

Анализ CP -нарушения и дополнительность смешивания кварков и нейтрино в экспоненциальной и кобимаксимальной матрицах смешивания

К. В. Жуковский,^a А. А. Давыдова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 08.12.2018, после доработки 10.01.2019, принята к публикации 11.01.2019.

С учетом последних экспериментальных данных анализируется смешивание нейтрино в стандартной, кобимаксимальной и экспоненциальной параметризациях матрицы смешивания. Находится логарифм матрицы смешивания и точные значения каждого элемента экспоненциальной и кобимаксимальной параметризации для нейтрино; последняя позволяет факторизовать вращение в действительном пространстве и вклад CP -нарушения в виде вращения в чисто мнимом пространстве. В экспоненциальной форме кобимаксимальной матрицы смешивания исследуется угол между осями вращения кварков и нейтрино и проверяется дополнительность их смешивания. С помощью инварианта Ярлског исследуется зависимость степени CP -нарушения для нейтрино от параметров матрицы смешивания в различных параметризациях. С использованием экспоненциальной параметризации матрицы смешивания исследуется представление последней в качестве элемента группы $SU(3)$ с параметрами φ и θ , и их зависимости от степени CP -нарушения.

Ключевые слова: нейтрино, смешивание, PMNS-матрица, CP -нарушение, экспоненциальная параметризация, группа.

УДК: 539. PACS: 14.60.Pq, 12.15.Ff, 20.20.-a.

ВВЕДЕНИЕ

В рамках Стандартной модели [1–3] изначально предполагалось, что нейтрино является безмассовой частицей с левой киральностью. После предсказания нейтринных осцилляций [4, 5], и их открытия (например, [6, 7] и др.) стало ясно, что нейтрино обладает массой, которая на много порядков меньше масс других элементарных частиц. Для описания нейтрино с малой массой можно добавить в лагранжиан Стандартной модели правые нейтрино, которые являются скалярами относительно группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ и имеют массу порядка 10^{16} ГэВ, что не позволяет их наблюдать в современных экспериментах. Такой механизм генерации малой массы наблюдаемых нейтрино называется качельным механизмом [8]. Получающееся массовое слагаемое для нейтрино обуславливает нарушение CP -инвариантности действия в Стандартной модели и нарушение закона сохранения лептонных чисел для каждого поколения. Недиagonalность массовой матрицы

приводит к смешиванию нейтрино, т.е. существует такое унитарное преобразование нейтринных полей, после которого массовая матрица становится диагональной. Вклад тяжелых нейтрино в смешивание несуществен т.к. соответствующие матричные элементы крайне малы. Преобразованные поля будут собственными массовыми состояниями нейтрино с определенной массой ν_1, ν_2, ν_3 . Пренебрегая малым вкладом тяжелых нейтрино, получаем наблюдаемые флейворные состояния легких нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ в виде линейной комбинации массовых состояний ν_1, ν_2, ν_3 ; переход от $\nu_{1,2,3}$ к $\nu_{e,\mu,\tau}$ описывается унитарной матрицей смешивания \mathbf{U} Понтекорво–Маки–Накагавы–Саката (PMNS) [9]:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,2,3} \mathbf{U}_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad \mathbf{U}_{\alpha i} \equiv \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle, \quad (1)$$

$$\alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Наиболее распространенной является стандартная форма матрицы для трехфлейворного смешивания:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{st}, \quad (2)$$

где $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, θ_{ij} — углы смешивания, δ_{CP} — CP -нарушающая фаза. На основе экспериментальных данных с учетом CP -нарушения [10] получаем для элементов матрицы смешивания следующие численные значения:

$$\mathbf{U}_{\text{best fit}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.821 & 0.551 & -0.123 + 0.086i \\ -0.283 + 0.054i & 0.590 + 0.036i & 0.753 \\ 0.491 + 0.046i & -0.588 + 0.031i & 0.641 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

^a E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

Абсолютные значения ее элементов находятся в следующих пределах:

$$|U|_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0.796 \leftrightarrow 0.843 & 0.518 \leftrightarrow 0.586 & 0.143 \leftrightarrow 0.156 \\ 0.214 \leftrightarrow 0.533 & 0.425 \leftrightarrow 0.703 & 0.639 \leftrightarrow 0.784 \\ 0.246 \leftrightarrow 0.505 & 0.451 \leftrightarrow 0.721 & 0.603 \leftrightarrow 0.755 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Кроме матрицы (2), можно построить еще 11 аналогичных матриц смешивания, которые различаются между собой только положением комплексной фазы и порядком сомножителей (см. [11]). Были предложены также симметричные формы матрицы смешивания с заданными численными значениями ее элементов, например бимаксимальная (БМ) матрица и трибимаксимальная (ТБМ) матрица [12]; они не описывают CP -нарушение в лептонном секторе. В настоящее время считается, что $\theta_{13} \neq 0$ и $\delta_{CP} \neq 0$; в этой связи интерес вызывает кобимаксимальная (СВМ) форма матрицы смешивания [13–16], которая получается подстановкой $\theta_{23} = \pi/4$ и $\delta_{CP} = \pm\pi/2$ в стандартной параметризации (2) и имеет следующий вид:

$$U_{СВМ} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & \mp is_{13} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(s_{12} \pm is_{13}c_{12}) & \frac{\sqrt{2}}{2}(c_{12} \mp is_{13}s_{12}) & \frac{\sqrt{2}}{2}c_{13} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(s_{12} \mp is_{13}c_{12}) & -\frac{\sqrt{2}}{2}(c_{12} \pm is_{13}s_{12}) & \frac{\sqrt{2}}{2}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Смешивание для кварков описывается аналогично смешиванию в лептонном секторе с помощью матрицы \mathbf{V} Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (ККМ). Смешивание для кварков выражено существенно слабее, чем для нейтрино, и матрица \mathbf{V} близка к единичной; малые параметры отклонения от единичной матрицы, λ, A, ρ, η , были введены Л. Вольфенштейном [17]. В работе [18] обсуждаются аналогичные поправки для нейтрино, выраженные через параметры Вольфенштейна с использованием эмпирических соотношений, и формулируется гипотеза кварк–лептонной дополнительной (QLC) и лептонной дополнительной (SC) — которые связывают углы смешивания для кварков и нейтрино. Кроме того, была предложена экспоненциальная параметризация матрицы смешивания [19, 20]. Ниже мы исследуем дополнительную смешивания нейтрино и кварков и CP -нарушение нейтрино в различных параметризациях.

