(\widehat{t}_c - \widehat{t}_i) \geqslant 0, \tag{7}$$

где $\sigma_i^2 = \langle \delta t_i^2 \rangle$,

$$\widehat{t}_c = \sum_{i=1}^{l} \frac{\widehat{t}_i}{\sigma_i^2}\left[\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\sigma_i^2}\right]^{-1} \tag{8}$$

— максимально правдоподобная оценка момента коалесценции.

Выражения (4) и (5) определяют оптимальный алгоритм обработки информации по совпадениям; при традиционном подходе для антенной системы из $l = 2$ элементов

$$\lambda = 1:\ |\widehat{t}_1 - \widehat{t}_2| \leqslant \tau_r, \tag{9}$$

где τ_r — время разрешения (окно совпадения).

7. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СХЕМ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ

Выше были рассмотрены две схемы объединения компонент сети ГВ-детекторов: по входам (общая апертура) и по выходам. В их оптимальных вариантах они в принципе эквивалентны, т. е. должны иметь сравнимую эффективность регистрации гравитацио-волновых возмущений. Однако оптимальное объединение по выходам усложняется необходимостью знания взаимной корреляционной матрицы шумов отдельных компонент, используемой при фильтрации сигнала, что на практике затруднительно. Поэтому применяется схема совпадений в ее прецизионном варианте (критерии excess power и cross power). Покажем, что апертурный синтез (входое объединение) имеет заметное преимущество перед схемой совпадений.

Следуя методике [15], введем коэффициент $\varkappa$ относительной эффективности схемы совпадений

$$\varkappa = \frac{P_e}{P_{e,c}} \leqslant 1, \tag{10}$$

где P_e — вероятность ошибочного решения в апертурном синтезе, а $P_{e,c}$ — в схеме совпадений. Для входного объединения используем формулы из Приложения А — (A3), (A4), откуда

$$P_e = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q}\right), \tag{11}$$

где

$$q = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{l}\int_{-\infty}^{\infty}[s_i(t) - \eta_i(t)]^2\,dt = \\ = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{l}[B_{s,i}(0) + B_{\eta,i}(0) - 2B_{s\eta,i}(0)]\,. \tag{12}$$

Здесь фигурируют автокорреляционные функции сигнала $B_{s,i}(0)$ и помехи $B_{\eta,i}(0)$ (в каждом звене сети), а также их взаимная корреляционная функция в совпадающие моменты времени $B_{s\eta,i}(0)$:

$$B_{s\eta,i}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t)\eta_i(t+\tau)dt.$$

Аналогично можно показать, что соответствующие характеристики (вероятность ошибки) для схемы совпадений определяются следующими формулами:

$$P_{e,c} = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q_c}\right), \tag{13}$$

при

$$q_c = \sum_{i=1}^{l}\frac{(t_c - t_i)^2}{\sigma_i^2}. \tag{14}$$

Формулы (11)–(14) позволяют оценить коэффициент $\varkappa$. Последний зависит от параметров гравитационных и негравитационных сигналов, но также от дисперсий σ_i^2, которые трудно вычислить аналитически при такой сложной структуре сигнала, как чирп. Поэтому ниже мы выполним оценку относительной эффективности для случая, когда гравитационные сигналы и помеха имеют одинаковые параметры (включая моменты появления), отличаясь только начальными фазами, см. (3а), (3в).

В таком представлении фазы возмущений отдельных звеньев имеют случайные отклонения $\delta\varphi_i$ от фазы гравитационного сигнала-чирпа φ (помехи $\eta_i(t)$ некогерентны)

$$\varphi_i = \varphi + \delta\varphi_i,\ i = \overline{1,l}.$$

Используя представление сигнала (3а) и помехи (3в), с учетом того, что фаза чирпа является неэнергетическим параметром, можно найти корреляционные функции, входящие в формулу (12)

$$B_{s,i}(0) = B_{\eta,i}(0),\ B_{s\eta,i}(0) = B_{s,i}(0)\cos\delta\varphi_i, \quad (15)$$

где

$$B_{s,i}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |s_i|^2(t)dt.$$

Подстановка (15) в уравнение (12) позволяет конкретизировать параметр q для расчета ощибки в апертурном синтезе.

Теперь можно сделать оценку относительной эффективности схемы совпадений. Из формулы (14) следует, что наличие совпадений сигнальных и шумовых всплесков ($t_c \approx t_i$) дает малость параметра q_c, что влечет большую вероятность ошибки $P_{e,c} \simeq (1/2)$ (13) в утверждении «сигнал есть» $\lambda = 1$. При этом для оценки коэффициента эффективности имеем

$$\varkappa \simeq 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q}\right)\right]. \quad (16)$$

Из формулы (12) с учетом (15) находим, что

$$q \simeq \rho_s \sum_{i=1}^{l} \sin^2\delta\varphi_i,$$

где

$$\rho_s = \frac{1}{N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{s}(t)dt = \frac{B_s(0)}{N_0}$$

