

АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Релятивистские редукции в прецизионных измерениях гравитационного поля земли с помощью низкоорбитальных космических аппаратовВ. К. Милюков,^{1, а} М. В. Сажин,¹ В. Н. Семенцов,^{1, б} С.-Ц. Е,² Ч. Сье²¹ *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ), Россия, 119991, Москва, Университетский пр-т, д. 13.*² *Университет имени Сунь Ятсена. Гуанчжоу, Китайская Народная Республика.*

Поступила в редакцию 19.11.2018, после доработки 03.12.2018, принята к публикации 05.12.2018.

Развитие космических технологий открывает новые перспективы в создании моделей гравитационного поля Земли высокого разрешения. Применение прецизионной лазерной интерферометрической системы требует учета релятивистских эффектов в измерениях межспутникового расстояния в космической группировке. Основной величиной, измеряемой лазерной системой, является набег фазы лазерного луча при прохождении двойного расстояния между спутниками. В работе получено решение для релятивистской фазы, которое в дополнение к обычному члену Шапиро учитывает вклад квадрупольного члена в распределения массы Земли, спина Земли и приливных гравитационных полей, обусловленных гравитационными потенциалами внешних тел Солнечной системы. Сделана оценка членов релятивистской редукции на уровне точности ~ 1 нм, которая полностью удовлетворяет точности прецизионных измерений в группировке, состоящей из двух космических аппаратов. В гравитационных мультиспиральных миссиях следующего поколения будет необходимо учитывать релятивистские эффекты следующего порядка малости.

Ключевые слова: космическая геодезия, гравитационное поле Земли, релятивистские эффекты.

УДК: 528.2, 530.122, 629.78. PACS: 04.80.-y, 06.30.Gv.

ВВЕДЕНИЕ

Космическая геодезия вступила в XXI век с абсолютно новым поколением низко-орбитальных спутников, оборудованных высокоточными системами слежения «Земля—спутник» и «спутник—спутник» и высокоточными системами измерения инерциальных ускорений (акселерометрами и градиентометрами). К спутникам нового поколения следует отнести реализованные миссии CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) [1], GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) [2] и GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) [3], посвященные в первую очередь исследованию гравитационного поля Земли и его пространственных и временных вариаций. Миссия GRAIL (Gravity Recovery And Interior Laboratory) [4] была предназначена для изучения гравитационного поля Луны. Для повышения точности определения параметров гравитационного поля Земли, его изменения во времени и пространстве стали применяться кластеры связанных между собой радиосвязью космических аппаратов, образующих своеобразный «орбитальный градиентометр» (рисунок). Такая схема позволяет эффективно подавлять действующие на КА когерентные помехи и измерять расстояние между спутниками с точностями до микрон. Указанная точность реализована на геодезических спутниках GRACE и GRAIL.

GRACE состоял из двух спутников-близнецов, находившихся на почти круговой орбите с первоначальной высотой порядка 500 км и наклоном 89.5° , на расстоянии ~ 200 км друг от друга, и связанных высокоточной межспутниковой микроволновой системой К-диапазона. GRACE был запущен 17 марта 2002 года

и в октябре 2017 года прекратил свое существование. По данным миссии GRACE впервые начато построение ежемесячных моделей гравитационного поля Земли. За более чем 15 лет работы накоплено большое количество таких моделей, что позволяет изучать временные изменения гравитационного поля Земли и выявить ряд неисследованных ранее процессов как глобального, так и регионального масштаба. Для заданной ошибки определения высоты геоида ~ 1 мм ежемесячные модели содержат около 50 сферических гармоник, что соответствует пространственному разрешению ~ 400 км. Таков современный уровень точности и пространственного разрешения месячных моделей. Благодаря этим моделям миссия GRACE обеспечила беспрецедентное понимание того, как меняется наша планета, ее климат и гравитационное поле.

В продолжение миссии GRACE 22 мая 2018 года состоялся запуск двух спутников-близнецов GRACE Follow On [5]. Основной целью миссии является обеспечение поступления данных для ежемесячных глобальных моделей гравитационного поля Земли высокого разрешения, начатых в миссии GRACE, т. е. мониторинг медленных временных вариаций гравитационного поля Земли. Два спутника GRACE FO находятся на той же орбите, что и GRACE, и используют ту же систему микроволновой связи К-диапазона, так что можно ожидать тот же микронный уровень точности измерения межспутникового расстояния. Однако принципиальным моментом является то, что спутники также оснащены системой лазерной связи, которая позволит поднять точность измерений на нанометровый уровень. Ожидаемая среднеквадратическая ошибка лазерных измерений $80 \text{ нм/Гц}^{1/2}$ в диапазоне частот $0.2 - 100 \text{ МГц}$. По информации, имеющейся у авторов на момент написания статьи (Gerhard Heinzel, The Max Planck Institute