1. ИНВАРИАНТ ЯРЛСКОГ

Унитарность матрицы смешивания может быть выражена в виде следующих соотношений для ее матричных элементов:

$$\sum_{i=1,2,3} U_{i\alpha} U_{j\alpha}^* = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{i\beta}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

где $U_{\alpha i} \equiv \langle \nu_{\alpha} | \nu_i \rangle$, $\alpha = e, \mu, \tau$, $i = 1, 2, 3$. Геометрически это представимо в виде треугольников на комплексной плоскости в трехмерном пространстве (см. рис. 1), площадь которых равна половине модуля векторного произведения векторов $\{\text{Re } a, \text{Im } a, 0\}$ и $\{\text{Re } b, \text{Im } b, 0\}$:

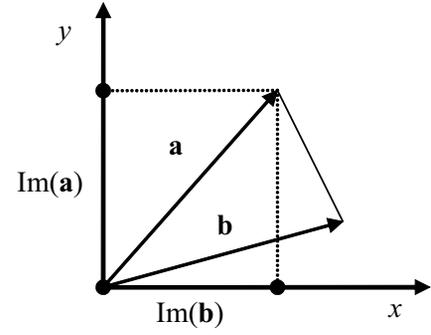


Рис. 1. Геометрическое представление треугольника Ярлског на комплексной плоскости

$$S = \frac{1}{2} |(\text{Re } a)(\text{Im } b) - (\text{Re } b)(\text{Im } a)| = \frac{1}{2} |\text{Im}(ab^*)| = \frac{1}{2} |\text{Im}(a^*b)|. \quad (7)$$

Для $a = U_{e1}U_{e3}^*$ и $b = -U_{\mu1}U_{\mu3}^*$ имеем $S = \frac{1}{2} |\text{Im}(U_{e1}U_{e3}^*U_{\mu1}^*U_{\mu3})|$. В силу унитарности матрицы U получаем $U_{e3}^*U_{\mu3} = -U_{e1}^*U_{\mu1} - U_{e2}^*U_{\mu2}$ и $S = \frac{1}{2} |\text{Im}(U_{e1}U_{\mu2}U_{e2}^*U_{\mu1}^*)| = \frac{1}{2} J$, где J — инвариант Ярлског [21]. Используя вид (2) матрицы U , получаем в явном виде выражение для инварианта Ярлског через углы стандартной параметризации

$$J = \text{Im}(U_{e1}U_{\mu2}U_{e2}^*U_{\mu1}^*) = \cos \theta_{12} \sin \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} \sin \theta_{13} \cos \theta_{23} \sin \theta_{23} \sin \delta_{CP}. \quad (8)$$

Инвариант Ярлског J не равен нулю, только если присутствует CP -нарушение, в частности $J \neq 0$, если $\sin \delta_{CP} \neq 0$ в (8). Величина инварианта Ярлског J не зависит от конкретного вида параметризации матрицы смешивания; J определяет степень CP -нарушения. Пример зависимости абсолютной величины инварианта Ярлског $|J|(\theta_{12}, \theta_{13})$ от углов в стандартной параметризации с учетом данных [10] приведен на рис. 2.

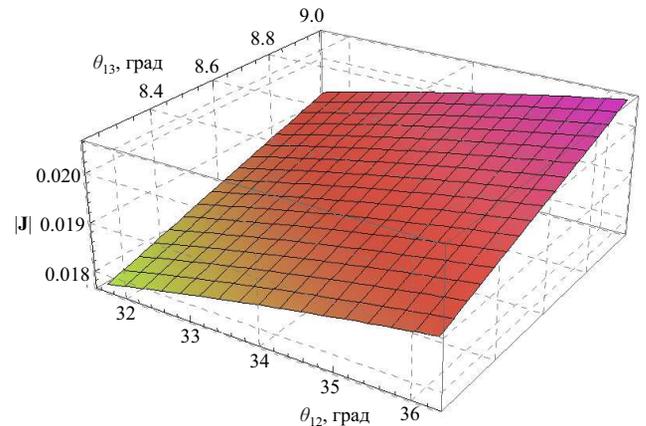


Рис. 2. Зависимость абсолютной величины инварианта Ярлског J для нейтрино от θ_{13} и θ_{12} . Значения остальных параметров фиксированы по экспериментальным данным [10]

Диапазон значений углов θ_{13} и θ_{12} на рис. 2 соответствует экспериментально установленному на 2018 г. разбросу значений элементов матрицы смешивания с точностью 3σ (см. [10] и (4)). С учетом этого величина инварианта Ярлског такова: $J_\nu = -0.019_{-0.016}^{+0.046}$. В кварковом секторе масштаб CP -нарушения примерно на 3 порядка меньше, чем в нейтринном, и с учетом данных PDG на 2018 г. значение инварианта Ярлског для кварков составляет $J_q = (3.18 \pm 0.15) \times 10^{-5}$ [28].

