СТАТЬИ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Периодические решения с пограничными слоями в задаче моделирования вертикального переноса антропогенной примеси в тропосфере

А. Л. Нечаева,[а] М. А. Давыдова[б]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 01.08.2019, после доработки 10.08.2019, принята к публикации 16.08.2019.

Рассматривается периодическая задача для нелинейного уравнения диффузии с переносом, возникающая при математическом моделировании вертикального переноса антропогенной примеси в нижних слоях тропосферы. Модельная задача в безразмерных переменных классифицируется как нелинейная сингулярно возмущенная задача типа реакция—диффузия—адвекция, к исследованию которой применяются методы асимптотического анализа. С использованием метода пограничных функций и асимптотического метода дифференциальных неравенств, основанного на принципе сравнения, выполняется построение асимптотического решения задачи произвольного порядка точности с последующим обоснованием построений и исследованием решения на наличие свойства асимптотической устойчивости по Ляпунову. Результаты работы иллюстрированы примером, описывающим поле концентраций линейного стока вещества.

Ключевые слова: задачи атмосферной диффузии, периодические задачи типа реакция—диффузия—адвекция, нелинейное уравнение диффузии, антропогенное загрязнение атмосферы, фотохимические процессы в атмосфере.
УДК: 517.9. PACS: 02.30.Jr, 02.30.Mv.

ВВЕДЕНИЕ

Периодические решения в нелинейных сингулярно возмущенных задачах реакция—диффузия исследовались в работах [1, 2]. Наличие адвекции приводит к существенным изменениям в алгоритме построения асимптотического решения задачи, особенно в случае решения с внутренним переходным слоем (контрастной структуры) [3]. Отметим, что идеи работ [3] и [4] использовались при исследовании контрастных структур в периодических задачах реакция—диффузия—адвекция с малым переносом (подробнее см. [5–7]).

В настоящей работе описано решение погранслойного типа одномерной периодической задачи для нелинейного уравнения диффузии с переносом, моделирующей процесс вертикального переноса и химической трансформации антропогенной примеси в нижних слоях тропосферы. Использование аналитического решения соответствующей модельной задачи позволит получить более качественную информацию о пространственно-временной структуре распределения эмиссий и о вертикальной стратификации примесей над крупными городами с учетом суточной или сезонной изменчивости в дополнение к информации, полученной по данным наблюдений на сети станций мониторинга атмосферы (см., например, [8]) с целью разработки улучшенных методик определения ежедневных интегральных эмиссий со всей территории города или городской агломерации.

Потребность в улучшенных методах расчета эмиссионных потоков антропогенных примесей также связана с осознанным завышением значений химически активных соединений в атмосфере над российскими городами в глобальных и региональных инвентаризациях EDGAR v 4.2; TNO-MACC и TNO-MACC_II, проводимых группами зарубежных экспертов [9]. Это сильно искажает представление о влиянии российских городов на состояние атмосферы и климат Земли (см., например, [8, 10]). В частности, глобальная инвентаризация EDGAR v 4.2, являющаяся основой для прогноза изменений состава глобальной атмосферы и климата Земли, завышает антропогенные выбросы NO_x от московского мегаполиса в 2.5 раза, CH_4 — в 10 раз, SO_2 — в 30 раз и т. д.

Изменение концентрации примеси $u(x,t)$ с течением времени описывается нелинейным уравнением типа реакция—диффузия—адвекция следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(uA_i(x,t)) + F(u,x,t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^3,\ t > 0, \quad (1)$$

где $k_i(x,t)$ — коэффициент турбулентной диффузии в направлении оси x_i, $A_i(x,t)$ — компоненты скорости переноса вещества, $F(u,x,t)$ — объемная плотность источников вещества. Наличие последнего слагаемого в уравнении (1) может быть обусловлено, например, производственными выбросами, фотохимическими процессами, распадом вещества. В приближении несжимаемой среды при устойчивом физическом состоянии приземного слоя атмосферы, начиная с некоторой высоты можно пренебречь изменчивостью коэффициента диффузии [11], выбрав

[а] E-mail: nechaeva.al15@physics.msu.ru
[б] E-mail: m.davydova@physics.msu.ru

некоторое среднее значение $\langle k\rangle$, и получить уравнение в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = (Pr_D Re)^{-1}\Delta u' - \mathbf{A}'(x',t')\nabla u' + \frac{FL^2}{\langle k\rangle Pr_D ReU},$$

где штрихи обозначают безразмерные величины, Pr_D — диффузионное число Прандтля, Re — число Рейнольдса, L — характерный пространственный масштаб, U — характерное значение концентрации (например, среднее значение концентрации на некоторой высоте), $FL^2(U\langle k\rangle)^{-1}$ — аналог числа Остроградского. Для пограничного слоя $\varepsilon := (Pr_D Re)^{-1} \approx \approx 0.03$. Соответствующий выбор пространственного масштаба приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\Delta u - \mathbf{A}(x,t)\nabla u + \frac{f(u,x,t)}{\varepsilon}, \tag{2}$$

