

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа БюргерсаД. В. Лукьяненко,^a В. Т. Волков,^b Н. Н. Нефедов, А. Г. Ягола*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 09.08.2018, после доработки 29.10.2018, принята к публикации 04.11.2018.

Асимптотический анализ сингулярно возмущенного уравнения реакция–диффузия–адвекция, называемого в приложениях уравнением типа Бюргерса и имеющего решение с резким переходным слоем, применен для решения коэффициентной обратной задачи определения коэффициента линейного усиления по известной информации о наблюдаемом решении прямой задачи в финальный момент времени. На серии модельных численных экспериментов показана эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, уравнение типа реакция–диффузия–адвекция, внутренний слой, коэффициентная обратная задача.

УДК: 519.6. PACS: 02.60.Lj, 02.90.+p.

ВВЕДЕНИЕ

В работе показана возможность применения методов асимптотического анализа для восстановления линейного усиления (коэффициента реакции), описывающего свойства среды, при решении коэффициентной обратной задачи для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа Бюргерса (уравнения реакция–диффузия–адвекция) по известной информации о наблюдаемом решении прямой задачи в финальный момент времени. Подобные задачи возникают в газовой динамике, в нелинейной теории волн, биофизике, химической кинетике и многих других практических приложениях и описываются нелинейными параболическими уравнениями с малыми параметрами при производных (например, [1] и ссылки в этой работе). Асимптотико-численный анализ сингулярно возмущенных задач типа реакция–диффузия–адвекция может быть найден, например, в работах [2–6].

Особенностью прямых задач указанного типа является то, что их решения могут содержать узкие пограничные и/или внутренние слои (стационарные и/или движущиеся фронты). Как следствие, эти задачи чрезвычайно сложны для численного решения. Однако наличие малого параметра приводит к появлению двух противоположенных эффектов: с одной стороны, чем меньше этот параметр, тем более неустойчивое численное решение будет получено; с другой стороны, чем меньше этот параметр, тем более точную априорную информацию о решении мы можем извлечь с помощью асимптотического анализа. Эти два факта дают возможность объединить асимптотический и численный подходы для построения эффективных методов решения как прямых, так и соответствующих обратных задач.

Идея использования асимптотического анализа при построении эффективных численных методов решения обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений была впервые реализована в работе [7], где рассмотрена коэффициентная обратная задача для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа

реакция–диффузия–адвекция. В указанной работе использовался подход, основанный на строгом асимптотическом анализе и заключающийся в выделении априорной информации о положении движущегося фронта в решении прямой задачи и пограничных слоев в решении сопряженной задачи для построения специальной адаптированной сетки [2–4]. Предложенный метод позволил значительно оптимизировать численный счет и существенно улучшить стабильность решения соответствующей обратной задачи.

В настоящей работе предлагается совершенно новый подход к использованию асимптотического анализа для решения рассмотренной в [7] коэффициентной обратной задачи. Важной особенностью применения асимптотического подхода к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами является то, что асимптотический анализ позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу к более простой задаче, которая не содержит малых параметров и имеет меньшую пространственную размерность (а иногда и вовсе содержит не дифференциальные, а алгебраические уравнения), получив при этом достаточно точное качественное и количественное описание решения. Таким образом, применение асимптотического анализа дает возможность установить более простые связи между входными данными и параметрами обратной задачи (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т. п.), которые необходимо определить, что позволяет существенно упростить процедуру решения обратных задач. В данной работе коэффициентная обратная задача для уравнения в частных производных [7] сводится к существенно более простой задаче, которая связывает наблюдаемое положение движущегося фронта с искомым коэффициентом в уравнении (также см. реализацию подобного подхода в [8]). А именно, если имеется экспериментальная возможность фиксировать свойства движущегося фронта (фронта ударной волны, фронта реакции или горения и т. д.) в некоторый момент времени, то вопрос об определении неизвестного коэффициента в уравнении сводится к простому дифференцированию наблюдаемого решения прямой задачи в данный фиксированный момент времени.

