Спаривание электронов в куперовской паре как притяжение противоположно направленных квантовых импульсов

А. Я. Брагинский[a]
Южный федеральный университет, Институт физики.
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, пр. Стачки, д. 194.

Поступила в редакцию 18.07.2019, после доработки 18.08.2019, принята к публикации 26.08.2019.

В работе исследуются уравнения состояния для компенсирующего поля взаимодействия — тензора дисторсии, полученные из трансляционной инвариантности лагранжиана. В данной модели волновой вектор или квантовый импульс частицы является зарядом взаимодействия для компенсирующего тензора дисторсии. В статье рассмотрен случай, когда квантовые импульсы частиц лежат на одной прямой. Показано, что противоположные квантовые импульсы притягиваются так же, как разноименные электрические заряды. Это объясняет притяжение электронов с противоположно-направленными квантовыми импульсами в куперовских парах в сверхпроводящем состоянии.

Ключевые слова: квантовый импульс, электрон-фононное взаимодействие, куперовская пара, удлиненная производная
УДК: 537.8, 538.9. PACS: 74.20.De, 74.20.Fg.

ВВЕДЕНИЕ

В теории БКШ [1] спаривание электронов в куперовской паре объясняется электрон-фононным взаимодействием. Под электрон-фононным взаимодействием понимается взаимодействие электронов с колебаниями решетки, в результате которых образуется виртуальный положительный заряд, который в итоге притягивает электроны с противоположно направленными квантовыми импульсами. То есть природное электрическое отталкивание электронов как одноименных зарядов объясняется электромагнитным притяжением электронов в результате образования виртуальных положительных зарядов в связи с колебаниями решетки. При этом колебания решетки также объясняются электромагнитным взаимодействием атомов в решетке. Очевидно, что в рамках электромагнитного взаимодействия нельзя обосновать притяжение электронов, которое назвали «спариванием».

С другой стороны, в работе [2] впервые были написаны силы и уравнения состояния, в которых импульс частицы p_i формально выступал в роли заряда взаимодействия, а 4-тензор дисторсии υ_i, A_{ij} — в качестве поля взаимодействия. Полученные уравнения состояния были аналогичны уравнениям Максвелла, а действующие силы были аналогичны силам Кулона и Лоренца.

В работе [3] из первых принципов современной физики — пространственной симметрии и минимума действия — было доказано, что волновой вектор $\kappa_i = p_i/\hbar$ частицы является зарядом взаимодействия в удлиненной производной для компенсирующего тензорного поля — тензора дисторсии A_{ij}.

В данной работе предложено обоснование спаривания электронов в куперовской паре притяжением противоположно направленных квантовых импульсов.

1. КВАНТОВЫЙ ИМПУЛЬС ЧАСТИЦЫ КАК ЗАРЯД ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В пионерской работе Кадич—Эделена [2] было высказано предположение, что импульс аналогичен электрическому заряду. В работе [4] был построен лагранжиан для 4-тензора дисторсии и получены уравнения состояния, где импульс выполняет роль заряда. При построении лагранжиана и действующих сил использовалась аналогия между континуальной теорией дислокаций и электродинамикой. Лагранжиан для 4-тензора дисторсии υ_i, A_{ij} в [4] имеет вид:

$$L = p_i \upsilon_i - \sigma_{ij} A_{ij} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{c^2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \rho_{ij}\rho_{ij}\right). \quad (1)$$

Варьируя $\dfrac{\delta L}{\partial \upsilon_i} = 0$ и $\dfrac{\delta L}{\partial A_{ij}} = 0$, получаем:

$$p_i = -\frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \gamma e_{jkp}\frac{\partial \rho_{ip}}{\partial x_k} - \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{pj} = -\partial \upsilon_p/\partial x_j + \partial A_{pj}/\partial t \quad (4)$$

— центрально-симметричная напряженность 4-тензора дисторсии, а

$$\rho_{pj} = -e_{jkn}\partial A_{pn}/\partial x_k \quad (5)$$

— вихревая напряженность тензора дисторсии. Здесь p_i — импульс, σ_{ij} — тензор напряжений, γ — размерный коэффициент, c — скорость звука.