Рассмотрим СВМ-параметризацию матрицы смешивания с нижними знаками в (5); это соответствует более вероятному CP -нарушению с $\delta_{CP} = -\pi/2$. Тогда для заданного значения инварианта Ярлског J_{fix} получим в СВМ-параметризации (5) аналитическое соотношение между углами θ_{13} и θ_{12} в следующем виде:

$$\theta_{12} = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{-4J_{\text{fix}}}{\cos^2 \theta_{13} \sin \theta_{13}} \right). \quad (9)$$

Тогда в СВМ-параметризации можно выбрать значения $\theta_{12} = 33.51^\circ$, $\theta_{13} = 8.695^\circ$, $J_{\text{fix}} = -0.034$, удовлетворяющие (9). При этом абсолютные величины элементов матрицы смешивания находятся в пределах допустимых значений 3σ (см. (4)) и, как мы покажем в разделе 4, точно выполняется дополнительность смешивания нейтрино и кварков. В итоге получаем соответствующую найденным углам СВМ-матрицу смешивания в явном виде:

$$\mathbf{U}_{\text{СВМ}}^{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0.824 & 0.546 & 0.151i \\ -0.390 + 0.089i & 0.590 + 0.059i & 0.699 \\ 0.390 + 0.089i & -0.590 + 0.059i & 0.699 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ СМЕШИВАНИЯ

Матрицу смешивания как для кварков, так и для нейтрино можно записать в виде матричной экспоненты (см, например, [19, 20, 22–25]):

$$\mathbf{U}_{\text{exp}} = \exp \mathbf{A}. \quad (11)$$

Преимущество экспоненциальной параметризации (11) заключается в том, что в ней можно факторизовать вклады вращения и CP -нарушения в виде новой унитарной параметризации:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_{\text{Rot}} \mathbf{P}_{\text{CP}}, \quad \mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}, \quad \mathbf{P}_{\text{CP}} = e^{\mathbf{A}_{\text{CP}}}, \quad (12)$$

где за вращение отвечает $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}$ и за CP -нарушение отвечает $\mathbf{P}_{\text{CP}} = e^{\mathbf{A}_{\text{CP}}}$; ее показатель \mathbf{A}_{CP} — соответственно CP -нарушающие компоненты матрицы \mathbf{A} . На основании экспериментальных данных показано [10], что углы смешивания для нейтрино на ноябрь 2018 г. таковы:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &\cong 33.82_{-0.76}^{+0.78}, & \theta_{23} &\cong 49.6_{-1.2}^{+1.0}, \\ \theta_{13} &\cong 8.61_{-0.13}^{+0.13}, & \delta_{\text{CP}} &\approx 215_{-29}^{+40}. \end{aligned} \quad (13)$$

Элементы матрицы \mathbf{A} в показателе экспоненты (11) можно получить, вычислив логарифм матрицы смешивания. Вместо ранее использовавшихся

аналитических методов вычисления матричных логарифмов (см., например, [26, 27]) мы применили для простоты программу *Mathematica*. Исходя из значений (13), получаем следующий численный вид экспоненты матрицы смешивания (11):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.0147i & 0.4982 + 0.0323i & -0.3661 + 0.0787i \\ -0.4982 + 0.0323i & 0.0292i & 0.8018 + 0.0184i \\ 0.3661 + 0.0787i & -0.8018 + 0.0184i & -0.0144i \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, на основе значений (13) получаем экспоненциальную параметризацию матрицы смешивания (1) в виде (11), где \mathbf{A} имеет вид (14).

Для СВМ-матрицы $\mathbf{U}_{\text{СВМ}}^{3\sigma}$ (10) (или (2) с $\theta_{23} = \pi/4$, $\delta_{\text{CP}} = -\pi/2$, $\theta_{12} = 33.51^\circ$, $\theta_{13} = 8.695^\circ$) получаем показатель экспоненты в (11) в следующем виде:

$$\mathbf{A}^{\text{СВМ}} = \begin{pmatrix} -0.0235i & 0.5523 + 0.0524i & -0.2303 + 0.1413i \\ -0.5523 + 0.0524i & 0.0467i & 0.7604 + 0.0347i \\ 0.2303 + 0.1413i & -0.7604 + 0.0347i & -0.0232i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

След матрицы \mathbf{A} (как и $\mathbf{A}^{\text{СВМ}}$ и др.) в экспоненциальной форме (11) точно равен нулю: $\text{Tr} \mathbf{A} = 0$, а диагональные элементы \mathbf{A} малы. Представим \mathbf{A} в виде следующей суммы матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{\text{CP}} + \mathbf{A}_{\text{diag Im}}, \quad (16)$$

где матрица

$$\mathbf{A}_{\text{Rot}} = \text{Re} [\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 0.4982 & -0.3661 \\ -0.4982 & 0 & 0.8018 \\ 0.3661 & -0.8018 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

описывает действительное вращение, а матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{CP}} &= i \text{Im} [\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\text{diag Im}}] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0.0323i & 0.0787i \\ 0.0323i & 0 & 0.0184i \\ 0.0787i & 0.0184i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

описывает CP -нарушение. Для соответствующих матриц $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}$, $\mathbf{P}_{\text{CP}} = e^{\mathbf{A}_{\text{CP}}}$ получаем следующие выражения:

$$\mathbf{P}_{\text{Rot}} = \begin{pmatrix} 0.825 & 0.552 & -0.123 \\ -0.283 & 0.592 & 0.755 \\ 0.490 & -0.588 & 0.644 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$\mathbf{P}_{\text{CP}} =$

$$= \begin{pmatrix} 0.996 - 0.014i & -0.001 + 0.032i & 0.001 + 0.079i \\ -0.001 + 0.032i & 1 + 0.028i & -0.001 + 0.018i \\ 0.001 + 0.079i & -0.001 + 0.018i & 0.997 - 0.014i \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Выделяя вращение и CP -нарушение (16)–(18), получаем для $\mathbf{U}_{\text{СВМ}}^{3\sigma}$ (10) в экспоненциальном представлении следующие компоненты:

$$\mathbf{A}_{\text{Rot}}^{\text{СВМ}} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5523 & -0.2303 \\ -0.5523 & 0 & 0.7604 \\ 0.2303 & -0.7604 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

и

$$\mathbf{A}_{\text{CP}}^{\text{CBM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0.0524i & 0.1413i \\ 0.0524i & 0 & 0.0347i \\ 0.1413i & 0.0347i & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Матрицы $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}$ и $\mathbf{P}_{\text{CP}} = e^{\mathbf{A}_{\text{CP}}}$ в случае СВМ-параметризации равны:

$$\mathbf{P}_{\text{Rot}} = \begin{pmatrix} 0.834 & 0.551 & -0.002 \\ -0.389 & 0.592 & 0.706 \\ 0.390 & -0.588 & 0.708 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$\mathbf{P}_{\text{CP}} =$

$$= \begin{pmatrix} 0.989 & -0.002 + 0.052i & -0.001 + 0.141i \\ -0.002 + 0.052i & 0.998 & -0.004 + 0.035i \\ -0.001 + 0.141i & -0.004 + 0.035i & 0.989 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Мнимая диагональ матрицы \mathbf{A} в (16) представлена матрицей

$$\mathbf{A}_{\text{diag Im}} = i \text{diag} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}, \quad (25)$$