где штрихи опущены в целях удобства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть в пограничном слое скорость переноса по горизонтали много меньше скорости переноса по вертикали. С целью получения информации о вертикальной стратификации примеси с учетом суточной или сезонной изменчивости рассматривается периодическая задача для одномерного уравнения (2)

$$\begin{gathered}
\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \varepsilon A(z,t)\frac{\partial u}{\partial z} - B(u,t),\\
z_0 < z < 1,\ -\infty < t < \infty,\\
u|_{z=z_0} = u_1(t), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1} = 0,\\
u(z,t) = u(z,t+T),\ -\infty < t < \infty,
\end{gathered} \tag{3}$$

в рамках следующих предположений:

(У1) *функции $A(z,t)$, $B(u,t)$, $u_1(t)$ достаточно гладкие и периодические по переменной t с периодом T;*

(У2) *вырожденное уравнение $B(u,t) = 0$ имеет T-периодическое решение $u = \varphi(t)$ такое, что $B_u(\varphi(t),t) > 0$, причем $u_1(t) > \varphi(t)$ при $t \in \in (-\infty,+\infty)$.*

Здесь $B(u,t) := -f(u,t)$; требуемый порядок гладкости коэффициентов устанавливается в процессе построения асимптотики.

Далее будем исследовать решение погранслойного типа задачи (3), которое близко к решению $u = \varphi(t)$ вырожденного уравнения внутри интервала $(z_0,1)$, а в точках $z = z_0$ и $z = 1$ удовлетворяет соответствующим граничным условиям.

2. ФОРМАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА

В соответствии с методом пограничных функций А. Б. Васильевой [12] асимптотику решения погранслойного типа ищем в виде:

$$\begin{aligned}
u(z,t,\varepsilon) = \bar{u}(z,t,\varepsilon) + \Pi^{(+)}u(\rho_{(+)},t,\varepsilon)+\\
+\Pi^{(-)}u(\rho_{(-)},t,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\bar{u}(z,t,\varepsilon) = \varphi(t) + \varepsilon\bar{u}_1(z,t) + \ldots$ — регулярное разложение, $\Pi^{(\pm)}u(\rho_{(\pm)},t,\varepsilon) = \Pi_0^{(\pm)}u(\rho_{(\pm)},t) + +\varepsilon\Pi_1^{(\pm)}u(\rho_{(\pm)},t) + \ldots$ — погранслойные разложения, описывающие пограничные слои в окрестности точек $z = z_0$ и $z = 1$, $\rho_{(+)} = \dfrac{z-1}{\varepsilon}$, $\rho_{(-)} = \dfrac{z-z_0}{\varepsilon}$. Подставляя разложение (4) в задачу (3), с использованием методов [12, 13] получаем задачи для определения коэффициентов.

В окрестности граничной точки $z = 1$ в нулевом приближении решение описывается нелинейной задачей

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\Pi_0^{(+)}u}{\partial\rho_{(+)}^2} - A(1,t)\frac{\partial\Pi_0^{(+)}u}{\partial\rho_{(+)}} = B(\varphi(t) + \Pi_0^{(+)}u, t),\\
\frac{\partial\Pi_0^{(+)}u}{\partial\rho_{(+)}}(0,t) = 0, \quad \Pi_0^{(+)}u(-\infty,t) = 0
\end{gathered} \tag{5}$$

с решением $\Pi_0^{(+)}u(\rho_{(+)},t) \equiv 0$.

Аналогично в окрестности граничной точки $z = z_0$ в нулевом приближении решение описывается задачей

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\Pi_0^{(-)}u}{\partial\rho_{(-)}^2} - A(z_0,t)\frac{\partial\Pi_0^{(-)}u}{\partial\rho_{(-)}} = B(\varphi(t) + \Pi_0^{(-)}u, t),\\
\Pi_0^{(-)}u(0,t) + \varphi(t) = u_1(t), \quad \Pi_0^{(-)}u(\infty,t) = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Краевой задаче (6) соответствует следующая краевая задача для присоединенной системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{z}^{(-)}}{\partial\rho_{(-)}} = A(z_0,t)\tilde{z}^{(-)} + B(\tilde{u}^{(-)},t),\\
&\frac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\rho_{(-)}} = \tilde{z}^{(-)},\\
&\tilde{u}^{(-)}(0,t) = u_1(t), \quad \tilde{u}^{(-)}(\infty,t) = \varphi(t),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\tilde{u}^{(-)}(\rho_{(-)},t) = \varphi(t) + \Pi_0^{(-)}u(\rho_{(-)},t)$.