Заметим, что выражения (1)–(5) здесь записаны для тензора дисторсии A_{ij}, определенного в [5], который отличается от тензора дисторсии Кадич—Эделена A'_{ij} [2, 4] знаком «минус»: $A_{ij} = -A'_{ij}$. Аналогично здесь определяется и поле скорости $\upsilon_i = -\upsilon'_i$. Тензор дисторсии A_{ij} является обобщением производных вектора смещения $\partial u_i/\partial x_j$, в соответствии с определением его в теории упругости [5]. Поле скорости υ_i — обобщение $\partial u_i/\partial t$ соответственно.

Таким образом, уравнения (2)–(5) инвариантны при градиентном преобразовании: $A_{ij} \to A_{ij} + \partial u_i/\partial x_j$, $\upsilon_i \to \upsilon_i + \partial u_i/\partial t$. Уравнения состояния (2)–(5) по построению аналогичны уравнениям состояния Максвелла для электромагнитного поля [6].

[a] E-mail: a.braginsky@mail.ru

С другой стороны, в [3] было построено минимальное взаимодействие в виде удлиненной производной для параметра порядка $\psi_{\mathbf{k}}$, или волновой функции, из требования трансляционной инвариантности лагранжиана и получены уравнения состояния (2)–(5), где импульс p_i и тензор напряжений σ_{ij} являются первыми интегралами и удовлетворяют уравнению непрерывности по теореме Э. Нетер [7].

Действительно, в [3] доказывается, что для локального представления подгруппы трансляций $\hat{a}_q\psi_{\mathbf{k}} = \exp(i\delta_{pq}k_pa_q)\psi_{\mathbf{k}}$, где $k_p = k_p(x_j)$, необходимо удлинить производную функции $\psi_{\mathbf{k}}(x_j)$ и ввести тензорное компенсирующее поле A_{pj}:

$$D_j\psi_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\sum_p \kappa_p A_{pj}\right)\psi_{\mathbf{k}}, \tag{6}$$

которое преобразуется следующим образом:

$$\hat{a}_q(\kappa_p A_{pj}) = \kappa_p A_{pj} + \delta_{pq}\partial(k_pa_q)/\partial x_j. \tag{7}$$

Это было сделано для построения трансляционно-инвариантного лагранжиана.

В [3] доказывается, что компенсирующим тензором взаимодействия A_{pj} в (6), (7) является тензор дисторсии A_{pj} [5]. Следовательно, коэффициент κ_p в удлиненной производной (6) является волновым вектором. Это означает, что зарядом взаимодействия (6), индуцированного подгруппой трансляций $\hat{a}_q$, является квантовый импульс $p_i = \hbar\kappa_i$.

Для построения лагранжиана L вводится дополнительная четвертая компонента тензора дисторсии υ_i — поле скорости [2–4], которая компенсирует временные производные параметра порядка или волновой функции $\psi_{\mathbf{k}}$:

$$D_0\psi_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\sum_n \kappa_n \upsilon_n\right)\psi_{\mathbf{k}} \tag{8}$$

$$\hat{a}_q(\kappa_i\upsilon_i) = \kappa_i\upsilon_i + \delta_{iq}\partial(k_ia_q)/\partial t. \tag{9}$$

При этом законом сохранения, индуцированным оператором трансляции $\hat{a}_q$, по теореме Э. Нетер является закон сохранения импульса в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial t}. \tag{10}$$

Вообще говоря, лагранжиан для полей $\psi_{\mathbf{k}}$, υ_i, A_{ij} можно разбить на две части: $L = L_{\text{int}} + L_f$. Где $L_{\text{int}} = L_{\text{int}}(\psi_{\mathbf{k}}, D_j\psi_{\mathbf{k}}, D_0\psi_{\mathbf{k}})$ — часть лагранжиана, учитывающая взаимодействие, в которой компенсирующие поля υ_i, A_{ij} содержатся только в удлиненных производных (6), (8), и $L_f = L_f(\varepsilon_{ij}, \rho_{ij})$ — часть лагранжиана, в которую входят только производные компенсирующих полей υ_i, A_{ij} в инвариантной форме (4), (5).

Тогда p_i и σ_{ij} имеют вид $p_i = \frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial \upsilon_i}$ и $\sigma_{ij} = -\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial A_{ij}}$ и являются инвариантными функциями или первыми интегралами полей $\psi_{\mathbf{k}}$, υ_i, A_{ij}. Инвариантный лагранжиан $L_f = L_f(\varepsilon_{ij}, \rho_{ij})$ имеет вид $L_f = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{c^2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \rho_{ij}\rho_{ij}\right)$ согласно (1) [4].