^а E-mail: vmilyukov@yandex.ru^б E-mail: valera@sai.msu.ru

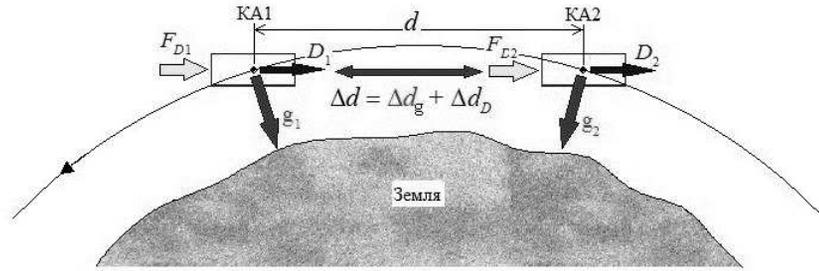


Рисунок. Орбитальный градиентометр, образованный парой космических аппаратов-близнецов, находящихся на одинаковых орбитах. Расстояние d между КА измеряется микроволновой системой слежения (лазерной системой в GRACE FO). Гравитационное поле вычисляется из измерений вариаций расстояния $\Delta d = \Delta d_g + \Delta d_D$, которые обусловлены гравитационным ускорением g и атмосферным сносом D , действующими на каждый КА. Негравитационные эффекты (атмосферный снос) измеряются бортовыми акселерометрами и удаляются в процессе обработки данных

for Gravitational Physics, Hannover, устное сообщение), первые данные обработки лазерных измерений показали беспрецедентную точность: $100 \text{ пм/Гц}^{1/2}$ на частоте $\sim 1 \text{ МГц}$, т. е. ожидаемая точность превышена почти на 3 порядка!

Точность измерения межспутникового расстояния в миссии GFO, а также в гравитационных миссиях следующего поколения (ГМСП) [6] приводит к необходимости учитывать релятивистские эффекты в наборах выходных данных лазерной интерферометрической системы (ЛИС). Целью настоящей работы является вывод и обсуждение формул для релятивистских редуций при прецизионных изменениях межспутникового расстояния низкоорбитальной группировки космических аппаратов.

1. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ В ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В непосредственной близости от Земли мы будем использовать стандартную систему координат: это геоцентрическая система координат с центром в центре масс Земли, которая используется для построения и отслеживания орбит в окрестности Земли (ГСКЗ). Такое использование было рекомендовано резолюцией XXIV съезда МАС (Международный астрономический союз). Кроме того, этот же съезд рекомендовал использовать метрический тензор в виде функций от скалярного гравитационного потенциала и от векторного гравитационного потенциала [7–9]. Мы будем использовать это решение. Исходя из данной формулировки, мы определим метрический тензор g_{mn}^E невращающейся системы координат ГСКЗ. Обозначим координаты в этой системе отсчета как $\{x_E^m\} \equiv (x^0 = ct, \mathbf{x})$ и представим метрический тензор g_{mn}^E в следующем виде:

$$\begin{aligned} g_{00}^E &= 1 - \frac{2}{c^2} w_E + \frac{2}{c^4} w_E^2 + \mathcal{O}(c^{-6}), \\ g_{0\alpha}^E &= -\gamma_{\alpha\lambda} \frac{4}{c^3} w_E^\lambda + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ g_{\alpha\beta}^E &= \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} \frac{2}{c^2} w_E + \mathcal{O}(c^{-4}), \end{aligned} \quad (1)$$

где w_E — скалярный гравитационный потенциал, представляемый в виде

$$w_E = U_E + u_E^{\text{tidal}} + \mathcal{O}(c^{-3}). \quad (2)$$

Скалярный потенциал w_E формируется как линейная суперпозиция гравитационного потенциала только Земли U_E и приливного потенциала u_E^{tidal} всех остальных

тел Солнечной системы (за исключением Земли), который вычисляется в центре нашей системы координат (ГСКЗ). Гравитационный потенциал Земли U_E в некоторой точке \mathbf{x} , записанный в сферических координатах ($r \equiv |\mathbf{x}|, \phi, \theta$), дается выражением

$$\begin{aligned} U_E &= G \int \frac{\sigma(t, \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathcal{O}(c^{-4}) = \\ &= \frac{GM_E}{r} \left(1 + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \left(\frac{R_E}{r} \right)^\ell P_{\ell k}(\cos \theta) \times \right. \\ &\quad \left. \times (C_{\ell k}^E \cos k\phi + S_{\ell k}^E \sin k\phi) \right) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (3) \end{aligned}$$

где $\sigma(t, \mathbf{x}')$ — релятивистская плотность массы внутри Земли [9], через M_E обозначена масса Земли, через R_E — ее радиус, $P_{\ell k}$ — полиномы Лежандра, а $C_{\ell k}^E$ и $S_{\ell k}^E$ являются релятивистскими нормированными коэффициентами сферических гармонических функций, которые характеризуют гравитационный потенциал Земли. Надо отметить, что только коэффициенты гармоник низкого порядка зависят от релятивистского вклада, а зависящим от времени вкладом в релятивистские эффекты за счет эластичности Земли можно пренебречь. Также следует подчеркнуть сразу, что в приливном потенциале u_E^{tidal} достаточно оставить только ньютоновский вклад (причем в первую очередь от Солнца и Луны), которые могут быть заданы как обычно:

$$\begin{aligned} u_E^{\text{tidal}} &= \sum_{b \neq E} (U_b(\mathbf{r}_{bE} + \mathbf{x}) - U_b(\mathbf{r}_{bE}) - \mathbf{x} \cdot \nabla U_b(\mathbf{r}_{bE})) \approx \\ &\approx \sum_{b \neq E} \frac{GM_b}{2r_{bE}^3} (3(\mathbf{n}_{bE} \cdot \mathbf{x})^2 - \mathbf{x}^2) + \mathcal{O}(r_{bE}^{-4}, c^{-2}), \quad (4) \end{aligned}$$