Разрешимость задачи (7) обеспечивается принадлежностью граничного условия $\tilde{u}^{(-)}(0,t) = u_1(t)$ области влияния точки покоя $(\varphi(t),0)$ при любом t:

(У3) *прямая $\tilde{u}^{(-)} = u_1(t)$ на плоскости $(\tilde{u}^{(-)},\tilde{z}^{(-)})$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $(\varphi(t),0)$ при $\rho_{(-)} \to +\infty$.*

Справедлива следующая

Лемма. *При фиксированном $t \in (-\infty,\infty)$ функции $\Pi_0^{(-)}u(\rho_{(-)},t)$ и $\tilde{z}^{(-)}$ удовлетворяют неравенствам:*

$$\begin{aligned}
C\exp[(\lambda_2(t) - \sigma(t))\rho_{(-)}] \leqslant |\Pi_0^{(-)}u(\rho_{(-)},t)| \leqslant\\
\leqslant C\exp[(\lambda_2(t) + \sigma(t))\rho_{(-)}],
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
C\exp[(\lambda_2 - \sigma)\rho_{(-)}] \leqslant |\tilde{z}^{(-)}(\rho_{(-)},t)| \leqslant\\
\leqslant C\exp[(\lambda_2 + \sigma)\rho_{(-)}],
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda_2(t)$ — отрицательное собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} A(z_0,t) & B_u(\varphi(t),t)\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{10}$$

функция $\sigma(t) > 0$ — *достаточно малая,* $0 < \rho_{(-)} < -\infty$, $C > 0$.

Не зависящие от ε положительные постоянные величины, значения которых не являются существенными, здесь и далее обозначаются символом C.

Для доказательства леммы в окрестности точки покоя $(\varphi(t), 0)$ воспользуемся представлением

$$\tilde{z}^{(-)}(\tilde{u}^{(-)}) = \tilde{z}^{(-)}(\varphi(t)) + \\ + \frac{\partial \tilde{z}^{(-)}}{\partial \tilde{u}^{(-)}} \Big|_{\tilde{u}^{(-)}=\varphi(t)} (\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)) + o(\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)) = \\ = \frac{\partial \tilde{z}^{(-)}}{\partial \tilde{u}^{(-)}} \Big|_{\tilde{u}^{(-)}=\varphi(t)} (\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)) + o(\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)).$$

Дифференцируя уравнение фазовых траекторий, которое получается из системы (7) путем деления первого уравнения на второе и полагая $\tilde{u}^{(-)} = \varphi(t)$, $\tilde{z}^{(-)} = 0$, находим, что производная $\dfrac{\partial \tilde{z}^{(-)}}{\partial \tilde{u}^{(-)}}$ при $\tilde{u}^{(-)} = \varphi(t)$, $\tilde{z}^{(-)} = 0$, может принимать два значения, совпадающих с собственными значениями матрицы (10). Поскольку $u_1(t) - \varphi(t) > 0$, то касательная прямая в точке $(\varphi(t), 0)$ к сепаратрисе, входящей в седло $(\varphi(t), 0)$ при $\rho_{(-)} \to \infty$, имеет угловой коэффициент $\lambda_2(t) < 0$. Поэтому

$$\tilde{z}^{(-)}(\tilde{u}^{(-)}) = \lambda_2(t)(\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)) + o(\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)).$$

Значит, при достаточно больших $\rho_{(-)} > \bar{\rho}$, то есть при малых значениях $|\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)|$, найдутся функции $\chi_1(t) < 0$ и $\chi_2(t) < 0$ такие, что

$$\chi_1(t)|\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)| \leqslant \tilde{z}^{(-)}(\tilde{u}^{(-)}) \leqslant \chi_2(t)|\tilde{u}^{(-)} - \varphi(t)|,$$

$\chi_1(t) = \lambda_2(t) - \sigma(t)$, $\chi_2(t) = \lambda_2(t) + \sigma(t)$, $\sigma(t) > 0$ — достаточно малая функция.

Интегрируя неравенство

$$\chi_1(t)\Pi_0^{(-)}u \leqslant \frac{\partial \Pi_0^{(-)}u}{\partial \rho_{(-)}} \leqslant \chi_2(t)\Pi_0^{(-)}u \tag{11}$$

по $\rho_{(-)}$ в пределах от $\bar{\rho}$ до $\rho_{(-)}$, получаем оценку (8). Если учесть (8), то из неравенства (11) следует оценка (9).

Коэффициенты регулярного разложения определяются как решения конечных уравнений:

$$\bar{u}_1(t) = -\frac{\varphi_t(t)}{B_u(\varphi(t), t)}, \\ \ldots \\ \bar{u}_n(t) = -\frac{g_n(t)}{B_u(\varphi(t), t)},$$

где $g_n(t)$ — известные функции.