^a E-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

^b E-mail: volkovvt@mail.ru

В разд. 1 описана постановка коэффициентной обратной задачи, особенностью численного решения которой является наличие внутренних слоев (движущихся фронтов) в решении прямой задачи. В разд. 2 представлены основные идеи асимптотического анализа, которые позволяют свести исходную обратную задачу к более простой. В разд. 3 описывается соответствующий численный подход для решения редуцированной задачи и приводятся результаты численных экспериментов, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода, а также указывают на его ограничения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу для следующего нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа реакция–диффузия–адвекция

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + q(x)u, & x \in (0, 1), t \in (0, T), \\ u(0, t) = u_l(t), \quad u(1, t) = u_r(t), & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

где параметр ε является достаточно малым ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$), функция $u_0(x) \in C^1([0, 1])$ – нетривиальна, функции $u_l(t), u_r(t) \in C^1[0; T], q(x) \in C^1[0; 1]$. Кроме того, считаем, что выполнены условия согласования начальных и граничных условий. В задаче (1) ищется классическое решение.

Обратная задача состоит в определении функции $q(x)$ по известной дополнительной информации [7]

$$u(x, T) = f_{\text{obs}}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Особенностью постановки задачи является то, что начальная функция принадлежит области формирования резкого переходного слоя (множеству начальных функций, из которых формируется резкий переходный слой). Таким образом, можно считать, что в начальный момент решение с переходным слоем уже сформировано.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Основные идеи предлагаемого подхода проиллюстрируем на следующем примере:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(u, x), \\ x \in (0, 1), t \in (0, T], \\ u(0, t) = u_l, \quad u(1, t) = u_r, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \end{cases} \quad (3)$$

где функции $A(u, x)$ и $B(u, x)$ – достаточно гладкие при $(x, u) \in [0; 1] \times (-\infty; +\infty)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $T > 0$. Рассматривается решение в виде движущегося фронта, который в каждый момент времени t локализован в окрестности некоторой точки $x_{t.p.}(t, \varepsilon) \in (0, 1)$: слева и справа от нее решение $u(x, t)$ задачи (3) близко к двум различным уровням, а в указанной окрестности наблюдается узкий движущийся переходный слой (фронт).

Существование решения указанного типа задачи (3) доказано в работе [6]. Там же построено асимптотическое приближение решения по малому параметру ε .

В данной работе мы используем некоторые формулы и результаты [6].

Рассмотрим следующие две задачи:

$$\begin{cases} A(\varphi, x) \frac{d\varphi}{dx} + B(\varphi, x) = 0, & x \in (0, 1], \\ \varphi(0) = u_l, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} A(\varphi, x) \frac{d\varphi}{dx} + B(\varphi, x) = 0, & x \in [0, 1), \\ \varphi(1) = u_r. \end{cases} \quad (5)$$

Предположим, что решения задач (4) и (5) существуют на отрезке $x \in [0, 1]$, и обозначим их $\varphi^l(x)$ и $\varphi^r(x)$ соответственно. Эти функции определяют уровни, между которыми возникает внутренний слой.

Заметим, что для конкретного случая задачи (1) задачи (4) и (5) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = q(x), & x \in (0, 1], \\ \varphi(0) = u_l, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = q(x), & x \in [0, 1), \\ \varphi(1) = u_r. \end{cases} \quad (7)$$

и их решения могут быть выписаны явно.

Следуя [6], сформулируем ряд условий, необходимых для построения асимптотического приближения и доказательства существования решения вида движущегося фронта.

Пусть выполнены следующие неравенства всюду на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$\varphi^l(x) < \varphi^r(x), \quad (8)$$

$$A(\varphi^l(x), x) > 0, \quad A(\varphi^r(x), x) < 0. \quad (9)$$

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ фронт уже сформирован, т.е. функция $u_0(x)$ имеет переходный слой между уровнями $\varphi^l(x)$ и $\varphi^r(x)$ в окрестности точки $x_0^* \in (0, 1)$. Проблема формирования фронта в задаче реакция–диффузия рассматривалась, например, в [9].