в которой элементы \mathbf{A}_{11} и \mathbf{A}_{33} почти точно равны друг другу и составляют половину величины матричного элемента \mathbf{A}_{22} с обратным знаком:

$$\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2. \quad (26)$$

Отметим, что соотношение (26) для матричных элементов мнимой диагонали \mathbf{A} выполняется точнее с экспериментальными данными 2018 г. [10], чем с результатами 2016 г.; отклонение от идеального равенства $\alpha_1 = \alpha_3 = -\alpha_2/2$ составляет $<1\%$. Для экспоненциальной формы СВМ-матрицы аналогично имеем:

$$\mathbf{A}_{\text{diag}}^{\text{CBM}} = \begin{pmatrix} -0.023532i & 0 & 0 \\ 0 & 0.046737i & 0 \\ 0 & 0 & -0.023205i \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Матрица $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{\text{CP}}$ (см. (16)) представляет собой сумму члена \mathbf{A}_{Rot} (17), отвечающего за смешивание без CP -нарушения, и соответствующее ему вращение вокруг действительной оси и члена \mathbf{A}_{CP} (18), отвечающего за CP -нарушение, и соответствующее ему вращение вокруг мнимой оси. Для $\delta_{\text{CP}} = 215^\circ$ имеем:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{\text{CP}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.499e^{i\delta_2} & 0.374e^{i\delta_1} \\ -0.499e^{-i\delta_2} & 0 & 0.802e^{i\delta_3} \\ -0.374e^{-i\delta_1} & -0.802e^{-i\delta_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \delta_1 = 168^\circ, \\ \delta_2 = 4^\circ, \\ \delta_3 = 1^\circ. \end{matrix} \quad (28)$$

В СВМ-матрице $\delta_{\text{CP}} = 270^\circ$, и для нее получаем соответственно

$$\mathbf{A}_1^{\text{CBM}} = \mathbf{A}_{\text{Rot}}^{\text{CBM}} + \mathbf{A}_{\text{CP}}^{\text{CBM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5548e^{i5^\circ} & 0.2702e^{i148^\circ} \\ -0.5548e^{-i5^\circ} & 0 & 0.7612e^{i3^\circ} \\ -0.2702e^{-i148^\circ} & -0.7612e^{-i3^\circ} & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Абсолютные значения элементов матрицы \mathbf{A}_1 (28) с учетом экспериментального разброса 3σ (см. (4)) могут меняться в следующих пределах:

$$|\mathbf{A}_1|_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0.439 \leftrightarrow 0.660 & 0.047 \leftrightarrow 0.428 \\ 0.439 \leftrightarrow 0.660 & 0 & 0.628 \leftrightarrow 0.929 \\ 0.047 \leftrightarrow 0.428 & 0.628 \leftrightarrow 0.929 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Экспоненциальная матрица смешивания является антиэрмитовой, что обеспечивает унитарность матрицы смешивания: $\mathbf{U}_{\text{exp}}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{\text{exp}} = \mathbf{U}_{\text{exp}}^+ \cdot \mathbf{U}_{\text{exp}} = \mathbf{I}$.

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ СМЕШИВАНИЯ НЕЙТРИНО И КВАРКОВ

Рассмотрим действительную матрицу вращения $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}$ (см. (12)) вокруг выделенной оси в трехмерном пространстве. Ее можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}, \quad \mathbf{A}_{\text{Rot}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -\mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ \mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Можно получить координаты вектора поворота $\mathbf{n} = \left(-\frac{\nu}{\Phi}, -\frac{\mu}{\Phi}, -\frac{\lambda}{\Phi} \right)$ и угол поворота $\Phi = \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$. Используя данные на ноябрь 2018 г. [10], получаем

$$\mathbf{n}_{\text{Nov}}^{2018} = (-0.7919, -0.3616, -0.492), \quad (32)$$

$$\Phi_{\nu}^{\text{Nov } 2018} \cong 58.01^{\circ + 7.07^\circ}_{-8.33^\circ}.$$

Для СВМ-матрицы смешивания получаем

$$\mathbf{n}_{\text{СВМ}} = (-0.7858, -0.2380, -0.5708), \quad (33)$$

$$\Phi_{\text{СВМ}} \cong 55.4^\circ.$$

Для кварков по данным PDG за 2017 г. [28] с параметрами Вольфенштейна $\lambda = 0.22465 \pm 0.00039$, $A = 0.832 \pm 0.009$, $\rho = 0.139 \pm 0.016$, $\eta = 0.346 \pm 0.010$ получаем

$$\mathbf{n}_q^{2017} = (-0.1828, -0.0157, -0.9830), \quad (34)$$

$$\Phi_q^{2017} = 13.20^{\circ + 0.02^\circ}_{-0.03^\circ}.$$

Сопоставление векторов и углов вращения нейтрино в (32) со значениями для кварков в (34) показывает, что оси вращения нейтрино и кварков составляют с точностью до нескольких градусов 45° (см. рис. 3), хотя сами значения \mathbf{n} и Φ довольно сильно отличаются из года в год. Также в зависимости от данных фиттинга (*best fit*) экспериментов несколько меняются и углы между осями для кварков \mathbf{n}_q и нейтрино \mathbf{n}_ν : например, по данным на май 2016 г. этот угол составлял 45.8° , по данным на январь 2018 г. он был $\approx 48.4^\circ$, по данным на ноябрь 2018 г. — 50.7° .