где U_b — обычный ньютоновский гравитационный потенциал тела b , \mathbf{r}_{bE} — вектор, соединяющий центр масс тела с Землей и ∇U_b — обозначает градиент потенциала. Обратим внимание, что в уравнении (4) мы опустили релятивистские приливные вклады порядка $\mathcal{O}(c^{-2})$, которые создаются внешними гравитационными потенциалами. Этот вклад порядка 10^{-16} по сравнению со вкладом Земли, и, следовательно, им можно пренебречь на уровне требуемой точности. Мы привели здесь только самый большой вклад в приливной потенциал, который имеет порядок $\sim r_{bE}^{-3}$.

Используя явный вид этого гравитационного потенциала, приливный вклад можно легко вычислить для любого небесного тела в любом требуемом порядке по степеням расстояния, необходимом для решения конкретной проблемы.

Наконец, вклад от вращения тела определяется посредством векторного гармонического потенциала, w_E^α , который определяется как

$$w_E^\alpha = G \int \frac{\sigma^\alpha(t, \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{GM_E}{2r^3} [\mathbf{x} \times \mathbf{S}_E]^\alpha + \mathcal{O}(r^{-4}, c^{-2}), \quad (5)$$

где $\sigma^\alpha(t, \mathbf{x}')$ является релятивистской плотностью тока вещества внутри вращающейся Земли. Кроме того, в уравнении (5) мы явно учитываем только самый большой по величине вращательный момент, \mathbf{S}_E — угловой момент вращения Земли на единицу массы. Вклад других векторных гармоник из-за вращения Земли ничтожен.

Метрический тензор (1) с гравитационными потенциалами в выбранной форме представляет собой характеристики пространства в системе (ГСКЗ), которые мы выбирали, чтобы сформулировать релятивистскую модель наблюдаемых величин. Такой выбор потенциалов рекомендован также МАС.

Измеряемой величиной в спутниковых экспериментах является фаза электромагнитной волны [10]. Наша цель — вычислить фазу с учетом релятивистских эффектов. Фаза электромагнитной волны — это скалярная функция, которая инвариантна при общих преобразованиях координат. В приближении геометрической оптики фазу φ можно найти из уравнения эйконала [11, 12]:

$$g^{mn} \partial_m \varphi \partial_n \varphi = 0 \quad (6)$$

что является прямым следствием уравнений Максвелла. Его решение описывает волновой фронт электромагнитной волны, распространяющейся в искривленном пространстве-времени. Геометрические свойства раствора определяются метрическим тензором g^{mn} , который является решением уравнений поля Эйнштейна. В непосредственной близости от Земли этот тензор определяется уравнениями (1)–(4).

Решение уравнения эйконала в ГСКЗ для фазы электромагнитной волны было подробно проанализировано в работе [9]. Мы применим выведенные в этой работе общие уравнения для нашего случая. Определяя $h^{mn} = g^{mn} - \gamma^{mn}$ с g_{mn} , которые задаются уравнениями (1)–(4), и сохраняя только члены первого порядка по G , мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения фазы φ_G :

$$\frac{d\varphi_G}{d\lambda} = -\frac{1}{2} h^{mn} k_m k_n = -\frac{2k_0^2}{c^2} w_E - \frac{4k_0^2}{c^3} (k_\varepsilon w_E^\varepsilon) + \mathcal{O}(G^2), \quad (7)$$

где $d\varphi_G/d\lambda = k_m \partial^m \varphi$. Подставляя скалярный и векторный потенциалы w_E и w_E^λ из уравнений (2)–(4), получим:

$$\frac{d\varphi_G}{d\lambda} = \frac{d\varphi_G^E}{d\lambda} + \frac{d\varphi_G^S}{d\lambda} + \frac{d\varphi_G^{\text{tidal}}}{d\lambda}, \quad (8)$$

где три члена в уравнении для релятивистской фазы появляются из-за различных моментов гравитационного поля вблизи Земли: первый член φ_G^E определяется потенциалом (3), вклад за счет вращения Земли φ_G^S определяется потенциалом (5), и, наконец, последний член φ_G^{tidal} определяется приливными гравитационными полями внешних тел солнечной системы (4). Таким образом, эти три слагаемых релятивистской фазы определяются из следующих уравнений:

$$\frac{d\varphi_G^E}{d\lambda} = -\frac{2k_0^2 G}{c^2} \int \frac{\sigma_E(t, \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathcal{O}(G^2), \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi_G^S}{d\lambda} = -\frac{4k_0^2 G}{c^3} k_\varepsilon \int \frac{\sigma_E^\varepsilon(t, \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathcal{O}(G^2), \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi_G^{\text{tidal}}}{d\lambda} = -\sum_{b \neq E} \frac{GM_b}{c^2} \frac{k_0^2}{r_{bE}^3} (3(\mathbf{n}_{bE} \cdot \mathbf{x})^2 - \mathbf{x}^2) + \mathcal{O}(r_{bE}^{-4}, G^2). \quad (11)$$

