

Решение трехмерной обратной задачи эластографии на параметрическом классе с апостериорной оценкой точности

А. С. Леонов,^{1, а} А. Н. Шаров,^{2, б} А. Г. Ягола^{2, в}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ).
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 01.02.2019, после доработки 06.05.2019, принята к публикации 07.05.2019.

В работе представлено решение специальной трехмерной обратной задачи эластографии: в рамках квазистатической модели линейно-упругого изотропного тела, подверженного действию поверхностных сил, определить распределение модуля Юнга в исследуемых биологических тканях по известным значениям вертикальных смещений этих тканей. Цель такого исследования — нахождение локальных включений в ткани, интерпретируемых как опухоли и имеющих значения модуля Юнга, существенно отличающихся от известного фонового значения. Дополнительно предполагается, что модуль Юнга есть постоянная функция внутри искомого включения, геометрия которых задана параметрически. Эта обратная задача приводит к решению нелинейного операторного уравнения, которое вариационным методом сводится к экстремальной задаче нахождения числа включений, параметров, задающих их форму, а также модуля Юнга для каждого включения. Алгоритмически задача решается с использованием модификации метода расширяющихся компактов В. К. Иванова и И. Н. Домбровской. В качестве иллюстрации работы алгоритма приводятся примеры решения модельных обратных задач с включениями в форме шаров. Для найденного решения одной из модельных задач проводится апостериорная оценка точности полученного распределения модуля Юнга.

Ключевые слова: эластография, восстановление модуля Юнга, обратная задача, апостериорная оценка точности, квазирешение.

УДК: 519.632.4. PACS: 02.30.zz, 02.60.-x, 62.20.de, 87.10.Pq.

ВВЕДЕНИЕ

Эластография — это совокупность методов исследования биологических тканей в онкологии, использующих различия механических свойств здоровой и опухолевой тканей. Первоначально (1980 — начало 1990 гг.) эластография рассматривалась как способ улучшения ультразвукового исследования, однако в дальнейшем она выделилась в отдельный раздел диагностики. В эластографии существует несколько направлений, однако для всех характерны следующие этапы исследования (см., например, [1, 2]): воздействие на поверхность исследуемой части тела с помощью внешних поверхностных сил; измерение (или вычисление) возникающих деформаций исследуемой ткани; определение характеристик упругости ткани по деформациям путем решения обратной задачи. Деформации (смещения) тканей могут определяться по данным ультразвукового исследования или с помощью магнитно-резонансного метода. Решение обратной задачи позволяет найти по известным смещениям ткани распределение модуля Юнга в ткани и тем самым найти характерные для онкологии включения с повышенным значением этого модуля.

В данной работе считается, что деформации заданы, а для решения обратной задачи используется так называемая *трехмерная квазистатическая модель* [1, 2], рассматриваемая в разд. 1. Она связывает смещения ткани с механическими модулями (модулем Юнга и коэффициентом Пуассона)

участка исследуемой ткани, которая представляется как линейно-упругое изотропное тело (область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$), подвергаемое малым поверхностным сжатиям. Математически эта связь описывается системой стационарных дифференциальных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от модуля Юнга и коэффициента Пуассона, и с соответствующими граничными условиями. При этом коэффициент Пуассона считается известным. В рамках такой модели в разд. 2 ставится обратная задача нахождения распределения модуля Юнга в ткани, которая формулируется в терминах решения нелинейного операторного уравнения. Вопросы единственности решения обратных задач такого рода рассмотрены, например, в [3]. В работе дополнительно предполагается, что модуль Юнга есть постоянная величина внутри искомого включения, геометрия которых задана параметрически. В разд. 3 обратная задача сводится вариационным методом к поиску числа включений, параметров, задающих их форму, а также модуля Юнга для каждого включения, путем решения экстремальной задачи. Алгоритмически экстремальная задача решается с использованием модификации метода расширяющихся компактов В. К. Иванова и И. Н. Домбровской. В разд. 4 кратко излагается методика апостериорной оценки точности получаемых приближенных решений. В качестве иллюстрации работы алгоритма в разд. 5 приводятся примеры решения модельных обратных задач с включениями в форме шаров. Для найденного решения одной из модельных задач проводится апостериорная оценка точности полученных геометрических параметров и значения модуля Юнга.