Функцию $x_{t.p.}(t, \varepsilon)$, описывающую локализацию фронта, определим как точку пересечения решения (3) $u(x, t)$ и уровня $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\varphi^l(x) + \varphi^r(x))$.

Положим $x_{t.p.}(0, \varepsilon) = x_0^*$ и будем искать координату и скорость фронта в виде

$$x_{t.p.}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots, \quad (10)$$

$$v_{t.p.}(t, \varepsilon) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \dots, \quad (11)$$

где $v_i(t) = \frac{dx_i}{dt}$.

Предположим, что разрешима задача Коши

$$\begin{cases} \int_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u, x) du \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi^l(x)}{\varphi^r(x) - \varphi^l(x)}, \quad t \in (0, T], \\ x(0) = x_0^*, \end{cases} \quad (12)$$

и ее решение $x(t)$ таково, что

$$x(t) \in (0, 1) \quad \text{при всех } t \in [0, T],$$

и выполнены следующие неравенства:

$$\int_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u, x) du > 0 \quad \text{для всех } x \in [0, 1], \quad (13)$$

$$\int_{\varphi^l(x)}^s (A(u, x) - V(x)) du > 0 \quad (14)$$

для всех $s \in (\varphi^l(x), \varphi^r(x))$,

где

$$V(x) = \frac{\int_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u, x) du}{\varphi^r(x) - \varphi^l(x)}. \quad (15)$$

Условие (13) обеспечивает отсутствие стационарных решений (3), а условие (14) обеспечивает разрешимость задач, получаемых в процессе построения асимптотического приближения.

Асимптотика решения задачи (3) строится в виде

$$u = \begin{cases} u^l & \text{при } (x, t) \in \bar{D}_T^l, \\ u^r & \text{при } (x, t) \in \bar{D}_T^r, \end{cases} \quad (16)$$

где \bar{D}_T^l и \bar{D}_T^r — области, расположенные слева и справа от точки $x_{t.p.}(t, \varepsilon)$ соответственно, а функции u^l и u^r

$$\begin{aligned} u^l &= \bar{u}^l(x, \varepsilon) + Q^l(\xi, t, \varepsilon), \\ u^r &= \bar{u}^r(x, \varepsilon) + Q^r(\xi, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\bar{u}^{l,r}(x, \varepsilon)$ — регулярные функции, описывающие решение вдали от точки $x_{t.p.}(t, \varepsilon)$, функции $Q^{l,r}(\xi, t, \varepsilon)$ описывают переходный слой (движущийся фронт), существенны вблизи точки $x_{t.p.}(t, \varepsilon)$ и экспоненциально затухают при удалении от нее. Переменная $\xi = (x - x_{t.p.}(t, \varepsilon))/\varepsilon$, причем $\xi \leq 0$ для функций с индексом l и $\xi \geq 0$ для функций с индексом r .

Функции $\bar{u}^{l,r}(x, \varepsilon)$ и $Q^{l,r}(\xi, t, \varepsilon)$ представляются в виде рядов:

$$\bar{u}^{l,r}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{l,r}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{l,r}(x) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n^{l,r}(x) + \dots, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q^{l,r}(\xi, t, \varepsilon) &= Q_0^{l,r}(\xi, t) + \varepsilon Q_1^{l,r}(\xi, t) + \dots \\ &\dots + \varepsilon^n Q_n^{l,r}(\xi, t) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ряды (18) и (19) строятся в соответствии с [6]. Детали асимптотической процедуры мы опускаем и приведем лишь формулы, используемые нами для решения обратной задачи. Главные члены регулярной части определяются как

$$\bar{u}_0(x, t) = \begin{cases} \bar{u}_0^l = \varphi^l(x) & \text{для } x \in [0, x_{t.p.}(t, \varepsilon)), \\ \bar{u}_0^r = \varphi^r(x) & \text{для } x \in (x_{t.p.}(t, \varepsilon), 1]. \end{cases} \quad (20)$$

