Метод гомотопии для расчета собственных волн цилиндрического волновода с импедансной границей

А. А. Быков[a]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Поступила в редакцию 01.07.2019, после доработки 02.09.2019, принята к публикации 04.09.2019.

Сформулирована и обоснована математическая модель прямоугольного волновода с импедансным граничным условием, основанная на применении граничного метода Галеркина. Предполагается, что поверхностный импеданс не является константой, а задан в виде функции от координат на поверхности. Решение представляется в виде линейной комбинации координатных функций, каждая из которых точно удовлетворяет уравнениям Максвелла внутри цилиндрической области, а на границе набор координатных функций образует полную систему. Коэффициенты находятся из условия ортогональности поверхностной невязки системе проекционных функций, которые при использовании метода Галеркина совпадают с системой координатных функций. Для расчета направляемых волн прямоугольного волновода с импедансной границей предложен и обоснован метод гомотопии. Построено также разложение решения в ряд по степеням малого параметра.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, волны, моды, импеданс.
УДК: 53.06 PACS: 41.20.Jb

ВВЕДЕНИЕ

Задача расчета собственных волн цилиндрического волновода, стенки которого имеют конечную проводимость, привлекает к себе внимание на протяжении нескольких десятилетий [1]. Основные приложения связаны с волноведущими структурами, используемыми для передачи информации, в том числе периодическими, исследованием волн в кристаллической решетке (которую также можно представить в виде волновода с условиями Флоке на боковых поверхностях), исследованием распространения световых волн в периодических структурах с упругой или упругой с внутренним трением границей, созданных в сжимаемой среде при прохождении звуковых волн [2]. В последнее время, наряду с пространственно однородными, все более широко применяются в различных областях микроволновой и оптической техники двумерно-периодические по координатам x и y (далее 2D-периодические) волноведущие структуры на импедансной подложке.

Мы излагаем метод гомотопии в применении к импедансной границе, но этот метод может быть также применен к широкому классу моделей, в том числе для расчета некоторых типов оптоэлектронных и акустоэлектронных элементов [3], моделей оптической и акустооптической томографии [4], лазерной техники [5], в технике фотонных кристаллов и фотонных решеток [8]. Так как наряду с закрытыми волноводами (расположенными между металлическими стенками) используются открытые 2D-периодические волноводы [9, 10], в том числе расположенные на подложке [11], метод гомотопии в предлагаемом варианте применим также к задачам с импедансной подложкой, в том числе полубесконечных косоугольных, решеток на ребре [12], где важен учет потерь. Практическое применение находят конформные решетки на подложке, в том числе модели, основанные на использовании нескольких решеток, расположенных на нескольких подложках [13]. Исследование дисперсионных характеристик волноводов, находящих применение в практических приложениях, сопровождается теоретическим исследованием спектра волноведущих структур с импедансными границами [14].

Для решения задачи о собственных волнах среды с потерями на границах мы в данной работе применим комбинацию двух методов: Галеркина и гомотопии. Применение метода Галеркина [15, 16] для расчета импедансных структур продемонстрировано во множестве работ [17–20, 27]. Мы используем классический вариант метода Галеркина [15, 16]. Заметим, что для решения той же задачи можно использовать также метод Галеркина с частичной дискретизацией, так называемый неполный метод Галеркина [17, 18].

Метод гомотопии, который называют также методом погружения, методом инвариантного погружения, основан на рассмотрении семейства задач, зависящих от искусственно введенного в постановку задачи параметра. Основы метода гомотопии для решения линейных и нелинейных задач математической физики изложены в [21, 22]. Затем получаются дифференциальные уравнения, описывающие зависимость решения от параметра гомотопии. Применение этого метода позволяет не только решить задачу, но и проанализировать зависимость решения от геометрических или оптических параметров, в том числе при деформации волноведущей структуры, или при изменении электромагнитных свойств, связанных, например, с изменением температуры или со старением образца. Метод гомотопии позволяет найти точки структурной перестройки решения [24], при которых качественно меняется распределение поля в поперечном сечении и нарушается гладкость зависимости волнового числа от параметров задачи.

Важно обеспечить как получение численных результатов с гарантированной точностью, так и возможность построения различных асимптотических

[a] abkov@yandex.ru

представлений, так как задача практически всегда содержит малые или большие параметры.

Метод гомотопии позволяет найти моду заданной пространственной структуры. Метод гомотопии универсален, он может быть применен совместно с любым из упомянутых численных методов (методы конечных разностей, конечных элементов, вариационные, проекционные, интегральных уравнений, разделения переменных, частичных областей). Мы рассматриваем математическую модель, основанную на методе Галеркина, так как эта модель обеспечивает высокую точность при небольшом расходе времени счета.