есть отношение сигнал/шум. При больших значениях $\rho_s \gg 1$ параметр q нарастает и относительная эффективность схемы совпадений стремится к нулю (16). Фактически схема совпадений дает ложный ответ — «сигнал есть» — при его реальном отсутствии. Это происходит потому, что она не учитывает наличие фазовых соотношений между входными возмущениями. Здесь апертурный синтез имеет явное преимущество.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной задачей данной работы являлось сопоставление возможных вариантов комплексирования компонент мировой сети гравитационных антенн с целью выяснения их сравнительной эффективности по отношению к селектированию, регистрации и оценки параметров ГВ-сигналов асторфизической природы. В качестве модели сигнала выбиралась чирп-структура, описывающая гравитационное излучение на спиральной фазе слияния релятивистской двойной звезды. Две ключевые методики комплексной обработки информации, поставляемой компонентами сети, были исследованы: оптимальное суммирование откликов, приведенных ко входу каждого детектора («апертурный синтез»), и непосредственная совместная обработка их выходных данных (в частности, «схема совпадений»). Очевидно, что для больших отношений сигнал/шум при оптимальной обработке обе методики должны вести к одинаковым результатам. Однако при измерениях на предельной чувствительности детекторов, эффективность этих методик может быть существенно разной. Хотя анализ, выполненый в этой работе, нельзя считать исчерпывающим и строго последовательным, с его помощью удалось показать преимущества апертурного синтеза по сравнению с традиционной методикой схемы совпадений.

При объединении компонент сети по входу оптимальная наблюдаемая формируется как выход многоканального коррелятора, согласованного с опорным ГВ-сигналом одинаковым для всех звеньев (3б). При этом присходит когерентное накопление наблюдаемой. Отношение правдопододия в присутствие сигнала зависит от его фазы ϕ (5б), которая в обобщеной форме (5в) не фигурирует, будучи замененной своей максимально правдоподобной оценкой.

Напротив, в отсутствие сигнала и наличия только квазидетерминированных помех (3г) оптимальная наблюдаемая есть сумма отдельных корреляторов в каналах индивидуальных опорных сигналов со случайными фазами (5г). Сфазированного накопления в этом случае нет.

Объединение компонент сети по входу и когерентное накопление в принципе улучшает (максимизирует) отношение сигнал/шум, что в свою очередь ведет к уточнению оценки параметров принимаемого сигнала (текущей частоты, скорости её изменения и в итоге — массы чирпа). В первом приближении эти параметры могут иметь только грубую оценку по неравенству Рао—Крамера [15]. Что касается точности оценки локализации источника, то она определяется в основном пространственным масштабом сети и слабо зависит от типа объединения компонент.

Было бы интересно проиллюстрировать полученные результаты на примере конкретной сети, которой может быть, указанная во Введении Азиатско-европейская сеть четырех ГВ-интерферометров: VIRGO, KAGRA, включая сайты в Индии (Maharashtra, Ф $19°43'N$, $\lambda 77°09'E$) и в Новосибирске (Ф $55°02'N$, $\lambda 82°56'E$). Отметим, что добавление двух последних сайтов сильно сузит зоны локализации детектируемых источников ГВ-сигналов в направлении вдоль меридианов сферической геоценрической системы координат. В настоящее время такие расчеты проводятся и будут представлены в следующей статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 17-12-01095 и гранта РФФИ № 17-02-00492.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D.* et al. (LIGO Sci. Collab. and Virgo Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2016. **116**. 061102.
2. *Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D.* et al. (LIGO Sci. Collab. and Virgo Collab.) // Phys. Rev.Lett. 2016. **116**. 241103.

3. *Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D.* et al. (LIGO Sci. Collab. and Virgo Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2017. **118**. 221101.
4. *Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D.* et al. (LIGO Sci. Collab. and Virgo Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2017. **119**. 141101.
5. *Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D.* et al. (LIGO Sci. Collab. and Virgo Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2017. **119**. 161101.
6. *Sathyaprakash B., Abernathy M., Acernese F.* et al. // Classical and Quantum Gravity. 2012. **29**, N 12. 124013.
7. *Raffai P., Gondan L., Heng I. S.* et al. // Classical and Quantum Gravity. 2013. **30**. 155004.
8. *Hu Y. M., Raffai P., Gondan L.* et al. // Global Optimization for Future Gravitational Wave Detection Sites. arXiv: 1409.2875v2 [astro-ph.IM] 25 Jan (2015).
9. http://gravity-conf.uni-dubna.tilda.ws/
10. *Weber J.* Phys. Rev. 1960. **117**. 306.
11. *Finn L. S.* Aperture synthesis for gravitational-wave data analysis: Deterministic Sourses. arXiv:0010033v1 [gr-qc] 9 Oct (2000).
12. *Вальд А.* Статистические решающие функции. М.: Наука, 1972.
13. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. **1**. М.: Сов. Радио, 1997.
14. *Тихонов В. И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1983.
15. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1992.
16. *Сосулин Ю. Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
17. *Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж.* Гравитация. **3**. М.: Мир, 1977.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задача различения двух сигналов может быть сведена к задаче обнаружения их разностного сигнала [15]. Действительно, перепишем уравнение (1) в следующей форме:

$$\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t) = \lambda\Delta\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \ -\infty < t < \infty,$$

где

$$\Delta\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\eta}(t). \tag{A1}$$

Откуда видно, что задача различения детерминированных сигналов $\mathbf{s}(t)$ и $\boldsymbol{\eta}(t)$ статистически эквивалентна обнаружению полезного сигнала $\Delta\mathbf{s}(t)$ (2) на фоне аддитивной гауссовой помехи $\mathbf{n}(t)$.