Движущийся фронт в нулевом приближении по ε описывается функциями $Q_0^{l,r}(\xi, t)$, для которых получается следующие задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_0^{l,r}}{\partial \xi^2} - \left(A(\varphi^{l,r}(x_{t.p.}(t, \varepsilon)) + Q_0^{l,r}, x_{t.p.}(t, \varepsilon)) - \right. \\ \left. - \hat{v}(t, \varepsilon) \right) \frac{\partial Q_0^{l,r}}{\partial \xi} = 0, \\ Q_0^l(0, t) + \varphi^l(x_{t.p.}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi(x_{t.p.}(t, \varepsilon)), \\ Q_0^r(0, t) + \varphi^r(x_{t.p.}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi(x_{t.p.}(t, \varepsilon)), \\ Q_0^l(\xi, t) \rightarrow 0 \quad \text{для } \xi \rightarrow -\infty, \\ Q_0^r(\xi, t) \rightarrow 0 \quad \text{для } \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (21)$$

Решения $Q_0^{l,r}(\xi, t)$ задач (21) удовлетворяют экспоненциальным оценкам

$$|Q_0^l(\xi, t)| \leq C e^{\kappa \xi}, \quad \xi \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

$$|Q_0^r(\xi, t)| \leq C e^{-\kappa \xi}, \quad \xi \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

где C и κ — положительные константы.

Условие непрерывного согласования производных функций $\varphi^l(x_{t.p.}(t, \varepsilon)) + Q_0^l(\xi, t)$ и $\varphi^r(x_{t.p.}(t, \varepsilon)) + Q_0^r(\xi, t)$ в точке $\xi = 0$ дает задачу Коши для нулевого приближения точки локализации фронта

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = \frac{\int_{\varphi^l(x_0)}^{\varphi^r(x_0)} A(u, x_0) du}{\varphi^r(x_0) - \varphi^l(x_0)}, \quad t \in (0, T), \\ x_0(0) = x_0^*, \end{cases} \quad (24)$$

разрешимость и свойства которой определяются (12) и условиями (13) и (14).

В соответствии с (22)–(23) ширина переходного слоя может быть оценена как

$$\Delta x = C |\varepsilon \ln \varepsilon|. \quad (25)$$

Основной результат работы [6], используемый нами для решения обратной задачи, состоит в следующем: функция

$$U_0(x, t) = \begin{cases} \bar{u}_0^l = \varphi^l(x) + Q_0^l(\xi_0, t) & \text{при } x \in [0, x_0(t)], \\ \bar{u}_0^r = \varphi^r(x) + Q_0^r(\xi_0, t) & \text{при } x \in [x_0(t), 1], \end{cases}$$

где $\xi_0 = (x - x_0(t))/\varepsilon$, дает равномерное на отрезке $x \in [0, 1]$ приближение решения задачи (3), причем

$$|u(x, t) - U_0(x, t)| = O(\varepsilon), \quad (26)$$

$$|x_{t.p.}(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (27)$$

Заметим, что в силу экспоненциальных оценок (22) и (23) для функций Q_0^l и Q_0^r вне узкой области $(x_0(t) - \Delta x, x_0(t) + \Delta x)$, где $\Delta x \sim \varepsilon |\ln \varepsilon|$, имеет место оценка

$$|u(x, t) - \varphi^{l,r}(x)| = O(\varepsilon), \quad (28)$$

что дает возможность с точностью $O(\varepsilon)$ в любой фиксированный момент времени заменить вне указанной области решение $u(x, t, \varepsilon)$ прямой задачи функциями $\varphi^l(x)$ и $\varphi^r(x)$ соответственно слева и справа от точки $x_0(t)$.