В следующих приближениях приходим к линейным задачам. Например, для определения функций $\Pi_n^{(+)}u(\rho_+, t)$, $n \geqslant 1$, получаем задачи

$$\frac{\partial^2 \Pi_n^{(+)}u}{\partial \rho_{(+)}^2} - A(1,t)\frac{\partial \Pi_n^{(+)}u}{\partial \rho_{(+)}} - B_u(\varphi(t), t)\Pi_n^{(+)}u = 0, \\ \frac{\partial \Pi_n^{(+)}u}{\partial \rho_{(+)}}(0,t) = 0, \quad \Pi_n^{(+)}u(-\infty, t) = 0. \tag{12}$$

Отсюда $\Pi_n u^{(+)} \equiv 0$.

Функции $\Pi_n^{(-)}u(\rho_{(-)}, t)$ определяются как решения линейных задач следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \Pi_n^{(-)}u}{\partial \rho_{(-)}^2} - A(z_0, t)\frac{\partial \Pi_n^{(-)}u}{\partial \rho_{(-)}} - \\ - B_u(\tilde{u}^{(-)}, t)\Pi_n^{(-)}u = g_n^{(-)}(\rho_{(-)}, t), \\ \Pi_n^{(-)}u(0,t) = -\bar{u}_n(t), \quad \Pi_n^{(-)}u(\infty, t) = 0. \tag{13}$$

В частности,

$$g_1^{(-)}(\rho_{(-)}, t) = (B_u(\tilde{u}^{(-)}, t) - B_u(\varphi(t), t))\bar{u}_1(t) + \\ + \frac{\partial A}{\partial z}(z_0, t)\frac{\partial \Pi_0^{(-)}u}{\partial \rho_{(-)}}\rho_{(-)} + \frac{\partial \Pi_0^{(-)}u}{\partial t}.$$

Решения задач (13) выписываются в явном виде по аналогии с работой [14]:

$$\Pi_n^{(-)}u(\rho_{(-)}, t) = \\ = -\frac{u_n(t)}{\tilde{z}^{(-)}(0,t)}\tilde{z}^{(-)}(\rho_{(-)}, t) - \tilde{z}^{(-)}(\rho_{(-)}, t) \times \\ \times \int\limits_0^{\rho_{(-)}} \frac{\exp(A(z_0,t)\tau)d\tau}{\tilde{z}^{(-)2}(\tau, t)} \times \\ \times \int\limits_\tau^\infty \tilde{z}^{(-)}(s,t)\exp(-A(z_0,t)s)g_n^{(-)}(s,t)ds. \tag{14}$$

Поскольку при фиксированном $t \in (-\infty, \infty)$ имеют место неравенства

$$|g_n^{(-)}(\rho_{(-)}, t)| \leqslant C_n \exp(-\chi_n(t)\rho_{(-)}), \\ \chi_n(t) > 0, \ C_n > 0,$$

то, используя формулы (14), с учетом леммы получаем оценки:

$$|\Pi_n^{(-)}u(\rho_{(-)}, t)| \leqslant \bar{C}_n \exp(-\tilde{\chi}_n(t)\rho_{(-)}), \\ \tilde{\chi}_n(t) > 0, \ \bar{C}_n > 0, \ n \geqslant 1.$$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПОГРАНСЛОЙНОГО ТИПА

Доказательство существования решений задачи (3) с асимптотикой (4) базируется на идеях асимптотического метода дифференциальных неравенств (см., например, [1]), основанного на использовании теорем сравнения [15, 16].

Функции $\alpha(z,t,\varepsilon)$, $\beta(z,t,\varepsilon) \in C^2(z_0,1) \times \times C^1(-\infty,+\infty) \cap C^1[z_0,1] \times C(-\infty,+\infty)$ называются соответственно нижним и верхним решениями задачи (3), если они удовлетворяют следующим неравенствам:

$$L_\varepsilon[\alpha] := \varepsilon^2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} - \varepsilon A(z,t)\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \varepsilon\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \\ - B(\alpha, t) \geqslant 0, \quad z \in (z_0, 1), \ t \in (-\infty, \infty), \tag{15}$$

$$L_\varepsilon(\beta) \leqslant 0,\ z \in (z_0, 1),\ t \in (-\infty, \infty), \tag{16}$$

$$\alpha(z,t,\varepsilon) \leqslant \beta(z,t,\varepsilon),\ z \in [z_0, 1],\ t \in (-\infty, \infty), \tag{17}$$

$$\alpha(z_0,t,\varepsilon) \leqslant u^1(t) \leqslant \beta(z_0,t,\varepsilon),\ t \in (-\infty, \infty), \tag{18}$$

$$\alpha_z(1,t,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \beta_z(1,t,\varepsilon),\ t \in (-\infty, \infty). \tag{19}$$

