

СТАТЬИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Математическое моделирование волноведущих систем с импедансными стенками

А. Н. Боголюбов, А. И. Ерохин, М. И. Светкин^a

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 12.12.2018, после доработки 12.18.2018, принята к публикации 20.12.2018.

Рассмотрен метод построения собственных мод бесконечного волновода постоянного прямоугольного сечения с малыми потерями в стенках, описываемыми граничными условиями Шукина—Леонтовича. Построены дисперсионные характеристики рассматриваемого волновода.

Ключевые слова: волноведущие системы, условия Шукина—Леонтовича, неполный метод Галеркина. УДК: 51.73, 519.632.4, 537.876.45. PACS: 02.70.Dh.

ВВЕДЕНИЕ

Задача расчета сложных волноведущих систем с импедансными стенками [1], описываемыми граничными условиями Шукина—Леонтовича, является естественным обобщением задачи для случая идеально проводящей границы, когда импеданс стенок равен нулю. При нулевом импедансе в поперечном сечении волновода с помощью собственных функций сечения для оператора Лапласа строится полный ортонормированный базис, по которому раскладываются поперечные компоненты электромагнитного поля [2, 3]. При переходе к импедансным стенкам возникает проблема наличия гибридных мод, в связи с чем электромагнитное поле уже невозможно разделить на поля электрического и магнитного типа, а также классический базис уже не удовлетворяет новым граничным условиям. Таким образом, для задачи с потерями приходится использовать различные приближенные методы или переходить к обобщенной постановке задачи, в которой граничные условия также выполняются в обобщенном смысле [4].

В [5] предложен способ точного учета потерь в стенках, который заключается в построении специального базиса, позволяющего удовлетворить граничным условиям точно. Новый базис является модернизацией классического базиса путем добавления к нему дополнительных элементов, обеспечивающих выполнение граничных условий, при этом в разложении поля коэффициенты при них являются решениями алгебраических уравнений. Коэффициенты при стандартных базисных функциях являются решением системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с жесткой матрицей. Для ее расчета необходимо применять специальные методы, например метод направленной ортогонализации [6]. Это позволяет повысить устойчивость алгоритма, но не решает проблему полностью.

В данной работе рассматривается построение системы базисных функций при малом импедансе, являющихся обобщением классического базиса для регулярного волновода. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла точно, с достаточной высокой точностью удовлетворяют граничным условиям и при этом позволяют избежать появления жестких матричных задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный волновод постоянного прямоугольного сечения $S = \{x \in (-a, a), y \in (-b, b)\}$, z — ось волновода. Электромагнитное поле внутри волновода описывается системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}. \quad (2)$$

Система (1), (2) дополняется граничными условиями Шукина—Леонтовича [4] на боковых стенках:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = -W[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]], \quad (3)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе ∂S , W — поверхностный импеданс. Для прямоугольного волновода эти условия примут вид:

$$E_x = -WH_z, \quad E_z = WH_x, \quad y = b, \quad (4)$$

$$E_x = WH_z, \quad E_z = -WH_x, \quad y = -b, \quad (5)$$

$$E_y = WH_z, \quad E_z = -WH_y, \quad x = a, \quad (6)$$

$$E_y = -WH_z, \quad E_z = WH_y, \quad x = -a. \quad (7)$$

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Задачи (1)–(3) для волновода прямоугольного сечения обладают симметрией относительно осей x и y . Каждая проекция поля может быть как четной, так и нечетной по x и по y , что позволяет выделить четыре типа решений, а именно:

$$\begin{cases} E_x = C^{(ex)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_y = C^{(ey)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_z = C^{(ez)} \sin(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_x = C^{(hx)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_y = C^{(hy)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_z = C^{(hz)} \cos(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z); \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} E_x = C^{(ex)} \cos(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_y = C^{(ey)} \sin(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_z = C^{(ez)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_x = C^{(hx)} \sin(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_y = C^{(hy)} \cos(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_z = C^{(hz)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z); \end{cases} \quad (8b)$$

^a E-mail: mihail-svetkin@mail.ru

$$\begin{cases} E_x = C^{(ex)} \sin(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_y = C^{(ey)} \cos(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_z = C^{(ez)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_x = C^{(hx)} \cos(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_y = C^{(hy)} \sin(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_z = C^{(hz)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z); \end{cases} \quad (8b)$$

$$\begin{cases} E_x = C^{(ex)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_y = C^{(ey)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_z = C^{(ez)} \cos(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_x = C^{(hx)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_y = C^{(hy)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_z = C^{(hz)} \sin(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \end{cases} \quad (8r)$$

где p, q, γ — в отличие от случая без потерь уже комплексные числа.