Так как в рассматриваемом случае задачи (1) функции $\varphi^l(x)$ и $\varphi^r(x)$ являются решениями (6) и (7),

то приходим к следующему соотношению для определения коэффициента $q(x)$:

$$\frac{du}{dx} = q(x), \quad x \in (0, 1) \setminus (x_{t.p.}(t, \varepsilon) - \Delta x, x_{t.p.}(t, \varepsilon) + \Delta x),$$

где $\Delta x = C|\varepsilon \ln \varepsilon|$.

Заметим, что мы можем переформулировать постановку исходной обратной задачи (1)–(2) в операторном виде:

$$A(q) = f_{\text{obs}},$$

где $A: C^{(1)}(x : (0, 1)) \rightarrow C^{(1)}((x : (0, 1)))$.

При решении прикладных задач мы обычно имеем данные с шумом f_δ ($\|f_{\text{obs}} - f_\delta\| \leq \delta$) и решаем задачу

$$A(q_\delta) = f_\delta.$$

В этой работе мы построили приближенный оператор $A_\varepsilon: C^{(1)} \rightarrow C^{(1)}$ такой, что $\|A - A_\varepsilon\|_{C^{(1)}} = O(\varepsilon)$, и решаем следующую задачу:

$$A_\varepsilon(q_{\delta, \varepsilon}) = f_\delta.$$

Для ее устойчивого решения можно применять методы из [11–13]. Ниже мы предлагаем другой алгоритм ее решения.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В предыдущем разделе было показано, что асимптотический анализ позволяет свести исходную обратную задачу (1)–(2) по определению коэффициента $q(x)$ к уравнению первого порядка асимптотической аппроксимации решения прямой задачи в фиксированный момент времени:

$$\frac{d f_{\text{obs}}(x)}{dx} = q(x), \quad (29)$$

$$x \in (0, 1) \setminus (x_{t.p.}(T, \varepsilon) - \Delta x, x_{t.p.}(T, \varepsilon) + \Delta x),$$

где $\Delta x = C|\varepsilon \ln \varepsilon|$ – толщина внутреннего слоя.

Теперь численный алгоритм решения обратной задачи (1)–(2) можно сформулировать для задачи в виде (29) с входной информацией $f_{\text{obs}}(x)$.

1. Введем равномерную по пространственной переменной сетку $X_N = \{x_n, 0 \leq n \leq N : x_n = 0 + hn, h = \frac{1-0}{N}\}$.
2. Предположим, что нам известны сеточные значения $f_{\text{obs}n} \equiv f_{\text{obs}}(x_n)$, $n = \overline{0, N}$, функции $f_{\text{obs}}(x)$ на сетке X_N , а также положение внутреннего слоя $x_{t.p.}(T)$ в момент наблюдения T .
3. Определим номера n узлов сетки X_N , которые лежат левее и правее внутреннего слоя, т.е. те n , для которых $x_n \in [0, x_{t.p.}(T, \varepsilon) - \Delta x] \equiv X^l$ и $x_n \in [x_{t.p.}(T, \varepsilon) + \Delta x, 1] \equiv X^r$ соответственно. При этом найдем

$$N^l = \max\{n : x_n \leq x_{t.p.}(T, \varepsilon) - \Delta x, 0 \leq n \leq N\},$$

$$N^r = \min\{n : x_n \geq x_{t.p.}(T, \varepsilon) + \Delta x, 0 \leq n \leq N\}.$$

4. Сгладим функцию $f_{\text{obs}}(x)$, заданную своими сеточными значениями $f_{\text{obs}n}$, $n = \overline{0, N}$, в каждой из