Таким образом, были получены уравнения состояния для 4-тензора дисторсии υ_i, A_{ij} (2)–(5), аналогичные уравнениям Максвелла. В [3] они были построены из первых принципов теории поля — трансляционной симметрии и минимума действия, без использования аналогии с электродинамикой.

Уравнения состояния (2)–(5) соответствуют ситуации, когда импульс p_i задает напряженности ε_{pj} и ρ_{pj} поля взаимодействия как источник поля в классической теории поля [6].

Безусловно, в (2), (3) импульс квантовый p_i. Случай, когда импульс имеет вид $p_i = \rho\upsilon_i$, рассмотрен в [3]. Он соответствует состоянию сплошной среды с плотностью ρ. При этом нарушается градиентная симметрия уравнений состояния (2)–(5), так как ненаблюдаемое компенсирующее поле взаимодействия υ_i (8), (9) становится пропорционально наблюдаемому импульсу p_i. В [3] показано, что сплошная среда является упругим состоянием, так как из условия $p_i = \rho\upsilon_i$ следует, что тензор напряжений σ_{ij} пропорционален тензору дисторсии A_{ij} в сплошной среде. При этом тензор дисторсии изначально был определен как обобщение тензора деформаций [5].

Отсюда следует, что сплошная среда является низкосимметричным состоянием 4-тензора дисторсии υ_i, A_{ij} так же, как сверхпроводящее состояние является низкосимметричным состоянием электромагнитного поля, в котором нарушается градиентная симметрия уравнений Максвелла. Как известно, в сверхпроводящем состоянии выполняются уравнения Лондонов [9], в которых электромагнитный потенциал пропорционален наблюдаемой плотности тока. При этом уравнения Лондонов описывают эффект Мейснера.

Надо понимать, что импульс p_i как был, так и остается импульсом, просто в сплошной среде он пропорционален сопряженному полю скорости: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_i}$ и $p_i = \rho\upsilon_i$. Поэтому, в принципе, можно не делать акцента на том, что рассматривается квантовый импульс, т. к. в сплошной среде меняется не импульс, а изменяется симметрия поля взаимодействия: υ_i, A_{ij} — пропадает его градиентная инвариантность (7), (9).

Обсуждение того, как принцип неопределенности Гейзенберга связан с фазовым переходом в низкосимметричное состояние для поля тензора дисторсии и как образуется сплошная среда, выходит за рамки данной работы. Цель данной работы — показать, как взаимодействуют между собой квантовые импульсы частиц, когда они лежат на одной прямой.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ, КВАНТОВЫЕ ИМПУЛЬСЫ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим одномерный случай, когда квантовые импульсы лежат на одной прямой OX_1, с началом координат в точке O. Тогда 12 уравнений состояния (2), (3) превращаются в четыре уравнения:

$$p_1 = -\frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial\varepsilon_{1j}}{\partial X_j}, \quad \sigma_{1j} = \gamma e_{jkp}\frac{\partial\rho_{1p}}{\partial X_k} - \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial\varepsilon_{1j}}{\partial T}. \tag{11}$$

Уравнения (11) по форме аналогичны четырем уравнениям Максвелла [6]. Как известно, уравнения

Максвелла описывают взаимодействие электрически заряженных частиц со знаками «плюс» и «минус».

Определим сигнатуру зарядов для квантового импульса. Положительными зарядами будем считать квантовые импульсы, направленные вдоль оси OX_1, тогда отрицательными зарядами будут импульсы, направленные против оси OX_1. Из того, что уравнения (11) имеют такой же вид, как и уравнения Максвелла, следует, что противоположно направленные квантовые импульсы притягиваются, а сонаправленные квантовые импульсы отталкиваются. Используя уравнения состояния (11) и напряженности (4), (5), можно повторить соответствующие рассуждения и вычисления, проделанные в электродинамике [6], и убедиться в этом.