Сопоставление значений в (34) для кварков с (33) для СВМ-матрицы $\mathbf{U}_{\text{СВМ}}^{3\sigma}$ (10) дает **точно** угол 45°

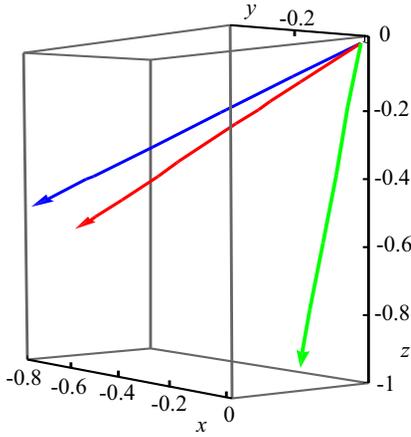


Рис. 3. Действительные оси вращения в пространстве для смешивания кварков — зеленая ось, для смешивания нейтрино по экспериментальным данным (best fit) на ноябрь 2018 г. — синяя ось, для СВМ-матрицы $U_{\text{СВМ}}^{\text{3}\sigma}$ (10) — красная ось

между осями вращения кварков и нейтрино! Таким образом, в кобимаксимальной СВМ-матрице смешивания с $\theta_{23} = 45^\circ$, $\delta_{\text{СР}} = -90^\circ$ получаем значения углов $\theta_{12} = 33.51^\circ$, $\theta_{13} = 8.695^\circ$ и соответствующую экспоненциальную форму матрицы такие, что все элементы матрицы смешивания находятся в пределах экспериментально измеренного допуска и точно выполняется дополнительность смешивания кварков и нейтрино (см. рис. 3).

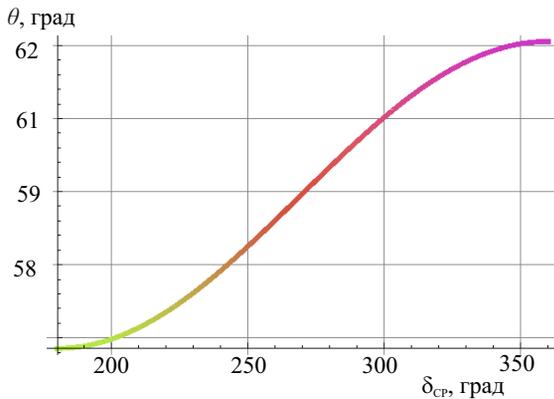
4. СВМ-МАТРИЦА СМЕШИВАНИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ ГРУППЫ SU(3)

Являясь элементом группы SU(3), матрица смешивания U может быть записана в следующей экспоненциальной форме:

$$U = \exp(i\theta H), \tag{35}$$

где θ — параметр вращения группы и H — эрмитова матрица, принадлежащая соответствующей алгебре группы с нормировкой $\text{tr}[H^2] = 2$. Инвариант группы, $\det(H)$, может быть переопределен в терминах угла ϕ следующим образом [29]:

$$\phi = \frac{1}{3} \left(\arccos \left(\frac{3}{2} \sqrt{3} \det(H) \right) - \frac{\pi}{2} \right). \tag{36}$$



Сравним (35) с экспоненциальной параметризацией матрицы смешивания $U_{\text{exp}} = \exp A$, где выделим множитель $i\theta$. Тогда с учетом нормировки $\text{tr}[H^2] = 2$ получаем для параметра θ следующее выражение [29]:

$$\theta = (-\text{tr}[A^2/2])^{1/2}, \tag{37}$$

определяющее угол поворота в группе SU(3). Теперь применим формулы (35)–(37) к СВМ-матрице (10); с помощью программы *Mathematica* получаем для нее как элемента группы SU(3) следующий численный вид:

$$H_{\text{СВМ}} = \begin{pmatrix} -0.0240 & 0.053 - 0.563i & 0.144 + 0.235i \\ 0.053 + 0.563i & 0.048 & 0.035 - 0.775i \\ 0.144 - 0.235i & 0.035 + 0.775i & -0.024 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицу $H_{\text{СВМ}}$ можно разложить по генераторам группы SU(3) [32]:

$$H_{\text{СВМ}} = 0.106T_1 + 1.126T_2 - 0.144T_3 + 0.288T_4 - 0.470T_5 + 0.070T_6 + 1.850T_7 + 0.084T_8,$$

где $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$, $a = 1, 8$, λ_a — матрицы Гелл-Манна. Для СВМ-матрицы получаем $\det H_{\text{СВМ}} \cong -0.136$ и следующие углы в группе SU(3):

$$\theta_{\text{СВМ}} = 56.19^\circ, \quad \phi_{\text{СВМ}} = 6.88^\circ.$$

Для нейтрино по экспериментальным данным (best fit) на ноябрь 2018 г. с $\delta_{\text{СР}} = 215^\circ$ имеем $\det H = -0.076$, $\theta_\nu^{2018} = 58.24^\circ_{-7.23^\circ}^{+3.26^\circ}$ и $\phi_\nu^{2018} = 3.78^\circ_{-5.49^\circ}^{+4.36^\circ}$.

Для кварков получаем $\det H = 0.00529$ и значительно меньшие углы:

$$\theta_q = 13.20^\circ_{-0.02^\circ}^{+0.02^\circ}, \quad \phi_q = -0.26^\circ_{-0.01^\circ}^{+0.01^\circ}.$$

Аналогичные вычисления можно проделать и для стандартной матрицы U_{st} (2). Это дает зависимость параметров матрицы смешивания U_{st} как элемента группы SU(3) от CP-нарушающей фазы $\delta_{\text{СР}}$ в стандартной параметризации (см. рис. 4).