В качестве $\alpha(z,t,\varepsilon)$ и $\beta(z,t,\varepsilon)$ выберем следующие функции:

$$\beta(z,t,\varepsilon) = \varepsilon\gamma + \varphi(t) - \varepsilon\frac{\varphi'(t)}{B_u(\varphi(t),t)} +$$
$$+ \Pi_0^{(-)}u(\rho_{(-)},t) + \varepsilon\Pi_1^{(-)}u(\rho_{(-)},t) + \varepsilon\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_\beta(\rho_{(-)},t),$$

$$\alpha(z,t,\varepsilon) = -\varepsilon\gamma + \varphi(t) - \varepsilon\frac{\varphi'(t)}{B_u(\varphi(t),t)} +$$
$$+ \Pi_0^{(-)}u(\rho_{(-)},t) + \varepsilon\Pi_1^{(-)}u(\rho_{(-)},t) + \varepsilon\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_\alpha(\rho_{(-)},t),$$

где $\gamma > 0$, а функции $\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_{\alpha,\beta}$ определяются как решения следующих задач:

$$\frac{\partial^2\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_{\alpha,\beta}}{\partial\rho_{(-)}^2} - A(z_0,t)\frac{\partial\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_{\alpha,\beta}}{\partial\rho_{(-)}} -$$
$$- B_u(\tilde{u}^{(-)},t)\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_{\alpha,\beta} =$$
$$= \mp\gamma(B_u(\tilde{u}^{(-)},t) - B_u(\varphi(t),t)) \pm \Psi(\rho_{(-)},t),$$

$$\tilde{\Pi}_1^{(-)}u_{\alpha,\beta}(0,t) = 0, \quad \tilde{\Pi}_1^{(-)}u_{\alpha,\beta}(\infty,t) = 0.$$

Здесь функция $\Psi(\rho_{(-)},t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} 0 < \Psi(\rho_{(-)},t) \leqslant C_\psi(t)\exp(-\bar{\sigma}(t)\rho_{(-)}), \\ C_\psi(t) > 0,\ t \in (-\infty, +\infty),\ \bar{\sigma}(t) > 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Докажем выполнение дифференциальных неравенств (15)–(19). Рассмотрим разность

$$\beta(z,t,\varepsilon) - \alpha(z,t,\varepsilon) = 2\varepsilon\gamma + \varepsilon V(\rho_{(-)},t),$$

где функция $V(\rho_{(-)},t) = \tilde{\Pi}_1 u_\beta(\rho_{(-)},t) - \tilde{\Pi}_1 u_\alpha(\rho_{(-)},t)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho_{(-)}^2} - A(z_0,t)\frac{\partial V}{\partial\rho_{(-)}} - B_u(\tilde{u}^{(-)},t)V = \\ = -2\Psi(\rho_{(-)},t) + 2\gamma(B_u(\tilde{u}^{(-)},t) - B_u(\varphi(t),t)), \\ V(0,t) = 0, \quad V(\infty,t) = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Решение задачи (21) выписывается в явном виде по аналогии с формулой (14):

$$V(\rho_{(-)},t) = -2\tilde{z}^{(-)}(\rho_{(-)},t)\int\limits_0^{\rho_{(-)}}\frac{\exp(A(z_0,t)\tau)d\tau}{\tilde{z}^{(-)2}(\tau,t)} \times$$
$$\times \int\limits_\tau^\infty \tilde{z}^{(-)}(s,t)\exp(-A(z_0,t)s) \times$$
$$\times \Big[\gamma(B_u(\tilde{u}^{(-)},t) - B_u(\varphi(t),t)) - \Psi(s,t)\Big]\,ds. \tag{22}$$

Поскольку $\tilde{z}^{(-)}(\rho_{(-)},t) = \dfrac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\rho_{(-)}} < 0$, то, выбирая параметры C_ψ и $\bar{\sigma}$ в неравенствах (20) таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках в интеграле (22) оказалось отрицательным, получаем

$$V(\rho_{(-)},t) > 0 \text{ при } t \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно,

$$\beta(z,t,\varepsilon) - \alpha(z,t,\varepsilon) \geqslant 0,\ z \in [z_0, 1],\ t \in (-\infty, \infty).$$

Далее находим, что

$$L_\varepsilon[\beta] = -\varepsilon\gamma B_u(\varphi(t),t) - \varepsilon\Psi(\rho_{(-)},t) + O(\varepsilon) < 0.$$

Выполнение этого неравенства обеспечивается условием (У2), выбором γ и $\Psi(\rho_{(-)},t)$.