областей X^l и X^r , используя аппроксимирующий кубический сплайн. Соответствующие сглаживающие сплайны s_3^l и s_3^r реализуют минимумы следующих функционалов:

$$F^{p^l}(s_3^l) = p^l \sum_{n=0}^{N^l} (f_{\text{obs}n} - s_3^l(x_n))^2 + (1 - p^l) \sum_{n=0}^{N^l} \left(\frac{d^2 s_3^l}{dx^2}(x_n) \right)^2,$$

$$F^{p^r}(s_3^r) = p^r \sum_{n=N^r}^N (f_{\text{obs}n} - s_3^r(x_n))^2 + (1 - p^r) \sum_{n=N^r}^N \left(\frac{d^2 s_3^r}{dx^2}(x_n) \right)^2.$$

Замечание. Здесь мы не приводим описание численной реализации поиска минимумов данных функционалов в связи с тем, что соответствующие методы минимизации хорошо известны и их практические реализации могут быть найдены во многих прикладных пакетах программ (таких, как, например, MatLab, Fortran и т. д.).

Значения сглаживающих параметров p^l и p^r должны быть согласованы с уровнем δ ошибки задания входных данных

$$|f_{\text{obs}n} - \bar{f}_n| \leq \delta, \quad n = \overline{0, N},$$

где \bar{f}_n – точные, но неизвестные входные данные. Выбор этих сглаживающих параметров может быть осуществлен, например, в соответствии с обобщенным принципом невязки [10]:

$$\sum_{n=0}^{N^l} (f_{\text{obs}n} - s_3^{p^l}(x_n))^2 - (N^l + 1)^2 \delta^2 = 0,$$

$$\sum_{n=N^r}^N (f_{\text{obs}n} - s_3^{p^r}(x_n))^2 - (N - N^r + 1)^2 \delta^2 = 0,$$

где $s_3^{p^l}$ и $s_3^{p^r}$ – экстремали функционалов $F^{p^l}(s_3^l)$ и $F^{p^r}(s_3^r)$ соответственно.

Затем определим $f_n := s_3^l(x_n)$ для $n = \overline{0, N^l}$ и $f_n := s_3^r(x_n)$ для $n = \overline{N^r, N}$ – сеточные значения сглаженных входных данных на отрезке $[0, 1]$, кроме Δx -окрестности положения внутреннего слоя $x_{t.p.}(T)$.

5. Найдем сеточные значения $q_n \equiv q(x_n)$, $n = \overline{0, N^l} \cup \overline{N^r, N}$, искомой функции $q(x)$ из (29) с помощью классических формул вычисления первых производных со вторым порядком точности:

$$q_n = \begin{cases} \left(-\frac{3}{2}f_0 + 2f_1 - \frac{1}{2}f_2 \right) / h & \text{для } n = 0, \\ (f_{n+1} - f_{n-1}) / (2h) & \text{для } n = \overline{1, N^l - 1}, \\ \left(\frac{3}{2}f_{N^l} - 2f_{N^l-1} + \frac{1}{2}f_{N^l-2} \right) / h & \text{для } n = N^l, \\ \left(-\frac{3}{2}f_{N^r} + 2f_{N^r+1} - \frac{1}{2}f_{N^r+2} \right) / h & \text{для } n = N^r, \\ (f_{n+1} - f_{n-1}) / (2h) & \text{для } n = \overline{N^r + 1, N - 1}, \\ \left(\frac{3}{2}f_N - 2f_{N-1} + \frac{1}{2}f_{N-2} \right) / h & \text{для } n = N. \end{cases}$$