^а E-mail: asleonov@mephi.ru

^б E-mail: scharov.aleksandr@physics.msu.ru

^в E-mail: yagola@physics.msu.ru

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ЭЛАСТОГРАФИИ

Рассмотрим модельную область $\Omega = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ исследуемой ткани с границей, состоящей из поверхностей

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x, y, z): x \in [-a, a], y \in [-b, b], z = -c\}, \\ G_2 &= \{(x, y, z): x \in [-a, a], y = -b, z \in [-c, c]\}, \\ G_3 &= \{(x, y, z): x = -a, y \in [-b, b], z \in [-c, c]\}, \\ G_4 &= \{(x, y, z): x \in [-a, a], y = b, z \in [-c, c]\}, \\ G_5 &= \{(x, y, z): x = a, y \in [-b, b], z \in [-c, c]\}, \\ G_6 &= \{(x, y, z): x \in [-a, a], y \in [-b, b], z = c\}. \end{aligned}$$

Считаем, что механические свойства ткани в области Ω задаются распределением модуля Юнга $E = E(x, y, z)$ и коэффициентом Пуассона ν , который предполагается постоянным, как в ряде работ: $\nu = 0.495$ (см., например, [7]).

Система дифференциальных уравнений, связывающая смещения ткани u, v и w вдоль осей x, y и z соответственно, получается из трех групп уравнений теории упругости (см., например, [8]):

1) уравнений равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + K_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + K_y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

в которых $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные напряжения вдоль x, y и $z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ — касательные напряжения, а K_x, K_y, K_z — компоненты объемной силы; 2) уравнений, связывающих напряжения в тканях и деформации тканей $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}$:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right), \\ \sigma_y = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right), \\ \sigma_z = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right), \\ \tau_{xy} = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}; \end{cases} \quad (2)$$

здесь $\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$;

3) уравнений, связывающих деформации и смещения $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (1), с учетом (3) получим систему дифференциальных уравнений в частных

производных, связывающую смещения ткани с величинами E, ν :

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (E\theta) + \\ + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(E \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(E \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + K_x = 0, \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(E \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (E\theta) + \\ + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + K_y = 0, \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(E \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(E \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (E\theta) + \\ + K_z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В нашей модели смещения вызываются поверхностными силами, действующими на границе G_6 и имеющими компоненты f_x, f_y, f_z . Поэтому справедливы граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z \right) = f_x, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) n_y + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z \right) = f_y, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) n_y + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) n_z \right) = f_z, \\ (x, y, z) \in G_6, \end{cases} \quad (5)$$

где $(n_x, n_y, n_z) = \mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к G_6 .

Остальные граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \\ = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, (x, y, z) \in G_{2,3,4,5}, \\ u = v = w = 0, (x, y, z) \in G_1. \end{cases} \quad (6)$$

Для гладких функций $E(x, y, z), f_x, f_y, f_z$ при условии $E(x, y, z) \geq E_{\min} = \text{const} > 0$ краевая задача (4)–(6) определения смещений $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$

имеет единственное решение, непрерывное в Ω [9]. Однако для практических приложений наиболее интересны случаи, когда функция $E(x, y, z)$, моделирующая онкологические включения в здоровые ткани, не является непрерывной. В этом случае необходимо рассматривать слабое решение краевой задачи, т.е. решение в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$. Находя это решение, которое также будет единственным, получим зависимости смещений u, v, w не только от координат, но и от E : $u = u(x, y, z; E)$, $v = v(x, y, z; E)$, $w = w(x, y, z; E)$. Именно в этом и состоит решение прямой задачи эластографии в рассматриваемой постановке. Прямая задача решается приближенно с использованием метода конечных элементов.