Притяжение квантовых импульсов наблюдается в сверхпроводящем состоянии. Из электродинамики известно, что электроны, как одинаковые заряды, отталкиваются. Однако в сверхпроводящем состоянии наблюдается спаривание электронов, так как сверхпроводящими квазичастицами являются куперовские пары электронов [1]. При этом спариваются не любые электроны, а электроны с равными и противоположно направленными квантовыми импульсами. Это означает, что противоположно-направленные квантовые импульсы притягиваются, что и требовалось доказать.

Учтем взаимодействие (6) в потенциале Гинзбурга—Ландау [10] для электронов, импульсы которых лежат на одной прямой. Тогда удлиненная производная в такой модели будет иметь вид

$$D_j\psi_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial X_j} - i\kappa_1 A_{1j} - i\frac{e}{\hbar c'}A_j\right)\psi_{\mathbf{k}}, \qquad (12)$$

где c' — скорость света, e — заряд электрона, A_j — электромагнитный потенциал.

Как известно, в пионерской работе Гинзбурга—Ландау [10] был записан коэффициент в удлиненной производной перед электромагнитным потенциалом такой же, как и в (12). Однако затем Горьков в своей работе [11] обосновал и доказал, что для спаренных электронов в куперовских парах необходимо учитывать коэффициент 2, чтобы получить правильное выражение для плотности тока и фундаментальной физической константы — кванта магнитного потока.

Можно проверить и убедиться, что из выражения (12) следует корректное выражение для плотности тока и фундаментальной константы — кванта магнитного потока, без удвоения заряда электрона в удлиненной производной. Это следует из того, что параметр порядка в данной модели имеет как минимум две компоненты $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\psi_{-\mathbf{k}}$, фазы которых в общем случае не совпадают. Данные вычисления приводятся в работе [12].

Это означает, что в (12) $\psi_{\mathbf{k}}$ — волновая функция электрона, в отличие от модели Горькова и Гинзбурга—Ландау [10, 11], где исследовалась волновая функция квазичастицы, состоящей из спаренных электронов.

Электрон-фононное взаимодействие, введенное в БКШ [1], и удлиненная производная (12) содержит в себе явное указание на то, что тензор дисторсии A_{1j} описывает звук. Действительно, в работе [13] удалось показать, что волны тензора дисторсии в сплошной среде имеют точные волновые решения для звукового давления. Поэтому можно оставить общепринятую формулировку для тензорного взаимодействия (6), (11) и назвать его электрон-фононным взаимодействием с оговоркой, что оно не имеет никакого отношения к электромагнитному взаимодействию и образованию виртуальных положительных электрических зарядов.

Как известно, заряд задает взаимодействие. Компенсирующие поля действуют на заряды с помощью инвариантных напряженностей, источниками которых являются сами заряды (2)–(5). Следовательно, величина взаимодействия задается коэффициентами в удлиненной производной (12). Чем больше коэффициент, тем сильнее взаимодействие.

Вообще говоря, взаимодействие задается квадратом заряда, но так как для куперовской электронной пары заряды одинаковые, то достаточно просто сравнить заряды. Так как уравнения состояния для зарядов подобны, то в данном случае достаточно просто сравнить коэффициенты в удлиненной производной (12), полагая, что компенсирующие поля равны единице.

Тогда электромагнитное взаимодействие дает вклад в удлиненную производную порядка 10^6 м$^{-1}$. Так как тензор дисторсии A_{ij} безразмерный, то волновой вектор κ_i должен быть больше, чем 10^6 м$^{-1}$, чтобы притяжение противоположно-направленных квантовых импульсов было сильнее электрического отталкивания электронов. Очевидно, что такая ситуация возникает при длине когерентности куперовской пары меньше микрометра, что хорошо согласуется с экспериментом [14].

Минимальное взаимодействие (6), задаваемое волновым вектором, или квантовым импульсом, принципиально отличается от электромагнитного взаимодействия тем, что квантовый импульс как заряд взаимодействия электрона (11) может меняться, в отличие от его электрического заряда. Поэтому обязательно возникает такой момент или такая длина волны у электрона, при которой электроны с противоположно направленными импульсами будут притягиваться сильнее, чем отталкиваться в результате электромагнитного взаимодействия. Это явление действительно наблюдается в сверхпроводящем состоянии в виде куперовских пар электронов.