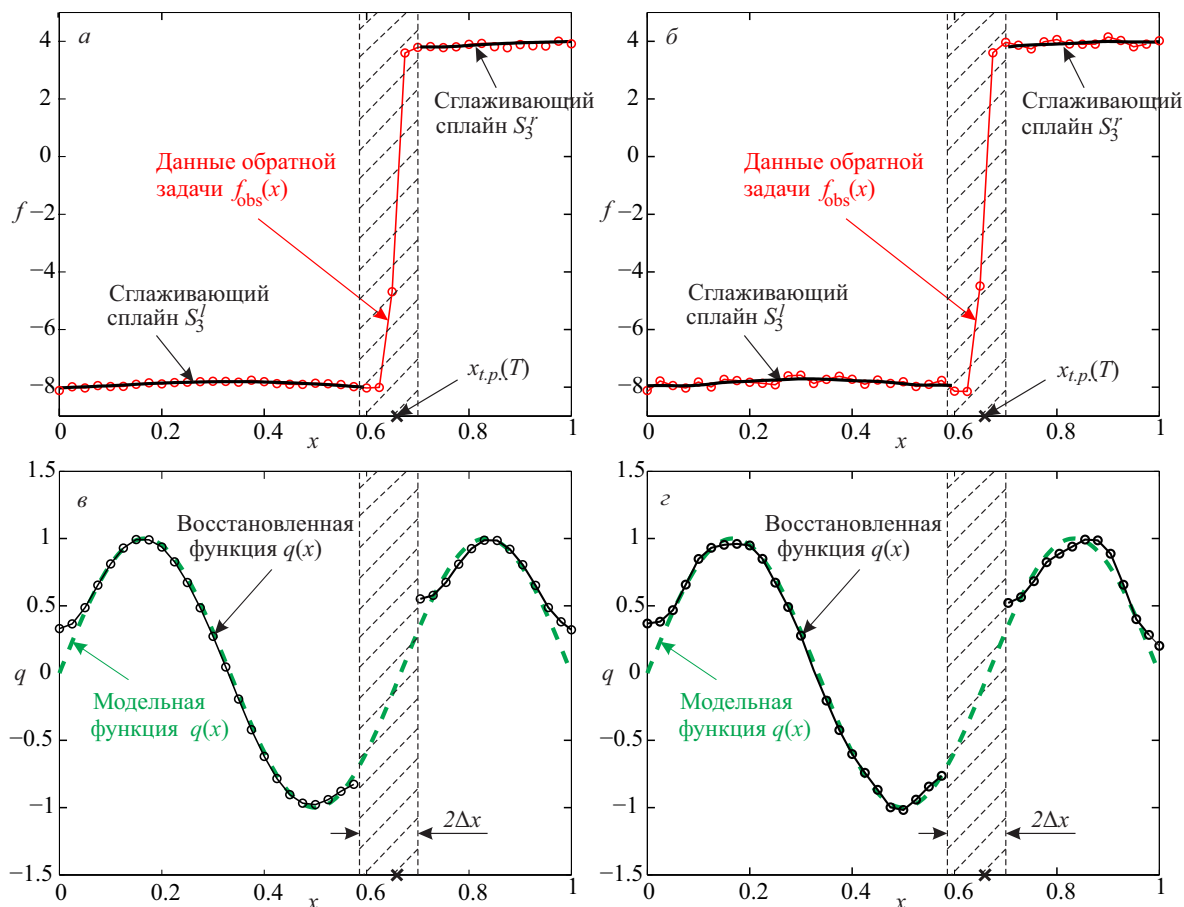


Рисунок. Результат восстановления коэффициента $q(x)$ (в, з) для разного уровня ошибок задания входных данных $f_{\text{obs}}(x)$ (а, б): а-в — $\delta \simeq 0.01\%$, и б-з — $\delta \simeq 0.1\%$. Коэффициент $q(x)$ восстановлен в области, не содержащей Δx -окрестность положения внутреннего слоя $x_{t.p.}(T)$