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОГРАФИИ

Предположим, что в нашем распоряжении имеются данные только о вертикальных смещениях тканей $w(x, y, z)$, как это предполагается в ряде работ (см., например, [7]). Тогда связь этих данных с функцией $E(x, y, z)$ можно записать в форме $w = F(E)$, где $F(E)$ — оператор, реализующий указанную выше процедуру нахождения функции $w(x, y, z; E)$ из решения прямой задачи. Введем множество $\mathcal{E} = \{E(x, y, z) \in L_2(\Omega) : 0 < E_{\min} \leq E(x, y, z) \leq E_{\max}\}$, где E_{\min}, E_{\max} — известные оценки возможных значений модуля Юнга. Тогда оператор $F(E)$ непрерывен из \mathcal{E} в $L_2(\Omega)$ [9]. Нас интересует задача определения функции $E(x, y, z) \in \mathcal{E}$ по данным $w(x, y, z) \in H^1(\Omega)$, т.е. решение операторного уравнения

$$F(E) = w, E \in \mathcal{E}, w \in H^1(\Omega). \quad (7)$$

Далее предполагается, что решение уравнения (7) единственно и представляется разрывной функцией вида

$$E(x, y, z) = E_0 + \sum_{k=1}^n E_k \chi(x, y, z; a_k) \in \mathcal{E}. \quad (8)$$

Здесь $\chi(x, y, z; a_k)$ — характеристические функции непересекающихся трехмерных областей, лежащих в Ω и заданных параметрически (с неизвестными наборами геометрических параметров a_k), E_0 — известное фоновое значение модуля Юнга (значение вне этих областей), а E_k — неизвестное значение модуля Юнга внутри k -й области. Совокупность неизвестных параметров областей $\{a_k\}_{k=1}^n$, а также неизвестных значений $\{E_k\}_{k=1}^n$ модуля Юнга внутри этих областей составляют конечномерный вектор, который будем обозначать как $d_n = (\{a_k\}_{k=1}^n, \{E_k\}_{k=1}^n)$. Считается, что $d_n \in D_n$, где D_n есть множество ограничений на неизвестные. Мы используем простейшие ограничения интервального типа на все неизвестные величины. Ниже в качестве примера рассматривается частный случай, когда области являются шарами и параметрами a_k k -го шара являются его центр (x_k, y_k, z_k) и радиус r_k , причем $x_k^{(1)} \leq x_k \leq x_k^{(2)}$, $y_k^{(1)} \leq y_k \leq y_k^{(2)}$, $z_k^{(1)} \leq z_k \leq z_k^{(2)}$ и $r_k^{(1)} \leq r_k \leq r_k^{(2)}$. Числа $x_k^{(1,2)}, y_k^{(1,2)}, z_k^{(1,2)}, r_k^{(1,2)}$, определяющие ограничения на параметры k -го шара, считаются известными.

Данные w задачи (7) измеряются в конечном числе точек и известны с ошибкой. Поэтому вместо w известен элемент $\hat{w}_\delta \in L_2(\Omega)$, получаемый интерполяцией измеренных значений, такой, что $\|w - \hat{w}_\delta\|_{L_2} \leq \delta$. При решении уравнения (7) по методу конечных элементов оператор также аппроксимируется оператором $\hat{F}_h(E) : \mathcal{E} \rightarrow L_2(\Omega)$ так, что $\|F(E) - \hat{F}_h(E)\|_{L_2} \leq h, \forall E \in \mathcal{E}$. Число h есть ошибка такой аппроксимации. Поэтому решаемая обратная задача состоит в нахождении по приближенным данным $(\hat{F}_h, \hat{w}_\delta, \delta, h)$ приближения $E_{h\delta}(x, y, z)$ вида (8), т.е. в нахождении числа n и параметров d_n при ограничениях $d_n \in D_n$ на искомые величины.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для решения уравнения (7) был использован вариант алгоритма, описанного в [10]. Пусть $\bar{E} = E(x, y, z; \bar{d}_n)$ — точное решение вида (8) уравнения (7) с параметрами $\bar{d}_n = (\{\bar{a}_k\}_{k=1}^n, \{\bar{E}_k\}_{k=1}^n) \in D_n$, характеризующими геометрию включений в ткани и их модули Юнга, $\bar{w} = F(\bar{E})$ — точная правая часть уравнения (7), и задана приближенная правая часть w_δ такая, что $\|\bar{w} - w_\delta\|_{L_2} \leq \delta, \delta > 0$. Решение будем записывать в виде $\bar{E} = B_n \bar{d}_n$, где B_n — оператор, действующий по формуле (8). Заметим, что в случае, когда включения моделируются набором шаров, размерность вектора \bar{d}_n есть $m = 5n$, так что $D_n \subset \mathbb{R}^{5n}$.