В граничных точках функция $\beta(z,t,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$\beta_z(1,t,\varepsilon) = 0,\ \beta(z_0,t,\varepsilon) = \varepsilon\gamma + u^1(t) \geqslant u^1(t).$$

Аналогично проверяется выполнение дифференциальных неравенств в случае нижнего решения. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (У1)–(У3). *Тогда существует* T*-периодическое классическое решение* $u(z,t,\varepsilon)$ *задачи* (3) *такое, что*

$$|u(z,t,\varepsilon) - U_0(z,t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon,\ z \in [z_0, 1],\ t \in (-\infty, +\infty),$$

где $U_0(z,t,\varepsilon) = \varphi(t) + \Pi_0^{(-)}u(\rho_{(-)},t)$ *— частичная сумма нулевого порядка асимптотического ряда* (4)*, постоянная* C *не зависит от* ε.

Оценку остаточного члена легко получить, если воспользоваться неравенством треугольника:

$$|u(z,t,\varepsilon) - U_0(z,t,\varepsilon)| \leqslant |u(z,t,\varepsilon) - \beta(z,t,\varepsilon) +$$
$$+ \beta(z,t,\varepsilon) - U_0(z,t,\varepsilon)| \leqslant |u(z,t,\varepsilon) - \beta(z,t,\varepsilon)| +$$
$$+ |\beta(z,t,\varepsilon) - U_0(z,t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon.$$

Замечание. С целью уточнения результата следует модифицировать асимптотику $(n+1)$-го порядка

$$|u - U_n| \leqslant C\varepsilon^{n+1}.$$

Заметим, что периодическое решение задачи (3) с асимптотикой (4) можно рассматривать как решение соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном интервале времени:

$$\begin{gathered} \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \varepsilon A(z,t)\frac{\partial v}{\partial z} - \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} - B(v,t) = 0, \\ z_0 < z < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ v|_{z=z_0} = u_1(t), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=1} = 0,\ 0 \leqslant t < \infty, \\ v|_{t=0} = v^0(z,\varepsilon), \quad z_0 \leqslant z \leqslant 1, \end{gathered} \tag{23}$$

где $v^0(z_0,\varepsilon) = u_1(0)$, $\left.\dfrac{\partial v_0}{\partial z}\right|_{z=1} = 0$.

Если $v^0(z,\varepsilon) = u(z,0,\varepsilon)$, где $u(z,t,\varepsilon)$ — решение периодической задачи (3) с асимптотикой (4), то задача (23) имеет решение $v(z,t,\varepsilon) = u(z,t,\varepsilon)$. Исследование его на наличие асимптотической устойчивости по Ляпунову основано на использовании