Траекторию светового луча, справедливую в ньютоновском приближении, мы представим в виде уравнения прямых линий:

$$\{x^m\} \equiv (x^0 = ct, \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{k}c(t - t_0)) + \mathcal{O}(G). \quad (12)$$

Такое представление позволяет выразить ньютоновскую часть волнового вектора K_m как $k^m = dx^m/d\lambda = k^0(1, \mathbf{k}) + \mathcal{O}(G)$, где $k^0 = cdt/d\lambda + \mathcal{O}(G)$ и $|\mathbf{k}| = 1$. Имея в виду, что k^m является величиной постоянной, можно установить важное соотношение между аффинным параметром вдоль траектории и временной координатой:

$$d\lambda = \frac{cdt}{k^0} + \mathcal{O}(G), \quad (13)$$

которое мы будем использовать для интегрирования (9). Это выражение позволяет учесть вклад от всех мультиполей распределения массы внутри Земли, как дано в уравнении (3). Применяя уравнение (12), можно выписать правую часть уравнения (9) как

$$\frac{d\varphi_G^E}{d\lambda} = -\frac{2k_0^2 G}{c^2} \int \frac{\sigma_E(t, \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x}_0 + \mathbf{k}c(t - t_0) - \mathbf{x}'|}. \quad (14)$$

Хотя в уравнении (14) присутствует явная зависимость от времени, мы будем полагать, что распределение плотности вещества при интегрировании является статичным. Связано это с тем, что время распространения светового сигнала от одного спутника до второго составляет несколько миллисекунд, а характерные времена изменения плотности внутри Земли — несколько часов или дней (погодные изменения плотности), а также несколько месяцев (сезонные изменения плотности внутри коры). Поэтому можно пренебречь изменением плотности во времени и считать распределение статичным.

Интегрируем уравнение (14) от момента времени t_0 до момента t и получаем решение для фазы в следующем виде:

$$\varphi_G^E(t, \mathbf{x}) = -\frac{2k_0^2 G}{c^2} \int \sigma_E(t, \mathbf{x}') \times \ln \left[\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'| + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')} \right] d^3 x' + \mathcal{O}(G^2). \quad (15)$$

Плотность $\sigma(t, \mathbf{x}')$ можно представить как совокупность большого числа элементарных масс, имеющих только монополюный член. Поэтому интеграл (15) является суммой соответствующих задержек Шапиро, производимых каждой из этих элементарных масс, проинтегрированных по объему.

Можно рассчитать вклад в фазу от любого из мультиполюльных членов в распределении масс внутри протяженного тела. Однако, для целей анализа рассматриваемой космической группировки мы будем вычислять только вклады от самых больших мультиполюльных моментов в распределении масс внутри Земли, а именно: M_E — монополюного и $J_E^{\varepsilon\lambda}$ — квадрупольного моментов. Такого анализа достаточно для точности, требуемой условиями эксперимента. Вклад остальных мультиполюльных моментов подробно проанализирован в [9].

Разложим подынтегральное выражение для логарифма в ряд и проинтегрируем (15) по всему объему тела. Введем определения:

$$\begin{aligned} M_E &= \int d^3x' \sigma_E(t, \mathbf{x}'), \\ d_E^\varepsilon &= M_E^{-1} \int d^3x' \sigma_E(t, \mathbf{x}') x'^\varepsilon \equiv 0, \\ J_E^{\varepsilon\lambda} &= M_E^{-1} \int d^3x' \sigma_E(t, \mathbf{x}') (3x'^\varepsilon x'^\lambda + \gamma^{\varepsilon\lambda} r'^2), \quad (16) \\ S_E^{\alpha\beta} &= M_E^{-1} \int d^3x' \sigma_E(t, \mathbf{x}') (v^\alpha x'^\beta - v^\beta x'^\alpha) = \\ &= \gamma_{\mu\nu} \varepsilon_\mu^{\alpha\beta} S_E^\mu, \end{aligned}$$

где M_E — масса Земли, а $J_E^{\varepsilon\lambda}$ — квадрупольный момент. Здесь $\varepsilon_{\alpha\mu\nu}$ является полностью антисимметричным символом Леви–Чивиты $\varepsilon_{123} = 1$, а S_E^μ — спиновый момент Земли.

В результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) &= \varphi_0 + k_0 \left(c(t-t_0) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{2GM_E}{c^2} \left\{ \ln \left[\frac{r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \right] + \frac{1}{c} \left(\mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{S}_E \times \left(\frac{\mathbf{n}}{r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{n}_0}{r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \right) \right] \right) \right\} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[\frac{(n_\varepsilon + k_\varepsilon)(n_\lambda + k_\lambda)}{(r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^2} + \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_\varepsilon n_\lambda}{r(r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \frac{(n_{0\varepsilon} + k_\varepsilon)(n_{0\lambda} + k_\lambda)}{(r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0)^2} - \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_{0\varepsilon} n_{0\lambda}}{r_0(r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0)} \right] J_E^{\varepsilon\lambda} \left. \right\} - \\ &\quad - \sum_{b \neq E} \frac{GM_b}{2c^2} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + 3n_{bE\varepsilon} n_{bE\lambda}}{r_{bE}^3} \times (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \left(x^\varepsilon x_0^\lambda + x^\lambda x_0^\varepsilon + \frac{2}{3} (x^\varepsilon - x_0^\varepsilon)(x^\lambda - x_0^\lambda) \right) \Big) + \mathcal{O}(G^2). \quad (20) \end{aligned}$$