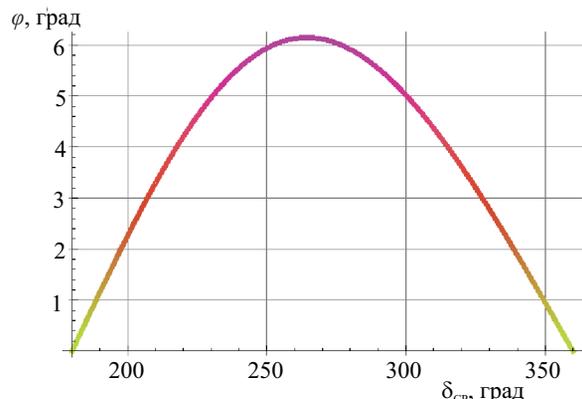


Рис. 4. Зависимость групповых параметров SU(3) от CP-нарушающей фазы в стандартной параметризации: $\theta(\delta_{\text{СР}})$ на левом и $\phi(\delta_{\text{СР}})$ на правом графиках

5. ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗИ CP -НАРУШЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ МАТРИЦЫ СМЕШИВАНИЯ

Исследуем сначала связь групповых параметров $SU(3)$ матрицы смешивания с углами в показателях экспонент элементов экспоненциальной параметризации (28). Формулы (35)–(37) позволяют соотносить матрицу смешивания как элемент $SU(3)$ (35) и экспоненциальную параметризацию (11). Для матрицы $A_{СВМ}$ (29) на основании данных *Best Fit* [10] получаем $\delta_1 \approx 148.5^\circ$, $\delta_2 \approx 5.4^\circ$, $\delta_3 \approx 2.6^\circ$. На рис. 5 показана зависимость параметра φ (36) от угла δ_1 в элементах (1,3) и (3,1) матрицы $A_1^{СВМ}$ (29), в основном определяющего CP -нарушение в экспоненциальной форме СВМ-параметризации.

Для матрицы A_1 (28) на основании экспериментальных данных [10] получаем $\delta_1 \approx 168^\circ$, $\delta_2 \approx 4^\circ$, $\delta_3 \approx 1^\circ$ и зависимость $\varphi(\delta_1)$ получается похожей на показанную на рис. 5. Угол θ (37) по построению не зависит от $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Так как вероятные значения угла δ_1 с учетом разброса лежат в пределах $[145.3^\circ - 180^\circ]$, то из зависимости $\varphi(\delta_1)$ (рис. 5) следует, что φ (36) не будет достигать своего максимального значения и будет почти равен 0 для $\delta_1 = 180^\circ$.

Поскольку в СВМ-параметризации зафиксирован угол $\delta_{СР} = 270^\circ$, то имеет смысл исследовать связь $\delta_{1,2,3}$ с CP -нарушающей фазой $\delta_{СР}$ в матрице A_1 (28) стандартной параметризации (2) (см. рис. 6). Анализ зависимости δ_1 и $\delta_{2,3}$ от δ показывает, что для δ_1 минимальным является значение 147° ; при этом $\delta_{СР} \cong 302^\circ$, а измеренному на данный момент значению $\delta_{СР} = 215^\circ$ соответствует величина $\delta_1 = 168^\circ$ (см. рис. 6). Зависимости $\delta_2(\delta_{СР})$ и $\delta_3(\delta_{СР})$ похожи друг на друга и имеют максимумы около $\delta_{СР} = 270^\circ$, однако диапазон изменения угла δ_2 почти в 3 раз больше диапазона для δ_3 (см. рис. 6).

С учетом явного вида матрицы A_{Rot} (17) для действительного вращения в $A_1 = A_{Rot} + A_{СР}$ (см. (16)) заключаем, что CP -нарушение описывается в основном δ_1 и в значительно меньшей степени $\delta_{2,3}$ в показателях экспонент элементов матрицы (28). Полученная нами зависимость величины инварианта Ярлског от δ_1 и δ_2 представлена на рис. 7.

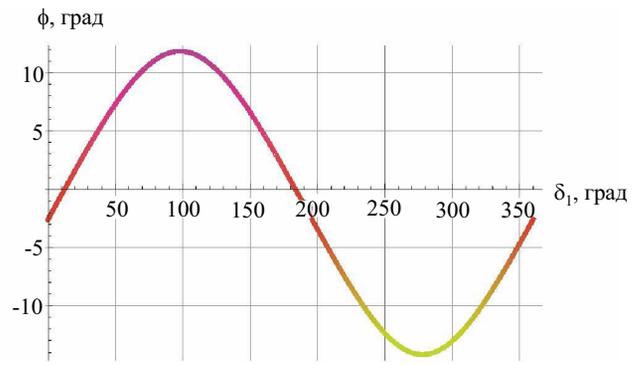


Рис. 5. Зависимость параметра φ группы $SU(3)$ с фазой δ_1 в матрице $A_1^{СВМ}$ (29)

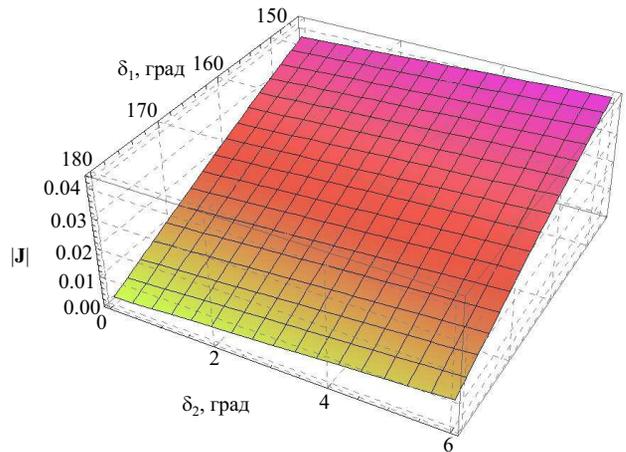


Рис. 7. Зависимость абсолютной величины инварианта Ярлског $J(\delta_1, \delta_2)$ от значений δ_1 в диапазоне $145^\circ - 180^\circ$, и δ_2 в диапазоне $0^\circ - 6^\circ$ при $\delta_3 = 1^\circ$ в экспоненциальной параметризации матрицы смешивания нейтрино

График на рис. 7 показывает зависимость $|J|(\delta_1, \delta_2)$ и разброс значений величины инварианта Ярлског в интервале погрешности 3σ . Зависимость показана в терминах параметров δ_1, δ_2 матрицы (28) экспоненциальной параметризации. Из рис. 7 также очевидно, что определяющей для инварианта Ярлског J является зависимость от δ_1 ; влияние δ_2 мало. Влияние δ_3 еще меньше и не рассматривается.