Более подробное исследование взаимодействия, задаваемого тензором дисторсии (6), (8), выходит за рамки данной статьи. Но уже сейчас из удлиненной производной (12) видна конкуренция двух взаимодействий, задаваемых компенсирующими полями — тензором дисторсии и электромагнитным потенциалом. Скорее всего, данная конкуренция взаимодействий, равно как и само взаимодействие (6), (8), проявляется не только для электронов и не только в куперовских парах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для квантовых импульсов частиц, лежащих на одной прямой, уравнения состояния имеют вид (11) и по своей структуре полностью эквивалентны уравнениям Максвелла, откуда следует, что противоположно направленные квантовые импульсы частиц притягиваются как разноименные заряды, что хорошо известно из электродинамики.

Конкуренция двух взаимодействий в (12) — электромагнитного и задаваемого квантовым импульсом, с тензорным компенсирующим полем взаимодействия (6), объясняет куперовское спаривание электронов. Так как квантовый импульс обратно пропорционален длине волны, то обязательно существует такая длина когерентности для двух электронов, когда притяжение противоположно направленных квантовых импульсов будет сильнее их электрического отталкивания.

Тензорное компенсирующее поле взаимодействия (6) представляет собой тензор дисторсии [3], волны которого в сплошной среде описывают звук [13]. Поэтому термин электрон-фононное взаимодействие для тензорного взаимодействия (6) в (12) можно сохранить. При этом надо понимать, что данное взаимодействие не имеет никакого отношения к электромагнитному взаимодействию и к образованию виртуальных положительных зарядов в сверхпроводнике.

Для обычных сверхпроводников длина когерентности спаренных электронов порядка микрометра, это следует из сравнения коэффициентов, характеризующих взаимодействия в удлиненной производной (12).

Для соединений ВТСП длина когерентности куперовской пары имеет порядок нанометра [14]. Скорее всего, это объясняет высокую температуру для состояний ВТСП. Электрическое отталкивание электронов не зависит от длины волны куперовской пары, при этом противоположные квантовые импульсы как заряды сильнее притягиваются при меньшей длине когерентности. Поэтому такие состояния разрушаются при более высокой температуре. Чем меньше длина когерентности куперовской пары, тем выше критическая температура сверхпроводящего фазового перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* // Phys. Rev. 1957. **108**. P. 1175.
2. *Kadic A., Edelen D. G. A.* // Lecture Notes in Physics. Heidelberg: Springer. 1983. **174**. P. 168.
3. *Braginsky A. Ya.* // JAMP. 2019. **7** (4). P. 809.
4. *Lazar M.* // Math. Mech. Solids. 2011. **16**. P. 253.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 1987.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 1988.
7. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
8. *Абрикосов А. А.* // ЖЭТФ. 1957. **32**. С. 1442.
9. *London F.* Superfluids. V. 1. New York.: Wiley. 1950.
10. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1950. **20**. С. 1064.
11. *Горьков Л. П.* // ЖЭТФ. 1959. **36**. С. 1918.
12. *Braginsky A. Ya.* Compensating fields in the Landau local theory and phenomenological description of the electron-phonon interaction // arXiv: 1209.0214.
13. *Брагинский А. Я.* Точное решение уравнений состояния для звука в виде «массивной» волны. Обоснование диаграммы Флэтчера-Мэнсона // https://www.researchgate.net/publication/332411248 (на рецензии).
14. *Гинзбург В. Л.* // УФН. 1991. **161**, № 4. С. 1.

Electron Pairing in a Cooper Pair as Attraction of Oppositely Directed Quantum Momenta

A. Ya. Braginsky

Southern Federal University, Institute of Physics. Rostov-on-Don 344090, Russia.
E-mail: a.braginsky@mail.ru.

This work is aimed at studying the equations of state for a compensating interaction field, that is, a distortion tensor, obtained from translation invariance of the Lagrangian. In this model, the wave vector or the quantum momentum of a particle is the interaction charge for the compensating distortion tensor. Particular attention is paid to the quantum momenta of a particle that lies on the same straight line. It is shown that opposite quantum momenta are also attracted as unlike electric charges, which explains the attraction of electrons with oppositely directed quantum momenta in superconducting pairs.

Keywords: quantum momentum, electron—phonon, interaction Cooper pair, expanded derivative.
PACS: 74.20.De, 74.20.Fg.
Received 18 July 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 6. Pp. 566–569.

Сведения об авторе

Брагинский Александр Яковлевич — доктор физ.-мат.наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: a.braginsky@mail.ru.