Уравнение (20) обобщает известное выражение для релятивистского запаздывания. В дополнение к классическим эффектам гравитационной задержки Шапиро из-за массы притягивающего тела (в виде логарифмического члена), оно также включает вклады из-за квадрупольного момента (член, умноженный на $J_E^{\varepsilon\lambda}$), спина (член, содержащий величину \mathbf{S}_E) и внешних тел Солнечной системы (член, содержащий суммирование). Таким образом, уравнение (20) включает эффекты протяженной и вращающейся Земли, а также эффекты из-за приливных гравитационных полей внешних тел Солнечной системы, которые присутствуют в системе.

$$\begin{aligned} \varphi_G^E(t, \mathbf{x}) &= -\frac{2GM_E}{c^2} k_0 \left\{ \ln \left[\frac{r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \right] - \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[\frac{(n_\varepsilon + k_\varepsilon)(n_\lambda + k_\lambda)}{(r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^2} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_\varepsilon n_\lambda}{(r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \frac{(n_{0\varepsilon} + k_\varepsilon)(n_{0\lambda} + k_\lambda)}{(r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0)^2} - \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r_0} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_{0\varepsilon} n_{0\lambda}}{(r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0)} \right] J_E^{\varepsilon\lambda} \right\} + \mathcal{O}(G^2). \quad (17) \end{aligned}$$

Этот результат также согласуется с результатами, полученными в [13, 14].

Спиновый момент Земли дает вклад

$$\begin{aligned} \varphi_G^S(t, \mathbf{x}) &= -\frac{2GM_E}{c^3} k_0 \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{S}_E \times \left(\frac{\mathbf{n}}{r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{n}_0}{r_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \right) \right] \right) + \\ &\quad + \mathcal{O}(r^{-2}, G^2). \quad (18) \end{aligned}$$

И наконец, член, определяемый внешним гравитационным полем:

$$\begin{aligned} \varphi_E^{\text{tidal}} &= \sum_{b \neq E} \frac{GM_b}{2c^2} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + 3n_{bE\varepsilon} n_{bE\lambda}}{r_{bE}^3} k_0 (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \times \\ &\quad \times \left(x^\varepsilon x_0^\lambda + x^\lambda x_0^\varepsilon + \frac{2}{3} (x^\varepsilon - x_0^\varepsilon)(x^\lambda - x_0^\lambda) \right) + \\ &\quad + \mathcal{O}(r_{bE}^{-4}, G^2). \quad (19) \end{aligned}$$

Запишем фазу электромагнитной волны, которая распространяется в непосредственной близости от протяженной и вращающейся Земли в постминковском приближении. Полное решение уравнения (8) имеет вид:

2. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ В ИЗМЕРЕНИИ МЕЖСПУТНИКОВОГО РАССТОЯНИЯ НИЗКООРБИТАЛЬНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ГРУППИРОВКИ

Оценка членов релятивистской редукции сделана для орбитальной группировки, состоящей из двух спутников близнецов, следующих друг за другом на расстоянии ~ 100 км на низкой (~ 400 км) полярной орбите. Параметры группировки перечислены в [таблице](#).

Предполагается, что инструментальная точность лазерной интерферометрической системы равна $10 \text{ нм/Гц}^{1/2}$ в диапазоне частот $0.1\text{--}100$ мГц. Предполагается также, что спутники оборудованы системой компенсации сноса и контроля высоты,

Таблица. Параметры космической группировки

Параметр	Обозначение/уравнение	Значение
Орбитальная высота, км	h_G	400
Эксцентриситет орбиты	e	0.001
Наклон орбиты, °	i	89.50
Расстояние между космическими аппаратами, км	d_{AB}	100
Диапазон скорости между космическими аппаратами, м/с	$\dot{d}_{AB} = (\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_{AB}) \approx v_{AB}e$	0.3
Геоцентрическая скорость, км/с	$v_{A0} = (GM_E/(R_\oplus + h_G))^{1/2}$	7.68
Средняя орбитальная частота, мрад/с	$\omega_G = (GM_E/(R_\oplus + h_G)^3)^{1/2}$	1.13
Относительная скорость КА, м/с	$v_{AB} = v_{A0}d_{AB}/(R_\oplus + h_G)$	375
Геоцентрическое ускорение, м/с	$a_{A0} = GM_E/(R_\oplus + h_G)^2$	8.70
Относительное ускорение КА, м/с	$a_{AB} = a_{A0}d_{AB}/(R_\oplus + h_G)$	0.13
Длина волны лазера, нм	λ_{A0}	1064
Сдвиг частоты, МГц	f_B^{off}	6

которая способна компенсировать ускорения уровня $10^{-11} \text{ м/с}^2/\Gamma_{\text{ц}}^{1/2}$ с помощью двигателей малой тяги с шумовым пределом $0.1 \text{ мН}/\Gamma_{\text{ц}}^{1/2}$.