Решение $\lambda = 1$ принимается, если выполняется следующее условие:

$$\ln\Lambda(\Delta\mathbf{y}|\lambda = 1) \geqslant C,$$

где $\Lambda(\Delta\mathbf{y}|\lambda)$ — отношение правдоподобия случайного гауссова процесса $\Delta\mathbf{y}(t)$ в состоянии λ; C — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества.

Вероятности ложной тревоги α и пропуска сигнала β определяемые обычным образом:

$$\alpha = P\left\{\ln\Lambda(\Delta\mathbf{y}|\lambda = 1) \geqslant C|\lambda = 0\right\};$$

$$\beta = P\left\{\ln\Lambda(\Delta\mathbf{y}|\lambda = 1) \leqslant C|\lambda = 0\right\},$$

для гауссового шумового фона записываются через интеграл вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz$$

как

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q} + \overline{c}\right),$$
$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q} - \overline{c}\right).$$

Здесь фигурирует q — параметр отношения сигнал/шум

$$q = \frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\mathbf{s}^{\mathrm{T}}(t)\Delta\mathbf{s}(t)dt \tag{A2}$$

и нормированный порог $\overline{c} = C/\sqrt{q}$.

Порог C, определяемый как

$$C = \ln\frac{P(\lambda = 0)}{P(\lambda = 1)},$$

зависит от выбранного критерия качества.

В рамках критерия идеального наблюдателя предполагаем также равенство ошибок ложной тревоги и пропуска полезного сигнала, т. е. $P(\lambda = 1) = 1 - P(\lambda = 0)$, что ведет к порогу $C = 0$. В рамках критерия Неймана—Пирсона [15] порог определяется выбранным значением вероятности ложной тревоги $C = C(\alpha)$.

В данной статье мы ограничиваемся критерием идеального наблюдателя, считая известными априорные вероятности $P(\lambda = 1)$ и $P(\lambda = 0) = 1 - P(\lambda = 1)$. При таком подходе вероятность ошибочного решения P_e есть

$$P_e = P(\lambda = 1)\beta + P(\lambda = 0)\alpha, \tag{A3}$$

т. е. при минимаксном условии $P(\lambda = 1) = P(\lambda = 0) = 0.5$ вероятность ошибки оказывается равной

$$P_e = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q}\right).$$

Векторное представление отношения сигнал/шум q (A2) полезно дать также в скалярной форме:

$$q = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{l}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta s_i^2(t)dt = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{l}\int_{-\infty}^{\infty}\left[s_i(t) - \eta_i(t)\right]^2 dt. \tag{A4}$$

Optimal Integration of the Components of the Global Network of Gravitational—Wave Antennas

A. V. Gusev[1,a], **V. N. Rudenko**[1,2,b]

[1]*Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University. Moscow 119191, Russia.*
[2]*Department of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a]*avg@sai.msu.ru*, *valentin.rudenko@gmail.com.*

This paper considers the problemof optimal integration of the components of the global network of laser gravitational—wave antennas in order to improve the detection efficiency and to better estimate the parameters of astrophysical gravitational—wave signals. A quasi–harmonic burst (chirp) that accompanies the merger of a relativistic binary star at the end of its evolution has been selected as a signal. The shape of such a signal is known up to a set of parameters to be estimated against the background of large coherent and stochastic noise. An alternative possibility of taking into account the coherent excitation phase of individual detectors (component integration by input) is analyzed in addition to the well known method for filtering output signals by coincidence in time (component integration by output). Statistical detection characteristics for both modes are calculated. The method typical for problems of distinguishing deterministic signals in radar systems is used. A significant increase in detection efficiency during the input integration of network components is shown.

Keywords: gravitational—wave radiation, gravitational—wave antennas, merger of relativistic binary stars, global network of gravitational—wave detectors.
PACS: 95.80,04.40.Dg, 95.30.Sf, 02.50.r.
Received 16 October 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 2. Pp. 115–123.

Сведения об авторах

1. Гусев Андрей Викторович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-53-28, e-mail: avg@sai.msu.ru.
2. Руденко Валентин Николаевич — доктор физ.-мат. наук, зав. отделом, профессор; тел.: (495) 939-16-34, e-mail: valentin.rudenko@gmail.com.