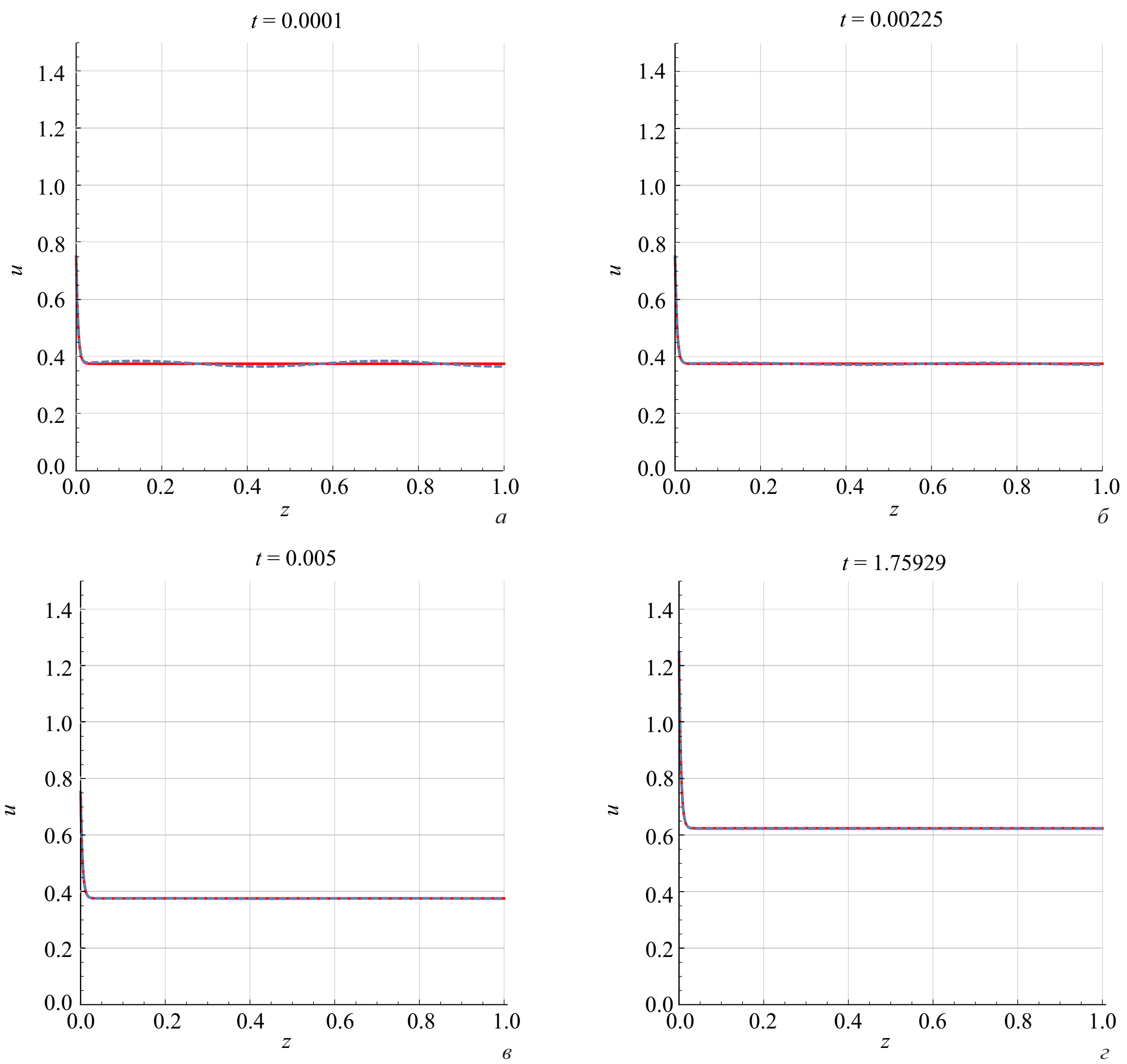

Рис. 1. Стабилизация решения нестационарной задачи (25) к периодическому решению погранслойного типа

асимптотического метода дифференциальных неравенств [1] и теорем сравнения [16].

Верхнее и нижнее решения задачи (23) выберем в виде:

$$\bar{\alpha}(z,t,\varepsilon) = u(z,t,\varepsilon) + \\ + \exp(-\lambda(\varepsilon)t)(\alpha(z,t,\varepsilon) - u(z,t,\varepsilon)),$$

$$\bar{\beta}(z,t,\varepsilon) = u(z,t,\varepsilon) + \\ + \exp(-\lambda(\varepsilon)t)(\beta(z,t,\varepsilon) - u(z,t,\varepsilon)),$$

где $\lambda(\varepsilon) > 0$ определим ниже.

Очевидно, что $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ удовлетворяют соответствующим неравенствам в граничных точках:

$$\bar{\alpha}(z_0,t,\varepsilon) \leqslant u_1(t) \leqslant \bar{\beta}(z_0,t,\varepsilon), \ \ 0 \leqslant t < \infty;$$

$$\bar{\alpha}_z(1,t,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \bar{\beta}_z(1,t,\varepsilon), \ \ 0 \leqslant t < \infty;$$

$$\bar{\alpha}(z,0,\varepsilon) \leqslant v^0(z) \leqslant \bar{\beta}(z,0,\varepsilon), \ \ z \in [z_0, H_0],$$

и $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. Докажем, что $L_\varepsilon[\bar{\alpha}] > 0$, $L_\varepsilon[\bar{\beta}] < 0$. Например,

$$L_\varepsilon[\bar{\beta}] = \exp(-\lambda t)\Bigg\{\Bigg[\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} - \varepsilon A(z,t)\frac{\partial\beta}{\partial z} - \\ - \varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial t} - B(\beta,t)\Bigg] + \Bigg[B(\beta,t) - B(u,t) - \\ - B_u(u+\theta\exp(-\lambda t)(\beta-u),t)(\beta-u)\Bigg] + \varepsilon\lambda(\beta-u)\Bigg\},$$

где $0 < \theta < 1$. Поскольку $(\beta - u) = O(\varepsilon)$, то, полагая $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$, а γ достаточно большим, имеем, что $L_\varepsilon[\bar{\beta}] < 0$, Аналогично проверяется неравенство $L_\varepsilon[\bar{\alpha}] > 0$. Итак, справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий* (У1)–(У3) *классическое T-периодическое решение $u(z,t,\varepsilon)$ задачи* (3) *с асимптотикой* (4) *как решение задачи* (23) *асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью притяжения:*

$$v^0(z) \in [\alpha(z,0,\varepsilon), \beta(z,0,\varepsilon)], \ \ z \in [z_0, 1]. \quad (24)$$

В заключение этого параграфа отметим другие результаты [17–19], связанные с исследованиями периодических решений с пограничными и внутренними слоями в задачах реакция—диффузия—адвекция и их приложений.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим пример, моделирующий распределение концентрации в случае линейного стока вещества:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \varepsilon A(z,t)\frac{\partial u}{\partial z} - \varkappa(u-\varphi(t)),\\
&\qquad\qquad\qquad z\in(0,1),\ t\in(0,T],\\
&u(0,t)=u^1(t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1}=0,\ t\in[0,T],\\
&u(z,0)=\omega(z,0),\ z\in[0,1],
\end{aligned}\tag{25}$$

где $A(z,t) = 2z(1.5+\sin t)$, $\varphi(t) = 0.25(1.5+\sin t)$, $u^1(t) = 0.5(1.5+\sin t)$, $\omega(z,t) = \varphi(t)+(u^1(t)-\varphi(t))\times$ $\times\exp\left(\frac{1}{2}\left(A(0,t)-\sqrt{A(0,t)^2+4\varkappa}\right)\frac{z}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\sin\left(\frac{7\pi}{2}z\right)$. Заметим, что начальное условие $u(z,0)$ принадлежит области притяжения (24) устойчивого периодического решения.