Теперь мы можем оценить величины различных членов, входящих в уравнение (20), которые помогут нам упростить общее выражение для величины релятивистской фазы в системе ГСКЗ. Введем определения: расстояние между КА пусть будет $R_{AB} = |\mathbf{R}_{AB}|$,

а единичный вектор в направлении между ними $\mathbf{N}_{AB} = \mathbf{R}_{AB}/R_{AB}$. Геоцентрические положения космических аппаратов описываются аналогичными уравнениями: $\mathbf{n}_A = \mathbf{x}_A/r_A$, $\mathbf{n}_B = \mathbf{x}_B/r_B$, где $r_A = |\mathbf{x}_A|$, $r_B = |\mathbf{x}_B|$.

В результате, фаза электромагнитного сигнала, который вышел из пространственно-временной точки A , в точке B имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(t_B, \mathbf{x}_B) = & \varphi_0 + k_0 \left(c(t_B - t_A) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) - \frac{2GM_E}{c^2} \left\{ \ln \left[\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}} \right] + \right. \right. \\ & + \frac{1}{c} \left(\mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{S}_E \times \left(\frac{\mathbf{n}_B}{r_B + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B} - \frac{\mathbf{n}_A}{r_A + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_A} \right) \right] \right) - \frac{1}{6} \left[\frac{(n_{B\varepsilon} + k_\varepsilon)(n_{B\lambda} + k_\lambda)}{(r_B + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B)^2} + \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_{B\varepsilon}n_{B\lambda}}{r_B(r_B + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B)} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n_{A\varepsilon} + k_\varepsilon)(n_{A\lambda} + k_\lambda)}{(r_A + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_A)^2} - \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_{A\varepsilon}n_{A\lambda}}{r_A(r_A + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_A)} \right] J_E^{\varepsilon\lambda} \right\} - \\ & \left. - \sum_{b \neq E} \frac{GM_b}{2c^2} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + 3n_{b\varepsilon}n_{b\lambda}}{r_{bE}^3} R_{AB} (x_B^\varepsilon x_A^\lambda + x_B^\lambda x_A^\varepsilon + \frac{2}{3} R_{AB}^\varepsilon R_{AB}^\lambda) \right) + \mathcal{O}(G^2). \quad (21) \end{aligned}$$

Оценим величины членов в уравнении (21). Будем считать, что оба космических аппарата находятся на орбитах, параметры которых заданы в таблице.

Первый член — это «задержка Шапиро». Полагая, что расстояние между двумя космическими аппаратами есть $d_{AB} = 100$ км, высота космического корабля над поверхностью Земли $h_G = 400$ км, большая полуось орбиты КА $a = R_\oplus + h_G$, где $R_\oplus = 6371$ км — радиус Земли, эта величина

$$\begin{aligned} \frac{2GM_E}{c^2} \ln \left[\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}} \right] & \approx \\ & \approx \frac{1}{2}(\gamma + 1) \frac{2GM_E}{c^2} \frac{d_{AB}}{a} (1 + e \cos \omega_G t) = \\ & = 130.85 \text{ мкм} + 0.131 \text{ мкм} \cdot \cos \omega_G t \quad (22) \end{aligned}$$

где ω_G — средняя угловая скорость кластера космических аппаратов. При ожидаемой точности порядка 1 нм, очевидно, что формулы редукции наблюдений должны включать релятивистское запаздывание Шапиро и должны учитываться при обработке наблюдаемых величин.

Оценим вклад в фазу, который возникает из-за вращения Земли. Предполагая, что спиновый момент

реальной Земли такой же, как у жесткой Земли с однородно распределенной плотностью, мы получаем значение

$$M_E S_{E0} = \frac{2}{5} M_E \omega_\oplus R_\oplus^2 = 7.05 \times 10^{33} \text{ кг м}^2/\text{с},$$

что позволяет оценить этот член как

$$\begin{aligned} \frac{2GM_E}{c^3} \left(\mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{S}_E \times \left(\frac{\mathbf{n}_B}{r_B + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B} - \frac{\mathbf{n}_A}{r_A + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_A} \right) \right] \right) & \approx \\ & \approx \frac{2GM_E}{c^3} (\mathbf{k} \cdot [\mathbf{S}_E \times \mathbf{n}_A]) \frac{d_{AB}}{a^2} = \\ & = 75 \times 10^{-12} \text{ м}. \quad (23) \end{aligned}$$

То есть это 75 пм, что значительно меньше заданной точности измерения расстояний между КА (~ 1 нм). Следовательно, для наших целей вклад со стороны спинового момента вращения Земли может быть отброшен как пренебрежимо малый. Но в гравитационных миссиях следующего поколения [6] вклад со стороны момента вращения Земли необходимо учитывать.