Не ограничивая общности, рассмотрим решение вида (8a). Решения с другими типами четности строятся аналогично, и все дальнейшие рассуждения для них повторяются без изменений.

Множество решений (8) содержит базисные функции электрического и магнитного типов идеального волновода, что будет удобно при исследовании предельного перехода $W \rightarrow 0$. Также за счет симметрии относительно поворота вокруг оси \mathbf{z} на π граничные условия (5) и (7) выполняются автоматически при выполнении условий (4) и (6).

Не ограничивая общности, будем искать волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z , что приводит к условию

$$\operatorname{Re} \gamma \geq 0, \quad \operatorname{Im} \gamma \geq 0.$$

Волны, распространяющиеся в отрицательном направлении, будут симметричны первым волнам относительно поворота на π вокруг оси x или y .

Подставляя (8) в уравнения для z -компоненты ротора (1), (2), можно выразить $C^{(ez)}$ и $C^{(hz)}$ через коэффициенты поперечных полей:

$$C^{(ez)} = -\frac{ip}{k} C^{(hy)} + \frac{iq}{k} C^{(hx)}, \quad (9)$$

$$C^{(hz)} = -\frac{ip}{k} C^{(ey)} + \frac{iq}{k} C^{(ex)}. \quad (10)$$

После подстановки в (8), (9), (10) в выражения для поперечных компонент ротора из (1), (2) получим

$$MC = k\gamma C, \quad (11)$$

$$M(p, q, k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq & k^2 - p^2 \\ 0 & 0 & q^2 - k^2 & -pq \\ -pq & p^2 - k^2 & 0 & 0 \\ k^2 - q^2 & pq & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C^{(ex)} \\ C^{(ey)} \\ C^{(hx)} \\ C^{(hy)} \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы и собственные значения задачи (11) могут быть выписаны как функции параметров p, q и k :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{pq}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ \frac{q^2-k^2}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{k^2-p^2}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ \frac{-pq}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} \frac{pq}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ \frac{k^2-q^2}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} \frac{p^2-k^2}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ \frac{-pq}{k\sqrt{k^2-p^2-q^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы C_1 и C_2 соответствуют собственному значению $\gamma = \sqrt{k^2-p^2-q^2}$, а C_3 и C_4 — $\gamma = -\sqrt{k^2-p^2-q^2}$.

Поскольку мы ищем решения для волн, распространяющихся вдоль положительного направления оси z , то следует оставить пару решений C_1 и C_2 с соответствующим γ . Всякая линейная комбинация собственных векторов (12) также будет собственным вектором с тем же собственным значением γ :

$$C = S_1 C_1 + S_2 C_2 = VS,$$

где $S = (S_1, S_2)^T$, $V = (C_1, C_2)$ — матрица 4×2 , полученная из двух столбцов C_1 и C_2 .

Таким образом, при заданных параметрах p, q и k множество решений, удовлетворяющих уравнениям Максвелла (8), примет вид

$$C(p, q, k) = V(p, q, k)S, \quad (13)$$

где S — произвольный столбец высоты 2.

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Перейдем к рассмотрению граничных условий. Как было указано выше, за счет симметрии остается только четыре уравнения (4), (6) для граничных условий из восьми.

Подставим (8), (9), (10) в (4), (6):

$$BC = 0, \quad (14)$$

$$B(p, q, k) = \begin{pmatrix} B_1(p, q, k) & \Theta \\ \Theta & B_2(p, q, k) \end{pmatrix},$$

где Θ — нулевая матрица 2×2 ,

$$B_1(p, q, k) = \begin{pmatrix} \sin qb + \frac{iqW}{k} \cos qb & -\frac{ipW}{k} \cos qb \\ -\frac{iqW}{k} \cos pa & \sin pa + \frac{ipW}{k} \cos pa \end{pmatrix},$$

$$B_2(p, q, k) = \begin{pmatrix} \frac{iq}{k} \sin qb - W \cos qb & -\frac{iq}{k} \sin pa \\ -\frac{iq}{k} \sin pa & \frac{ip}{k} \sin pa - W \cos pa \end{pmatrix}.$$

Подставляя (13) в (14), получим переопределенную систему уравнений относительно столбца S :

$$BC = BVS = QS = 0, \quad (15)$$

где $Q = BV$ — матрица 4×2 .

Таким образом, исходная задача сводится к отысканию таких p, q и нетривиального столбца S , для которых выполнено (15).