Метод гомотопии основан на представлении задачи в виде

$$L(\gamma)u = 0, \tag{1}$$

где L — оператор краевой задачи на собственные значения [15]. Величина γ — спектральный параметр, его значение требуется найти из условия существования нетривиального решения. В рассматриваемом классе задач γ — волновой вектор, вообще говоря, комплексный. Метод гомотопии состоит в том, что мы погружаем задачу (1) в семейство краевых задач на собственные значения

$$M(\gamma,\tau)u = 0, \tag{2}$$

где $\tau \in [\tau_0,\tau_1]$ — параметр гомотопии, можно положить $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$ или использовать любой другой промежуток. Операторную функцию $M(\gamma,\tau)$ выберем так, чтобы $M(\gamma,\tau_1) = L(\gamma)$, а задача $M(\gamma,\tau_0)u = 0$ имела известное решение. Затем мы составляем систему дифференциальных уравнений, которая описывает зависимость спектрального параметра и профиля собственной моды от параметра гомотопии.

В данной работе мы сформулируем метод гомотопии для решения задачи о собственных волнах цилиндрического волновода с импедансной границей. Поле собственной волны находится из условия выполнения условия Леонтовича. Уравнения гомотопии будут найдены на основе метода Галеркина для волнового вектора и для поля собственной моды. Мы дадим обоснование сходимости гибридного метода гомотопии — Галеркина.

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ С ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим электромагнитное поле цилиндрического волновода в области

$$G = \Pi \times (-\infty,+\infty),$$

где

$$\Pi = \{-a < x < a, -b < y < b\} \tag{3}$$

— прямоугольная область, причем это требование несущественно, метод может быть распространен на области общего вида, в том числе неодносвязные. Рассматриваем поля вида бегущей волны с фазовой скоростью $v = \omega/\gamma$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}(x,y)e^{i\gamma z - i\omega t},\\ \mathbb{H}(x,y,z,t) &= \mathbf{H}(x,y)e^{i\gamma z - i\omega t}. \end{aligned} \tag{4}$$

Внутри области G электромагнитное поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла. Граничные условия на поверхностях цилиндра G возьмем в виде импедансных условий Леонтовича [1]. В волноводе с прямоугольным сечением (3) поле любой волны можно представить в виде суперпозиции симметрических и антисимметрических полей относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ (при наличии также симметрии в граничных условиях, что тоже предполагается). Поэтому достаточно рассмотреть волну с одним типом симметрии, остальные рассматриваются аналогично. В данной работе рассмотрим поле с граничными условиями вида

$$E_{y;z}\big|_{x=0;a} = 0, \quad E_{x;z}\big|_{y=0} = 0,$$

а на поверхности $y = b$ поставим условия Леонтовича

$$E_z = \tilde{\mathcal{W}}_1(x)H_x, \quad E_x = \tilde{\mathcal{W}}_2(x)H_z$$

при $y = b$. Числовые значения $\tilde{\mathcal{W}}_{1;2}$ можно найти в [1]. Обозначения $\tilde{\mathcal{W}}_{1;2}$ мы используем потому, что далее введем функции гомотопии $\mathcal{W}_{1;2}(\tau)$ такие, что $\mathcal{W}_{1;2}(0) = 0$, $\mathcal{W}_{1;2}(1) = \tilde{\mathcal{W}}_{1;2}$.

Будем далее называть поставленную задачу на собственные значения **Задача 1.**

Полная задача (с условиями Леонтовича при $x = a$) рассматривается аналогично.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ ПОЛЕЙ

Используем обозначения [1]

$$\gamma^2 + \chi^2 = \kappa^2, \ \ \kappa = \frac{2\pi}{\lambda},$$

κ — волновое число в вакууме,

$$\kappa^2 = \omega^2\varepsilon\mu,$$

χ — поперечное волновое число, и выразим поперечные компоненты полей через продольные [1]:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},\\ E_y &= \frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},\\ H_x &= \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},\\ H_y &= -\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned} \tag{5}$$

Граничные условия на идеально проводящих частях волновода и условия симметрии приводят к следующим выражениям координатных функций метода Галеркина [15]:

$$\varphi_m^{(s)}(x) = \sin\mu_m x, \ \ \mu_m = \frac{\pi m}{a}, \ \ m \in \{1;2;\dots\}, \tag{6}$$

для электрического поля и

$$\varphi_m^{(c)}(x) = \cos\nu_m x, \;\; \nu_m = \frac{\pi m}{a}, \;\; m \in \{1; 2; \dots\} \quad (7)$$

для магнитного поля. Введем также дополняющие координатные функции по другой координате (в данном случае это y):

$$\psi_m^{(s)}(y) = \begin{cases} \sin\tilde{p}_m y \text{ при } m \in \{1; \dots; m'\}, \\ \sinh\tilde{\tilde{p}}_m y \text{ при } m \in \{m'+1; \dots\}; \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi_n^{(c)}(y) = \begin{cases} \cos\tilde{q}_n y \text{ при } n \in \{1; \dots; n'\}, \\ \cosh\tilde{\tilde{q}}_n y \text{ при } n \in \{n'+1; \dots\}. \end{cases} \quad (9)$$