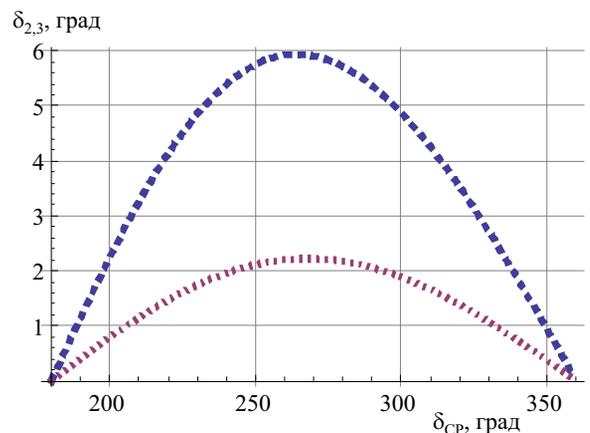
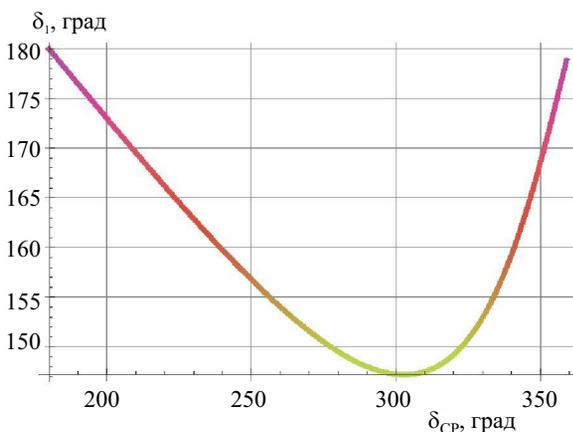


Рис. 6. Левый график — зависимость $\delta_1(\delta_{СР})$; правый график — зависимости $\delta_2(\delta_{СР})$ (штриховая) и $\delta_3(\delta_{СР})$ (пунктирная) линии

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

С помощью экспоненциальной формы матрицы смешивания нейтрино проанализированы данные о смешивании [10] за ноябрь 2018 г. В экспоненте матрицы смешивания, т.е. в матрице $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{\text{CP}_1} + \mathbf{A}_{\text{diag Im}}$, присутствуют вещественная матрица \mathbf{A}_{Rot} , мнимая матрица \mathbf{A}_{CP} и очень малая по величине мнимая диагональная матрица $\mathbf{A}_{\text{diag Im}}$, след которой точно равен нулю. Можно факторизовать в экспоненциальной форме $\mathbf{U}_{\text{exp}} = \exp \mathbf{A}$ вклад CP -нарушения и вращения вокруг действительной оси: $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_{\text{Rot}} \mathbf{P}_{\text{CP}}$, $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}$, $\mathbf{P}_{\text{CP}} = e^{\mathbf{A}_{\text{CP}}}$.

Матрица смешивания нейтрино \mathbf{U} рассмотрена как элемент группы $SU(3)$. Получены значения матрицы \mathbf{H} и определителя $\det \mathbf{H} = -0.076$ в показателе экспоненты $\mathbf{U} = \exp[i\theta \mathbf{H}]$ и соответствующего ей параметрического угла $\phi_{\nu}^{2018} = 3.78^{\circ} +_{-5.49^{\circ}}^{+4.36^{\circ}}$ и угла вращения в группе $SU(3)$, $\theta_{\nu}^{2018} = 58.24^{\circ} +_{-7.23^{\circ}}^{+3.26^{\circ}}$ с лучшим фиттингом к экспериментальным данным для нейтрино с разбросом 3σ . Исследована связь $SU(3)$ параметров θ и φ с углом CP -нарушения δ стандартной параметризации, а также связь φ с CP -нарушающей фазой в экспоненциальной параметризации (см. рис. 4, 5). Угол θ по построению не зависит от значений $\delta_{1,2,3}$ в экспоненциальной параметризации. Для кобимаксимальной СВМ-матрицы смешивания (т.е. $\theta_{23} = 45^{\circ}$, $\delta_{\text{CP}} = -90^{\circ}$ в стандартной параметризации) как элемента группы $SU(3)$ получены значения инварианта группы $\det \mathbf{H}_{\text{СВМ}} = -0.136$ и самой матрицы $\mathbf{H}_{\text{СВМ}}$, параметрического угла, $\phi_{\text{СВМ}} = 6.88^{\circ}$, и значение угла вращения в группе: $\theta_{\text{СВМ}} = 56.19^{\circ}$.

Установлено соответствие между CP -нарушающей фазой δ в стандартной параметризации и CP -нарушением в экспоненциальной параметризации; для последней получена иерархия значений комплексных элементов (1,3), (2,3), (3,2) матричной экспоненты с фазами $\delta_1 \approx 168^{\circ}$, $\delta_2 \approx 4^{\circ}$, $\delta_3 \approx 1^{\circ}$. Наиболее сильное CP -нарушение приходится на смешивание e - и τ -нейтрино. Для более вероятного на настоящий момент значения $\delta_{\text{CP}} \approx 215^{\circ}$ величина фазы $\delta_1 \approx 168^{\circ}$, определяющая главный вклад CP -нарушения в экспоненциальной параметризации, находится чуть выше середины допустимого диапазона ее значений (см. рис. 6).

С помощью инварианта Ярлског J как меры нарушения CP -инвариантности проведено сравнение CP -нарушения в стандартной, кобимаксимальной и экспоненциальной параметризациях матрицы смешивания. Исследована зависимость J от соответствующих фаз в стандартной и экспоненциальной параметризациях матрицы смешивания (см. рис. 2, 7). Проанализирована определяющая инвариант Ярлског зависимость от δ_1 в экспоненциальной параметризации и от δ_{CP} в стандартной параметризации. Угол δ_2 влияет мало по сравнению с δ_1 (рис. 7); влияние δ_3 на J похоже на влияние δ_2 , а зависимость $\delta_3(\delta_{\text{CP}})$ похожа на $\delta_2(\delta_{\text{CP}})$, но она в три раза слабее (рис. 6).