Третье слагаемое в (20), обозначим его как Δd_{J_2} , дает вклад в задержку фазы за счет квадрупольного момента Земли:

$$\Delta d_{J_2} = -\frac{GM_E}{3c^2} \left[\frac{(n_{B\varepsilon} + k_\varepsilon)(n_{B\lambda} + k_\lambda)}{(r_B + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B)^2} + \frac{1}{r_B} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_{B\varepsilon}n_{B\lambda}}{(r_B + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B)} - \frac{(n_{A\varepsilon} + k_\varepsilon)(n_{A\lambda} + k_\lambda)}{(r_A + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_A)^2} - \frac{1}{r_A} \frac{\gamma_{\varepsilon\lambda} + n_{A\varepsilon}n_{A\lambda}}{(r_A + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_A)} \right] J_E^{\varepsilon\lambda}. \quad (24)$$

Полагая нормированный тензор квадрупольного момента $J_{2\oplus} = 1.08263 \times 10^{-3}$, получаем оценку

$$\Delta d_{J_2} \approx 62.8 \times 10^{-9} \text{ м} \cdot (\gamma_{\varepsilon\lambda} + 3n_{A\varepsilon}n_{A\lambda}) + 1.39 \times 10^{-9} \text{ м} \cdot (n_{A\varepsilon}k_\lambda + n_{A\lambda}k_\varepsilon). \quad (25)$$

Таким образом, даже члены второго порядка по величине d_{AB}/a вносят достаточно большой вклад в величину фазы, чтобы быть наблюдаемыми в предстоящей космической миссии.

Наконец, мы должны оценить вклад внешних тел Солнечной системы в последнее слагаемое в правой части уравнения (21). Его величина равна

$$8.79 \times 10^{-12} \text{ м} + 4.03 \times 10^{-12} \text{ м}. \quad (26)$$

Очевидно, что вклады приливных сил из-за Луны и Солнца в задержку фазы очень малы; вклады от других тел Солнечной системы (т.е. Венеры, Марса и Юпитера) еще меньше. Поэтому все приливные члены в распространение света из-за внешних тел Солнечной системы для нашей задачи могут быть опущены. В гравитационных миссиях следующего поколения вклад внешних тел уже надо будет учитывать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь мы вывели и оценили релятивистские редукции для прецизионных изменений межспутникового расстояния низкоорбитальной группировки космических аппаратов. Точность редуционных формул составляет ~ 1 нм.

Для вывода этих формул, следуя [9], мы рассмотрели общий случай пространства, наполненного гравитационным полем в окрестности протяженного тела. Тело является произвольным по форме и распределению масс, а также вращающимся. В будущих гравитационных миссиях [10] измеряемой величиной, которая определяет межспутниковое расстояние, является разность фаз опорного луча и луча, прошедшего двойной путь между КА. Поэтому мы приводим компактную замкнутую форму общерелятивистского решения, описывающего фазу плоской волны, которая учитывает вклад всех массовых и токовых мультиполей самого тела (уравнения (17) и (18)), а также вклад, обусловленный внешними телами, образующими систему из N астрономических тел (дается формулой (19)).

Таким образом, полученное нами решение значительно расширяет предыдущие аналогичные выводы, найденные в литературе. Мы оценили решение для релятивистской фазы (20), которое в дополнение к обычному члену Шапиро учитывает вклад квадрупольного члена в распределения массы Земли, спина Земли и приливных гравитационных полей, обусловленных гравитационными потенциалами внешних тел Солнечной системы. На уровне заявленной точности рекомендуемое решение для фазы электромагнитной волны в релятивистской теории дается формулой (21). Эта формулировка позволяет достичь самосогласованного

аналитического результата, который может быть применен для редукции и анализа данных космического гравиметрического эксперимента. Основываясь на этом решении, мы представили новую формулировку для релятивистских фазовых преобразований, которые описывают передачу когерентного сигнала между двумя космическими аппаратами. Эти результаты позволят достичь желаемого разрешения 1 нм в измерении межспутникового расстояния и 1 нм/с в измерении скорости между спутниками.

Подход на основе эйконала и соответствующее решение для фазы плоской электромагнитной волны, развитые в данной работе, обеспечивают эффективный способ учета общих релятивистских эффектов распространения света в Солнечной системе.

Во введении было отмечено, что первые данные обработки лазерных измерений GRACE FO показали точность $100 \text{ пм/Гц}^{1/2}$ на частоте $\sim 1 \text{ МГц}$, что на три порядка превышает ожидаемую точность лазерного интерферометра спутников GRACE FO. Тем не менее в «конечном продукте» миссии GRACE FO — моделях гравитационного поля Земли — скачка в пространственном и временном разрешениях таких моделей ожидать не приходится. Проведенные исследования [15] показали, что точность гравитационных моделей возрастет только на 30–40%.

Дело в том, что космические гравитационные группировки, состоящие из пары спутников, находящихся на одинаковых орбитах (GRACE, GRACE FO, GRAIL), имеют один существенный недостаток, связанный с ограничениями пространственно-временного разрешения моделей гравитационного поля Земли. Эти величины связаны обратно пропорциональным отношением: чем лучше пространственное разрешение, тем хуже временное, и наоборот. Это так называемое соотношение Гейзенберга для пространственно-временного разрешения спутников [16, 17].

Чтобы одновременно улучшить как пространственное, так и временное разрешение необходимо рассматривать более сложные конфигурации спутников, поскольку в случае простой группировки, состоящей из пары спутников на одинаковых орбитах, действует ограничение Гейзенберга. Решением этой проблемы может быть мультипарная конфигурация. Например, использование двух пар спутников, находящихся на разных орбитах, может существенно улучшить пространственное и временное разрешения. Основная задача таких конфигураций — обеспечить более равномерное покрытие на различных широтах и большую изотропность измерений, что в конечном счете обеспечит более высокую точность гравитационных моделей Земли.