Примеры численных расчетов

Модельные численные расчеты были выполнены для такого же набора параметров, как и те, которые были использованы в численных экспериментах в [7] с целью качественного сравнения результатов, получаемых с использованием обоих подходов. Сначала с помощью схемы решения прямой задачи (1), описанной в [7], были симулированы входные данные $f_{\text{obs}}(x) = u(x, T) + \delta f$ (δf — ошибка задания входных данных) для модельной функции $q(x) = \sin(3\pi x)$ для следующего набора параметров:

$$\varepsilon = 10^{-1.5} \simeq 0.03, \quad T = 0.2, \quad u_l(t) = -8, \quad u_r(t) = 4,$$

$$u_{\text{init}}(x) = (x^2 - x - 2) - 6 \tanh\left(-3 \frac{x - 0.25}{\varepsilon}\right),$$

$$\text{а) } \delta \simeq 0.01\%, \quad \text{б) } \delta \simeq 0.1\%.$$

Затем к симулированным данным $f_{\text{obs}}(x)$ был применен описанный выше численный алгоритм со следующим набором параметров (который, опять же, идентичен набору параметров, использованному для соответствующих численных экспериментов, проведенных в [7]):

$$C = 0.5, \quad N = 40, \quad x_{t.p.}(T, \varepsilon) = 0.65.$$

На рисунке представлены результаты соответствующих расчетов. Сравнение с результатами, полученными в [7], показывает их хорошее качественное совпадение

за исключением того, что предложенный в данной работе метод позволяет восстановить коэффициент $q(x)$ не во всей области $x \in [0, 1]$, а в области $x \in [0, 1]$, кроме малой $C|\varepsilon \ln \varepsilon|$ -окрестности положения внутреннего слоя в момент наблюдения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nefedov N. N., Rudenko O. V. // Doklady Mathematics. 2018. **97**. P. 99.
2. Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N. // Modeling and Analysis of Information Systems. 2017. **24**, № 3. P. 322.
3. Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V. T. // Lecture Notes in Computer Science. 2017. **10187**. P. 107.
4. Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D. // Lecture Notes in Computer Science. 2017. **10187**. P. 492.
5. Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашиова Н. Т., Неведов Н. Н. // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. **24**, № 3. С. 259.
6. Антипов Е. А., Левашиова Н. Т., Неведов Н. Н. // ЖВМиМФ. 2014. **54**, № 10. С. 1594.
7. Lukyanenko D. V., Shishlenin M. A., Volkov V. T. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. **54**. P. 233.
8. Lukyanenko D. V., Grigorev V. B., Volkov V. T., Shishlenin M. A. // Computers and Mathematics with Applications. 2019. **77**, N 5. P. 1245.
9. Волков В. Т., Грачев Н. Е., Неведов Н. Н., Николаев Н. А. // ЖВМиМФ. 2007. **Т. 47**, № 8. С. 1356.

10. *Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.* Numerical methods for the solution of ill-posed problems. Kluwer Academic Publishers, 1995.
11. *Lavrentiev M. M.* // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1959. **127**, N 1. P. 31.
12. *Tikhonov A. N.* // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1963. **153**, N 1. P. 49.
13. *Vasin V. V., Ageev A. L.* Ill-Posed Problems With a Priori Information. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1995.

Application of Asymptotic Analysis for Solving the Inverse Problem of Determining the Coefficient of Linear Amplification in Burgers' Equation

D. V. Lukyanenko^a, V. T. Volkov^b, N. N. Nefedov, A. G. Yagola

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^alukyanenko@physics.msu.ru, ^bvolkovvt@mail.ru.

Asymptotic analysis of a singularly perturbed reaction–diffusion–advection equation, which is called a Burgers–type equation in applications and has a solution with a sharp transition layer, is applied to solve the coefficient inverse problem of determining the coefficient of linear amplification from known information on the observed solution of the direct problem at the final moment of time. The efficiency of the approach proposed in this study is shown using a series of model numerical experiments.

Keywords: singularly perturbed problem, reaction–diffusion–advection equation, interior layer, coefficient inverse problem.

PACS: 2.60.Lj, 02.90.+p.

Received 09 August 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 2. Pp. 131–136.

Сведения об авторах

1. Лукьяненко Дмитрий Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru.
2. Волков Владимир Тарасович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: volkovvt@mail.ru.
3. Неведов Николай Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
4. Ягола Анатолий Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: yagola@physics.msu.ru.