Показано, что с учетом экспериментально определенного с разбросом 3σ диапазона абсолютных значений элементов матрицы PMNS с кобимаксимальной матрицей смешивания **точно** выполняется

дополнительность смешивания кварков и нейтрино [30, 31]. При этом углы смешивания в СВМ матрице оказываются $\theta_{12} \cong 33.51^{\circ}$, $\theta_{13} \cong 8.695^{\circ}$ и лежат в пределах разброса 3σ . Соответствующее значение инварианта Ярлског $J = -0.034$ оказывается близко по абсолютной величине к максимальному значению $|J_{\text{max}}| = 0.035$, соответствующему максимальному CP -нарушению. Все полученные величины лежат в диапазоне допустимых экспериментальных значений 3σ .

Экспоненциальное представление матрицы смешивания и полученные на ее основе результаты и интерпретации могут быть полезны при анализе и обработке экспериментальных данных по осцилляциям нейтрино в экспериментах, проводимых как в настоящее время, так и планируемых в будущем. Кроме того, выявление новых свойств симметрии матрицы смешивания сможет в дальнейшем позволить теоретически объяснить феномен смешивания нейтрино.

Авторы благодарят профессора А.В. Борисова за ценные советы, полезные замечания и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 1967. **19**. P. 1264.
- Salam A. Elementary Particle Theory / Ed. by N. Svartholm. Almqvist Forlag AB, 1968.
- Glashow S. L. // Nucl. Phys. 1961. **22**. P. 579.
- Понтекоров Б. // ЖЭТФ. 1957. **33**. С. 549.
- Понтекоров Б. // УФН. 1968. **95**, № 7. С. 517.
- Cleveland B. T. et al. // Astrophys. J. 1988. **496**. 505.
- Fukuda Y. et al., (Kamiokande Collab.) // Phys. Rev. Lett. **77**. 1996. P. 1683.
- Minkowski P. // Phys. Lett. B. 1977. **67**. P. 421.
- Maki Z., Nakagawa M., Sakata S. // Prog. Teor. Phys. 1962. **28**. P. 870.
- Esteban I., Gonzalez-Garcia M. C. et al. NuFIT 4.0 (2018).
- Zhang Yijia et al. // Phys. Rev. D. 2012. **86**. 032008.
- King S. F. // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2015. **42**. 123001.
- Ma E. // Phys. Rev. D. 2015. **92**. 051301(R).
- Ma E. // Phys. Lett. B. 2016. **752**. P. 198.
- Ma E., Rajasekaran G. // EPL 2017. **119.3**. P. 31001.
- Ma E. // Phys. Lett. B. 2018. **777**. P. 332.
- Wolfenstein L. // Phys. Rev. Lett. 1983. **51**, N 21. P. 1945.
- Li N., Ma B.-Q. // Phys. Rev. D. 2005. **71**. 097301.
- Dattoli G., Zhukovsky K. V. // Eur. Phys. J. 2007. **50**. P. 817.
- Dattoli G., Zhukovsky K. V. // Eur. Phys. J. 2007. **52**, N 3. P. 591.
- Jarlskog C. // Phys. Rev. Lett. 1985. **55**. P. 1039.
- Zhukovsky K., Melazzini F. // Eur. Phys. J. C. 2016. **76**. P. 462.
- Zhukovsky K., Borisov A. // Eur. Phys. J. C. 2016. **76**. P. 637.
- Жуковский К. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 5. С. 3. (Zhukovsky K. V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 5. P. 433.)
- Жуковский К. В. // ЯФ. 2017. **80**, № 3. С. 1. (Zhukovsky K. V. // Phys. Atom. Nucl. 2017. **80**, N 4. P. 690)
- Wouk A. // J. Math. Anal. Appl. 1965. **11**. P. 131.
- Loring T. A. // Num. Lin. Alg. Appl. **21**. 2014. P. 744.

28. Patrignani C. et al. // Chin. Phys. C. 2016. **40**. 100001 and 2017 update.
29. Curtright T. L., Zachos C. K. // Rep. Math. Anal. Appl. 2015. **76**, N 3. P. 401.
30. Minakata H., Smirnov A. Yu. // Phys. Rev. D. 2004. **70**. 073009.
31. Raidal M. // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**. 161801.
32. Румер Ю. Б., Фет А. И. // Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970. С. 82. (Rumer Yu., Fet A. // Theory of unitary symmetry, 1970.)

Analysis of the CP Violation and Complementarity of Mixing for Quarks and Neutrinos in the Exponential and Cobimaximal Parametrizations of the Mixing Matrix

K. Zhukovsky^a, A. Davydova

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^azhukovsk@physics.msu.ru.

The latest (November 2018) experimental data on neutrino mixing is analyzed in the framework of standard, cobimaximal and exponential parametrizations. The logarithm of the mixing matrix is found and the matrix element values for the exponential and cobimaximal mixing matrix forms are determined. The exponential form allows factorization of the matrices that are responsible for the rotations in real space and the CP violation in the form of the rotation in imaginary space. The exponential form also allows easy verification of the complementarity of quark and neutrino mixing. In the exponential mixing parametrization the angle between the rotation axis for quarks neutrinos is studied and the complementarity of quark and neutrino mixing is investigated. Entries for the cobimaximal matrix are identified to comply with experimental data and provide exact quark-neutrino mixing complementarity. The Jarlskog invariant is employed to study the degree of CP violation for various parameters of mixing matrices in the standard, cobimaximal and exponential parametrizations. The mixing matrix is studied as the group $SU(3)$ element with the exponential parametrization. $SU(3)$ group parameters φ and θ are written for the mixing matrix; their dependence of the degree of the CP violation is explored.

Keywords: neutrino mixing, PMNS matrix, CP violation, exponential parametrization, $SU(3)$ group.

PACS: 14.60.Pq, 12.15.Ff, 02.20.-a.

Received 08 December 2018.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 3. Pp. 233–242.

Сведения об авторах

1. Жуковский Константин Владимирович — доктор. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.
2. Давыдова Алиса Александровна — студентка.