В общем случае такие p и q не существуют. Действительно, разобьем матрицу Q на два квадратных блока 2×2 :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Потребуем равенства нулю определителей этих блоков:

$$f_1(p, q) = \det Q_1(p, q) = 0, \quad (16)$$

$$f_2(p, q) = \det Q_2(p, q) = 0. \quad (17)$$

Эта система двух уравнений относительно p, q обеспечит линейную зависимость пары строк в каждом из блоков. Следовательно, из системы (15) можно выкинуть зависимые строки из каждого блока и в результате останется квадратная матрица

$$Q'(p, q)S = 0. \quad (18)$$

Для существования нетривиального решения (18) необходимо, чтобы и ее определитель также обратился в нуль, что дает третье уравнение относительно p и q :

$$f_3(p, q) = \det Q'(p, q) = 0. \quad (19)$$

В общем случае система (16), (17), (19) несовместна.

Будем искать решение, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла (1), (2) точно и граничным условиям (3) приближенно. Рассмотрим два способа их построения: путем минимизации невязки и с помощью теории возмущений.

4. МИНИМИЗАЦИЯ НЕВЯЗКИ

Обозначим $\delta(p, q)$ невязку системы (14):

$$Q(p, q)S = \delta(p, q). \quad (20)$$

Вместо решения исходной задачи (15) будем искать такие p, q и столбец S , $\|S\| = 1$, что норма невязки $\|\delta\|$ достигает своего минимума. $\|\cdot\|$ понимается как стандартная норма в пространствах столбцов соответствующей высоты. Рассмотрим $\|\delta\|^2$:

$$\|\delta(p, q)\|^2 = S^* Q^*(p, q) Q(p, q) S,$$

$$U(p, q) = Q^*(p, q) Q(p, q),$$

U — эрмитова матрица ... Пусть $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ ее собственные значения, а S_1 и S_2 — соответствующие нормированные собственные векторы $\|S_1\| = \|S_2\| = 1$. Тогда

$$\min_{\|S\|=1} \|\delta(p, q)\|^2 = \lambda_1(p, q). \quad (21)$$

Таким образом, задача поиска минимума нормы невязки $\|\delta\|$ свелась к поиску минимума собственных значений матрицы $U(p, q)$. По найденным p, q и S , находятся $\gamma = \sqrt{k^2 - p^2 - q^2}$ и C по формуле (13).

Поскольку W в граничном условии Щукина—Леонтовича предполагается малым, то p и q ищутся в окрестности p, q для идеального волновода.

5. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

При малых значениях импеданса $|W| \ll 1$ значения p и q находятся в окрестности невозмущенных p, q идеального волновода. Поэтому будем искать p, q в виде разложения в ряд по малому параметру W :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{W}{a} p_1 + O(W^2), \\ q &= q_0 + \frac{W}{b} q_1 + O(W^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где $p_0 = \frac{\pi n}{2a}$, $q_0 = \frac{\pi m}{2b}$ соответствуют модам идеального волновода.

Подставим разложение (22) в (14) и также разложим матрицу граничных условий B в ряд по W :

$$B = B^{(0)}(p_0, q_0) + WB^{(1)}(p_0, q_0, p_1, q_1) + O(W^2).$$

Матрица $B^{(0)}(p_0, q_0)$ описывает идеальные граничные условия и при подстановке в нее p, q идеального волновода обращается в нуль. Таким образом,

$$B = WB^{(1)}(p_0, q_0, p_1, q_1) + O(W^2),$$

где

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} B_1^{(1)} & \Theta \\ \Theta & B_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$B_1^{(1)} = \begin{pmatrix} q_1 + \frac{iq_0}{k} & -\frac{ip_0}{k} \\ -\frac{iq_0}{k} & p_1 + \frac{ip_0}{k} \end{pmatrix},$$

$$B_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{iq_0 q_1}{k} - 1 & -\frac{ip_0 q_1}{k} \\ -\frac{iq_0 p_1}{k} & \frac{ip_0 p_1}{k} - 1 \end{pmatrix}.$$

Условие на границе (14) в первом порядке разложения по W примет вид

$$B^{(1)}(p_0, q_0, p_1, q_1) = 0.$$

Поскольку матрица $B^{(1)}$ блочно-диагональная, то для существования нетривиального решения, содержащего отличные от нуля как электрические, так и магнитные поля, необходимо равенство нулю определителей обоих блоков:

$$\begin{cases} \det(B_1^{(1)}(p_1, q_1)) = 0, \\ \det(B_2^{(1)}(p_1, q_1)) = 0. \end{cases}$$

В результате получим систему уравнений относительно поправок первого порядка p_1 и q_1 :

$$\begin{cases} p_1 q_1 + \frac{ip_0}{k} q_1 + \frac{iq_0}{k} p_1 = 0, \\ \frac{ip_0}{k} p_1 + \frac{iq_0}{k} q_1 = 1. \end{cases} \quad (23)$$

Система (23) сводится к квадратному уравнению и следовательно, имеет два решения для поправок p_1 и q_1 .