С этой точки зрения основная цель использования лазерной интерферометрии в миссии GRACE-FO — демонстрация технологий, которые будут использованы в следующих миссиях.

Таким образом, принцип учета релятивистских эффектов, развитый в настоящей работе, полностью удовлетворяет точности прецизионных измерений в группировке, состоящей из двух космических аппаратов. В гравитационных мультипарных миссиях следующего поколения будет необходимо учитывать релятивистские эффекты следующего порядка малости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-52-53018). Благодарим также Программу развития МГУ в номинации «Выдающиеся научные школы МГУ».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reigber Ch., Luehr H., Schwintzer P. // J. Adv. Space Res. 2002. **30**. P. 129.
2. Tapley B. D., Bettadpur S., Watkins M. M., Reigber Ch. // Geophys. Res. Lett. 2004. **31**, N 9. P. 4.
3. Albertella A., Migliaccio F., Sansò F. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2002. **83**. P. 1.
4. Zuber M. T., Smith D. E., Watkins M. M. et al. // Science. 2013. **339**. P. 668.
5. Watkins M., Flechtner F., Webb F. et al. // in: GRACE Science Team Meeting Proceedings. Texas. Austin. September 21–23, 2015.
6. Милоков В. К., Е С.-Ц. // Астрон. журн. 2018. **95**, № 12. С. 1.
7. Kopeikin S. M., Efroimsky M., Kaplan G. // Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System. Wiley-VCH. 2011.
8. Turyshev S. G., Toth V. T., Sazhin M. V. // Physical Review D. 2013. **87**. 024020.
9. Turyshev S. G., Sazhin M. V., Toth V. T. // Physical Review D. 2014. **89**. 105029.
10. Hsien-Chi Yeh, Qi-Zhong Yan, Yu-Rong Liang et al. // Rev. Sci. Instrum. 2011. **82**. 044501.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. // Теория поля. М.: Наука, 1980.
12. Сажин М. В. // ЖЭТФ. 1998. **113**. С. 398.
13. Klioner S. A. // Astron. J. 2003. **125**. С. 1580.
14. Zschocke S., Klioner S. A. // arXiv:0907.4318 [astro-ph.EP]. 2009.
15. Flechtner F., Neumayer K-H., Dahle Ch. et al. // In: GRACE Science Team Meeting Proceedings. Texas. Austin. September 21–23, 2015.
16. Reubelt T., Sneeuw N., Sharifi M. // In: Proc. Gravity, Geoid and Earth Observation. June 23-27, 2008, Chania, Crete, Greece. 2009.
17. van Dam T. P., Visser N., Sneeuw M. et al. // In: the Earth System by Means of Satellites. Final Report. ESA Contract No. 20403, November 2008.

Relativistic Reductions in Precision Measurements of the Earth's Gravitational Field Using Low-Orbit Spacecraft

V. K. Milyukov^{1a}, M. V. Sazhin¹, V. N. Sementsov^{1b}, H.-Chi. Yeh², C. Xue²

¹Sternberg State Institute of Astronomy, Moscow State University. Moscow 119191, Russia.

²Sun Yat-sen University (SYSU). Guangzhou, China.

E-mail: ^avilyukov@yandex.ru, ^bvalera@sai.msu.ru.

The advancement of space technology opens new perspectives in developing high-resolution models of the Earth's gravitational field. The use of a precision laser interferometric system requires taking relativistic effects in the inter-satellite ranging within the satellite constellation into account. The main quantity measured by the laser system is the phase incursion of the laser beam when passing a double one-way range between the satellites. A solution for the relativistic phase is obtained that considers not only the usual Shapiro term but also the contribution of the quadrupole term to distributions of the Earth's mass, the Earth's spin, and tidal gravitational fields caused by the gravitational potentials of the outer bodies of the Solar System. Relativistic reduction terms are estimated at the accuracy level of ~ 1 nm, which fully satisfies the accuracy of precision measurements in the two-spacecraft formation. It will be necessary to take the relativistic effects of the next order of smallness into account in the next-generation gravitational twin missions.

Keywords: space geodesy, Earth's gravitational field, relativistic effects.

PACS: 04.80.-y, 06.30.Gv.

Received 19 November 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 2. Pp. 197–204.

Сведения об авторах

1. Милоков Вадим Константинович — доктор физ.-мат. наук, зав. лабораторией; тел.: (495) 939-16-34, e-mail: milyukov@sai.msu.ru.
2. Сажин Михаил Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-50-06, e-mail: moimaitre@mail.ru.
3. Семенов Валериан Никитич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-19-70, e-mail: valera@sai.msu.ru.
4. Сянь-Ци Е, Hsien-Chi Yeh — профессор, заместитель директора Исследовательского центра гравитационной физики «TIANQIN», Университет им. Сунь Ятсена, Гуанчжоу и Чжухай, КНР; тел.: +86-1536-395-10-65 e-mail: yexianji@sysu.edu.
5. Чао Сье, Chao Xue — PhD, науч. сотрудник Исследовательского центра гравитационной физики «TIANQIN», Университет им. Сунь Ятсена, Гуанчжоу и Чжухай, КНР; тел.: +86-1860-756-77-82 e-mail: xuech7@mail.sysu.edu.cn.