Алгоритм решения задачи заключается в следующем:

1) полагаем $n = 1$ и ищем квази-решение d_1^* уравнения (7) на множестве D_1 :

$$d_1^* = \operatorname{argmin}\{\|F(B_1 d_1) - w_\delta\|_{L_2} : d_1 \in D_1\} = \{a_1^*, E_1^*\}.$$

Если $\|F(B_1 d_1^*) - w_\delta\|_{L_2} \leq \delta$, то процесс прекращается и решение имеет вид

$$E(x, y, z) = E(x, y, z; d_1^*) = E_0 + E_1^* \chi(x, y, z; a_1^*);$$

2) если $\|F(B_1 d_1^*) - w_\delta\|_{L_2} > \delta$, то полагаем $n = 2$ и ищем квази-решение d_2^* уравнения (7) на множестве D_2 :

$$d_2^* = \operatorname{argmin}\{\|F(B_2 d_2) - w_\delta\|_{L_2} : d_2 \in D_2\} = \{a_1^*, a_2^*, E_1^*, E_2^*\}.$$

Если $\|F(B_2 d_2^*) - w_\delta\|_{L_2} \leq \delta$, то задача решена и решение имеет вид

$$E(x, y, z) = E(x, y, z; d_2^*) = E_0 + E_1 \chi(x, y, z; a_1^*) + E_2 \chi(x, y, z; a_2^*);$$

3) если же $\|F(B_2 d_2^*) - w_\delta\|_{L_2} > \delta$, то полагаем $n = 3$ и т. д.

Справедлива

Теорема 1.

Предлагаемый алгоритм обрывается на некотором шаге $k(\delta) \in \mathbb{N}$ причем $k(\delta) \leq n$. Приближенное решение $E(x, y, z; d_{k(\delta)}^*)$ сходится в $L_2(\Omega)$ к точному решению $E(x, y, z; \bar{d}_n)$ вида (8) при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство аналогичной теоремы для двумерной обратной задачи эластографии, проведенное в [10].