6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В ходе математического моделирования исследовались свойства базисных функций, полученных двумя описанными методами.

На высоких частотах, т. е. при больших значениях $k > k_{кр}(n, m) = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}$, пары p, q , полученные численным методом, т. е. решением (21), и методом теории возмущений из системы (23), согласуются друг с другом с высокой точностью. При малых k наблюдается расхождение в найденных значениях, при этом поправки, полученные по теории возмущений, дают значения невязки (20) в разы большие, чем минимумы, найденные численно.

Таким образом, для анализа бегущих слаботухающих мод следует использовать метод возмущений, а для сильнозатухающих — метод минимизации.

На рис. 1 представлена комплексная плоскость, проходящая через два локальных минимума. По оси z отложено значение $\lambda_1(p, q)$ в логарифмическом масштабе. По величине пиков можно оценить порядок невязки. В данном случае порядок минимума $\lambda_1 \approx \exp(-27) \approx 2 \cdot 10^{-12}$.

На рис. 2 изображены $\lambda_1(p, q)$ и $\lambda_2(p, q)$ на линии, содержащей два минимума.

На этом рисунке видно, что два минимума соответствуют двум различным ветвям собственных значений.

Построены дисперсионные характеристики бесконечного прямоугольного волновода. На рис. 3, 4 представлены действительная и мнимая части мод, соответствующих $n = 1, m = 1$.

Проведено сравнение рассчитанных дисперсионных характеристик с характеристиками, полученными методом [1]. В случае малого импеданса наблюдается согласование результатов (рис. 5, 6).

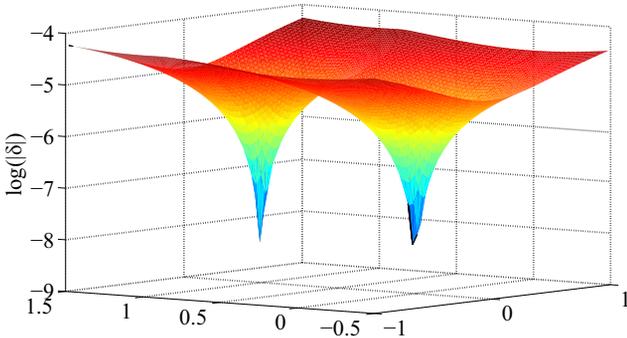


Рис. 1. Минимумы невязки $\delta(p, q)$. $W = 0.001(1 - i)$, $n = 1, m = 1$

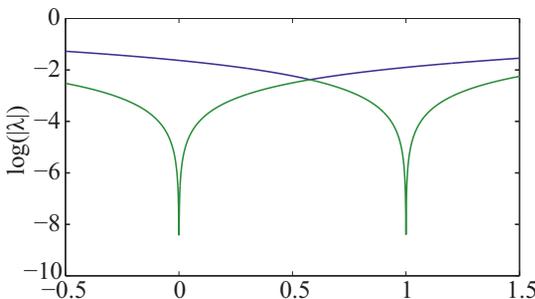


Рис. 2. $\lambda_1(p, q)$ и $\lambda_2(p, q)$ вдоль линии, соединяющей минимумы

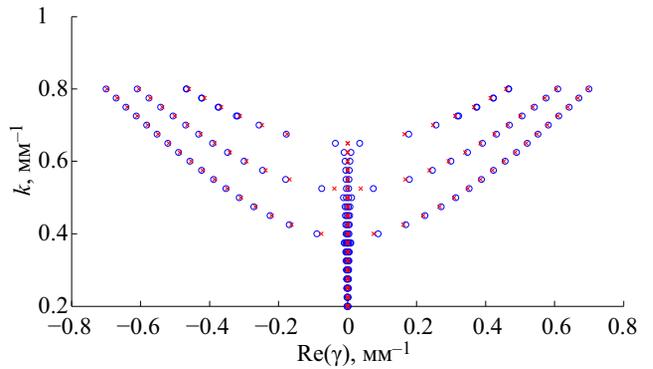


Рис. 3. $Re \gamma$, синий — идеальный волновод, красный — волновод с потерями $W = 0.01(1 - i)$