Для численного решения задачи (25) используется комплексная схема Розенброка [20]. На рис. 1 преставлен процесс стабилизации решения нестационарной задачи (25) к асимптотическому решению нулевого порядка периодической задачи

$$\begin{aligned}
U_0(z,t,\varepsilon) &= \varphi(t)+(u^1(t)-\varphi(t))\times\\
&\times\exp\left(\frac{z(A(0,t)-\sqrt{A(0,t)^2+4\varkappa})}{2\varepsilon}\right),
\end{aligned}\tag{26}$$

отображенного на графике красной линией. Пунктиром синего цвета отмечен результат численного счета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-29-10080).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нефедов Н. Н.* // Дифф. уравн. 1995. **31**, № 4. С. 719.
2. *Нефедов Н. Н.* // Дифф. уравн. 2000. **36**, № 2. С. 262.
3. *Нефедов Н. Н., Давыдова М. А.* // Дифф. уравн. 2010. **46**, № 9. С. 1300.
4. *Васильева А. Б., Давыдова М. А.* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1998. **38**, № 6. С. 938.
5. *Nefedov N. N., Nikulin E. I.* // Rus. J. of Math. Phys. 2015. **22**, N 2. P. 215.
6. *Нефедов Н. Н., Никулин Е. И.* // Мод. и ан. инф. сист. 2018. **25**, № 1. С. 125.
7. *Nefedov N. N., Nikulin E. I., Recke L.* // Rus. J. of Math. Phys. 2019. **26**, N 1. P. 55.
8. *Elansky N. F., Lavrova O. V., Skorokhod A. I., Belikov I. B.* // Atm. Env. 2016. **143**. P. 108.
9. *Gurjar B. R., Butler T. M., Lawrence M. G., Lelieveld J.* // Atm. Envr. 2008. **42**. P. 1593.
10. *Elansky N.* // Urban Climate. 2014. **8**. P. 42.
11. *Берлянд М. Е.* Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Гидрометеоиздат, 1985.
12. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
13. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2010. № 268. С. 268.
14. *Davydova M. A.*. // Math. Notes. **98**. P. 909.
15. *Amann H.* // Nonlin. Analysis. 1978. P. 1.
16. *Hess P.* // Pitman research notes in math. series. 1991. P. 62.
17. *Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R.* // Comp. Math. and Math. Phys. 2018. **58**, N 12. P. 1989.
18. *Волков В. Т., Лукьяненко Д. В., Нефедов Н. Н.* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2019. **59**, № 1. С. 50.
19. *Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Николаева О. А.* // Дифф. ур. 2019. (в печати)
20. *Калиткин Н. Н., Корякин П. В.* // Численные методы. Т. 2. М., 2013.

Periodic Solutions with Boundary Layers in the Problem of Modeling the Vertical Transfer of an Anthropogenic Impurity in the Troposphere

A. L. Nechaeva[a], M. A. Davydova[b]

Department of Math, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]nechaeva.al15@physics.msu.ru, [b]m.davydova@physics.msu.ru.

The periodic problem that arises in the mathematical modeling of the vertical transfer of an anthropogenic impurity in the lower troposphere is considered for the nonlinear diffusion transfer equation. The model problem in dimensionless variables is classified as a nonlinear singularly perturbed reaction—diffusion—advection problem, which is studied by the methods of asymptotic analysis. Using the method of boundary functions and the asymptotic method of differential inequalities based on the principle of comparison, an asymptotic problem solution of arbitrary-order accuracy is constructed with the further substantiation of constructions and the study of this solution for the Lyapunov asymptotic stability property. The results of this work are illustrated using an example that describes the concentration field of a linear substance sink.

Keywords: atmospheric diffusion problems, periodic reaction—diffusion—advection problems, nonlinear diffusion equation, anthropogenic air pollution, photochemical processes in the atmosphere.
PACS: 02.30.Jr, 02.30.Mv.
Received 01 August 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 6. Pp. 559–565.

Сведения об авторах

1. Нечаева Алиса Леонидовна — студент; email: nechaeva.al15@physics.msu.ru.
2. Давыдова Марина Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: m.davydova@physics.msu.ru.