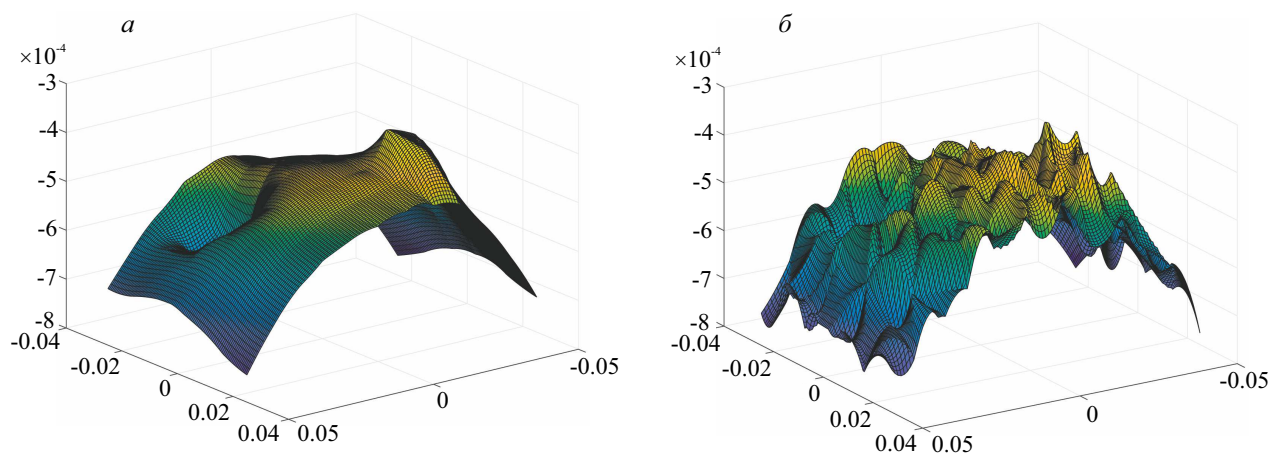


Рис. 1. а — Точные входные данные задачи $w(x, y, z)$, б — возмущенные данные с ошибкой $w_\delta(x, y, z)$ 5% в срезе $z = 0$

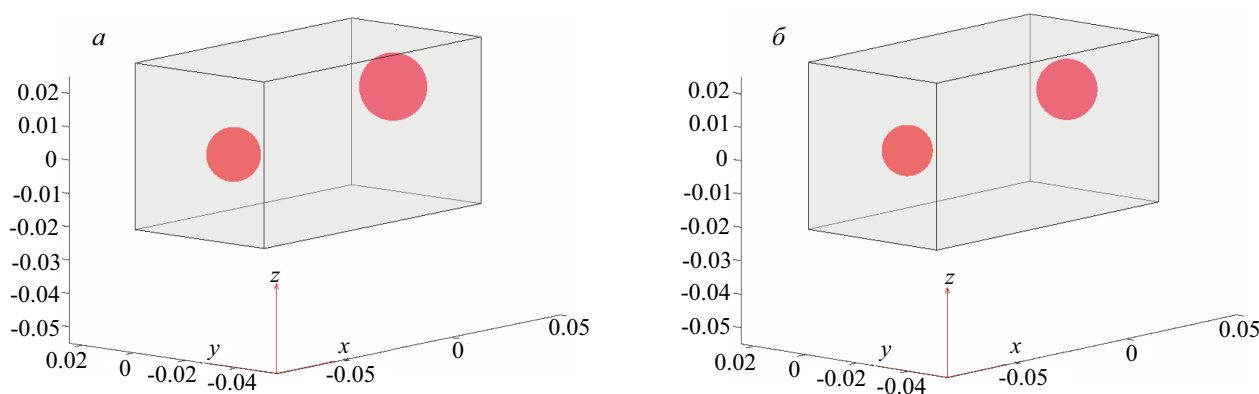


Рис. 2. Точное (а) и найденное (б) положения включений в области Ω

4. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Существует несколько схем апостериорной оценки точности решений некорректных обратных задач (см., например, [11, 12]). Мы использовали подход, предложенный в [6, 13].

Предположим, что задача (7) имеет единственное решение и найдено ее приближенное решение $E(x, y, z; d_k^*)$. Тогда известно значение $\Delta_\delta = C \|F(E(x, y, z; d_k^*)) - w_\delta\|_{L_2}$, где $C = \text{const} > 1$ — константа алгоритма. Введем величину $\Delta(d) = \|F(E(x, y, z; d)) - w_\delta\|_{L_2}$. Апостериорная оценка погрешности найденного распределения модуля Юнга может быть найдена как решение экстремальной задачи:

$$\epsilon(\delta) = \sup\{\|E(x, y, z; d_k(\delta)) - E(x, y, z; d_k^*)\|_{L_2} : d_k(\delta) \in D_k(\delta), \Delta(d_k(\delta)) \leq \Delta_\delta\}, \quad (9)$$

которую можно решить с помощью методов глобальной оптимизации, представленных, например, в пакетах прикладных программ MATLAB, SiLab, Python и др.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим результаты численных экспериментов по решению обратной задачи эластографии и по апостериорной оценке точности некоторых решений.