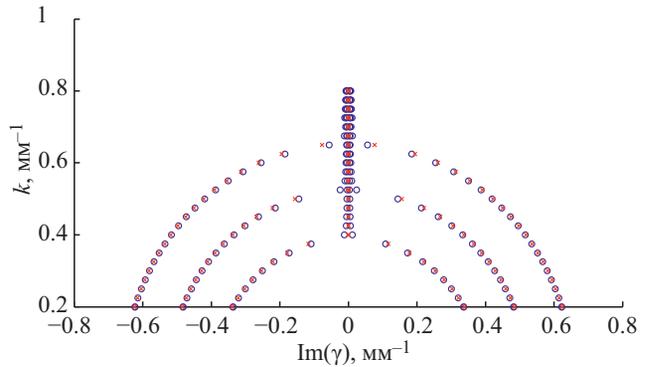


Рис. 4. $Im \gamma$, синий — идеальный волновод, красный — волновод с потерями $W = 0.01(1 - i)$

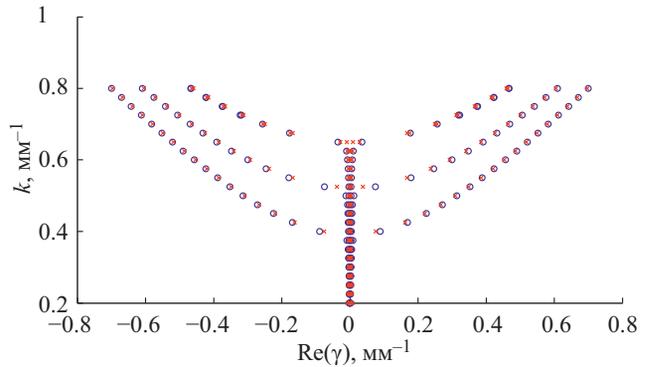


Рис. 5. $Re \gamma$, дисперсионные характеристики, полученные методом [1] (синий) и путем минимизации невязки (красный) $W = 0.01(1 - i)$

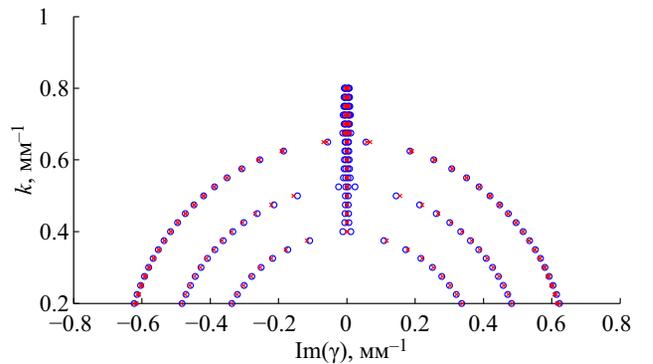


Рис. 6. $Im \gamma$, дисперсионные характеристики, полученные методом [1] (синий) и путем минимизации невязки (красный) $W = 0.01(1 - i)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены два способа построения решений, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла точно и приближенно условиям Шукина—Леонтовича при малом импедансе: путем минимизации невязки и с помощью теории возмущений. На высоких частотах оба метода дают высокую точность, при этом на низких частотах предпочтительно применять численный алгоритм. Оба метода для соответствующего диапазона частот дают хорошее совпадение с методом [1]. Поскольку предложенным способом моды волновода с потерями выделяются независимо друг от друга, их использование при описании полей на участках постоянного сечения для волноводов сложной формы позволит значительно уменьшить жесткость итоговых матричных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-31-00377 мол_а и 19-01-00593).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильинский А. С. и др. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. ЖТФ. 1948. **18**. С. 959.
3. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Избранные математические задачи теории дифракции. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
4. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
5. Ерохин А. И., Могилевский И. Е., Родякин В. Е., Пикуннов В. М. // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2016. № 6. 1661101. (Erokhin A. I., Mogilevsky I. E., Rodyakin V. E., Pikunov V. M. // *Memoirs of the Faculty of Physics*. 2016. N 6. 1661106.)
6. Быков А. А., Ильинский А. С. // ЖВМиМФ. 1979. **19**, № 3. С. 631.
7. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

Mathematical Modeling of Impedance Waveguide Systems

A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, M. I. Svetkin^a

*Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: ^amihail-svetkin@mail.ru.*

A method for constructing eigenmodes of an infinite waveguide of a constant rectangular cross section with low losses in the walls, which are described by the Shchukin–Leontovich boundary conditions, is discussed. The dispersion characteristics of these waveguides are constructed.

Keywords: waveguide systems, Shchukin–Leontovich conditions, incomplete Galerkin method.
PACS: 02.70.Dh.

Received 12 December 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 3. Pp. 227–232.

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: forlector@mail.ru.
3. Светкин Михаил Игоревич — аспирант; e-mail: mihail-svetkin@mail.ru.