Модельная задача решалась в параллелепипеде $\Omega = [-0.05, 0.05] \times [-0.025, 0.025] \times [-0.025, 0.025]$. Ее точное решение имело вид $E(x, y, z) = 32 + 120\chi_1(x, y, z) + 90\chi_2(x, y, z)$, где $\chi_{1,2}(x, y, z)$ — характеристические функции двух шаров, координаты центра и радиусы которых $x_1 = 0.025$, $y_1 = -0.012$, $z_1 = 0.012$, $r_1 = 0.01$, $x_2 = -0.02$, $y_2 = 0.012$, $z_2 = -0.005$, $r_2 = 0.008$ соответственно. Точные входные данные $w(x, y, z)$, полученные с помощью решения прямой задачи (4) по методу конечных элементов, и возмущенные данные $w_\delta(x, y, z)$ с ошибкой 5% представлены на рис. 1, а, б в срезе $z = 0$. Видно, что по точным данным можно оценить положение включений, но по возмущенным данным искомые включения визуально не определяются.

На рис. 2, а и 2, б показаны геометрии точного и приближенного решения, полученного с помощью предложенного алгоритма. Видно, что число неоднородностей определяется точно, а и их положение определяется с достаточной для диагностики точностью. Конкретно, получены следующие приближенные значения координат центра и радиуса шаров $x_1 = 0.024$, $y_1 = -0.0118$, $z_1 = 0.0108$, $r_1 = 0.0089$, $x_2 = -0.0210$, $y_2 = 0.0115$, $z_2 = -0.0039$, $r_2 = 0.0074$. Получены также значения модуля Юнга внутри шаров: $E_1 = 150$, $E_2 = 133$. Таким образом, положения и радиусы шаров определены с точностью не хуже 22%, а параметры распределения модуля Юнга — с точностью не хуже 28%.

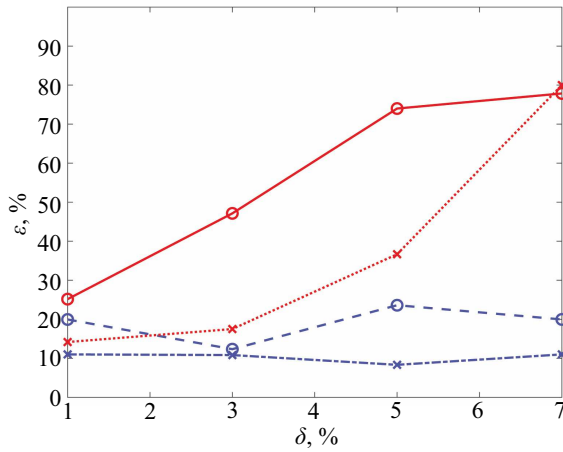


Рис. 3. Линии с маркерами о: истинная относительная ошибка найденного модуля Юнга (—) и апостериорная относительная оценка его точности (---) в зависимости от точности входных данных δ . Аналогично линии с маркерами \times : истинная относительная ошибка найденных геометрических параметров (---) и апостериорная относительная оценка их точности (···)

Проведем также результаты апостериорной оценки точности найденного распределения модуля Юнга и найденных геометрических параметров для задачи с одной неоднородностью в виде шара. Оценка получалась в форме (9) для входных данных с ошибкой 1, 3, 5 и 7%. Результаты оценки приведены на рис. 3. Видно, что истинная относительная ошибка $|E_1^* - \bar{E}_1| / (E_0 + \bar{E}_1)$ полученного распределения модуля Юнга не превышает 24%, а аналогичная максимальная истинная ошибка геометрических параметров $\max_k \{|a_k^* - \bar{a}_k| / |\bar{a}_k|\}$ не превышает 11%. При этом апостериорная оценка точности полученного распределения модуля Юнга при низких значениях ошибки входных данных ($\delta = 1\%$) не превышает 26%. При ошибке входных данных δ выше 1% апостериорная оценка точности модуля Юнга получается достаточно грубой (более 45%) и более чем в 2 раза превышает истинную ошибку. Апостериорная оценка геометрических параметров получается достаточно хорошей при значениях δ , не превышающих 3%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм решения трехмерной обратной задачи эластографии на параметрических классах решений. Представлено утверждение о сходимости приближенного решения, полученного с помощью алгоритма, к точному решению задачи

при стремлении ошибки входных данных к нулю. Приведены результаты численных экспериментов решения модельной обратной задачи эластографии в параллелепипеде с двумя неоднородностями в виде шара. При погрешности данных в 5% алгоритм позволяет определить геометрические параметры с точностью не хуже 22%, а параметры распределения модуля Юнга — с точностью не хуже 28%.

Для решений модельной обратной задачи с неоднородностью в виде одного шара найдена зависимость апостериорной оценки точности найденного распределения модуля Юнга и геометрических параметров от уровня ошибки входных данных. При низких значениях ошибки входных данных (до 1%) апостериорная оценка ошибки найденного распределения модуля Юнга не превышает 26%. Аналогично при ошибках данных до 3% апостериорная оценка ошибки вычисленных геометрических параметров менее 18%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00450 и № 17-01-00159) и Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (проект 02.a03.21.0005 от 27.08.2013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doyley M. M. // Phys. Med. Biol. 2012. **57**. R35–R73.
2. Oberai A. A., Gokhale N. H., Feijoo G. R. // Inverse Problems. 2003. **19**. P. 297.
3. Barbone P. E., Gokhale N. H. // Inverse Problems. 2004. **20**. P. 283.
4. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. Titarenko V., Yagola A. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. **16**. P. 625.
6. Leonov A. S. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. **20**. P. 637.
7. Rychagov M., Khaled W., Reichling S. et al. // Model. Fortsch. der Akustik. 2003. **29**. P. 586.
8. Кац А. М. Теория упругости. 2-е изд. СПб.: Лань, 2002.
9. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
10. Leonov A. S., Sharov A. N., Yagola A. G. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2017. **26**. P. 1.
11. Bakushinsky A. B. // Dokl. Math. 2011. **83**. P. 439.
12. Titarenko V., Yagola A. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. **16**. P. 625.
13. Leonov A. S. // Comput. Math. Math. Phys. 2016. **56**. P. 1.

Solution of the Inverse Elastography Problem in Three Dimensions for a Parametric Class with A Posteriori Error Estimation

A. S. Leonov^{1,a}, A. N. Sharov^{2,b}, A. G. Yagola^{2,c}

¹Department of Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI. Moscow 115409, Russia.

²Faculty of Physics, Department of Mathematics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: ^aasleonov@mephi.ru, ^bscharov.aleksandr@physics.msu.ru, ^cyagola@physics.msu.ru.

The paper presents the solution of a special three-dimensional inverse elastography problem: given a quasistatic model of a linear-elastic isotropic body subject to surface forces, to find the Young's modulus distribution

in the biological tissues under study using the known values of vertical displacements of these tissues. This study is aimed at detecting local inclusions in the tissue interpreted as tumors with values of the Young's modulus that are significantly different from the known background. In addition, it is assumed that Young's modulus is a constant function inside the unknown inclusions of a parametrically given geometry. This inverse problem leads to the solution of a nonlinear operator equation, which is reduced by a variational method to the extremum problem of finding the number of inclusions, parameters defining their shape, and the Young's modulus for each inclusion. The problem is solved algorithmically by using a modification of the method of extending compacts by V. K. Ivanov and I. N. Dombrovskaya. To illustrate how the algorithm works, we give examples of solving model inverse problems with inclusions in the form of balls. A posteriori error estimation of the obtained distribution of Young's modulus is carried out for the found solution to one of the model problems.

Keywords: elastography, Young's modulus recovery, inverse problem, a posteriori error estimation, quasisolution.
PACS: 02.30.zz, 02.60.-x, 62.20.de, 87.10.Pq.

Received 01 February 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 5. Pp. 488–493.

Сведения об авторах

1. Леонов Александр Сергеевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: asleonov@mephi.ru.
2. Шаров Александр Николаевич — аспирант; тел.: (495) 939-11-00, e-mail: scharov.aleksandr@physics.msu.ru.
3. Ягола Анатолий Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: yagola@physics.msu.ru.