Явно укажем элементарные волны с вещественными и комплексными показателями:

$$\tilde{p}_m = \sqrt{\chi^2 - \mu_m^2} \text{ при } m \in \{1; \dots; m'\}, \quad (10)$$

$$\tilde{\tilde{p}}_m = \sqrt{\mu_m^2 - \chi^2} \text{ при } m \in \{m'+1, \dots\}; \quad (11)$$

$$\tilde{q}_m = \sqrt{\chi^2 - \nu_m^2} \text{ при } m \in \{1; \dots; m''\}, \quad (12)$$

$$\tilde{\tilde{q}}_m = \sqrt{\nu_m^2 - \chi^2} \text{ при } m \in \{m''+1, \dots\}, \quad (13)$$

значения m' и m'' выбраны так, чтобы все величины в (10), (12) были вещественными. Последующие формулы выписаны для случая

$$p_1 = \sqrt{\chi^2 - \mu_1^2}, \;\; p_m = \sqrt{\mu_m^2 - \chi^2} \text{ для } m \geqslant 2,$$

$$q_1 = \sqrt{\chi^2 - \nu_1^2}, \;\; q_m = \sqrt{\nu_m^2 - \chi^2} \text{ для } m \geqslant 2.$$

3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Выделим осциллирующие и экспоненциальные элементарные волны:

$$E_z = A_1 \sin\mu_1 x \sin p_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m \sin\mu_m x \sinh p_m y, \quad (14)$$

$$H_z = B_1 \cos\nu_1 x \cos q_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m \cos\nu_m x \cosh q_m y. \quad (15)$$

С учетом (6), (7), (8), (9) можно записать решение в виде

$$E_z = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \varphi_m^{(s)}(x) \psi_m^{(s)}(y), \quad (16)$$

$$H_z = \sum_{n=1}^{+\infty} B_m \varphi_m^{(c)}(x) \psi_m^{(c)}(y) \quad (17)$$

и тогда для поперечных компонент поля получим следующие выражения:

$$E_x = \frac{-i\gamma}{\chi^2}\Big[A_1\mu_1 \cos\mu_1 x \sin p_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m\mu_m \cos\mu_m x \sinh p_m y\Big] - \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\Big[B_1 \cos\nu_1 x \cdot q_1 \cdot (-\sin q_1 y) + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m \cos\nu_m x \cdot q_m \cdot \sinh q_m y\Big]; \quad (18)$$

$$E_y = \frac{i\gamma}{\chi^2}\Big[A_1 \sin\mu_1 x \cdot p_1 \cos p_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m \sin\mu_m x \cdot p_m \cosh p_m y\Big] + \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\Big[B_1\nu_1 \cdot (-\sin\nu_1 x) \cdot \cos q_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m\nu_m \cdot (-\sin\nu_m x) \cdot \cosh q_m y\Big]; \quad (19)$$

$$H_x = \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\Big[A_1 \sin\mu_1 x \cdot p_1 \cos p_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m \sin\mu_m x \cdot p_m \cosh p_m y\Big] - \frac{i\gamma}{\chi^2}\Big[B_1\nu_1 \cdot (-\sin\nu_1 x) \cdot \cos q_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m\nu_m \cdot (-\sin\nu_m x) \cdot \cosh q_m y\Big]; \quad (20)$$

$$H_y = \frac{-i\omega\varepsilon}{\chi^2}\Big[A_1\mu_1 \cos\mu_1 x \sin p_1 y + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m\mu_m \cos\mu_m x \sinh p_m y\Big] - \frac{i\gamma}{\chi^2}\Big[B_1 \cdot \cos\nu_1 \cdot q_1 \cdot (-\sin q_1 y) + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m \cos\nu_m x \cdot q_m \cdot \sinh q_m y\Big]. \quad (21)$$

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ИМПЕДАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Мы для большей общности рассмотрим импедансные условия с анизотропной проводимостью, предполагая проводимости в поперечном и продольном направлении различными:

$$E_z = \tilde{\mathcal{W}}_1(x) H_x, \;\; E_x = \tilde{\mathcal{W}}_2(x) H_z \quad \text{при } y = b. \quad (22)$$

Для точного удовлетворения граничных условий должны быть выполнены следующие два равенства, которые записаны в предположении возможности предельного перехода в рядах:

$$A_1 \sin\mu_1 x \sin p_1 b + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m \sin\mu_m x \sinh p_m b = = \mathcal{W}_1 \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\Big[A_1 \sin\mu_1 x\cdot p_1\cos p_1 b + + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m \sin\mu_m x\cdot p_m \cosh p_m b\Big] - - \mathcal{W}_1 \frac{i\gamma}{\chi^2}\Big[B_1\nu_1\cdot(-\sin\nu_1 x)\cdot\cos q_1 b + + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m\nu_m\cdot(-\sin\nu_m x)\cdot\cosh q_m b\Big]; \quad (23)$$

$$\frac{-i\gamma}{\chi^2}\Big[A_1\mu_1\cos\mu_1 x\sin p_1 b + + \sum_{m=2}^{+\infty} A_m\mu_m\cos\mu_m x\sinh p_m b\Big] - - \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\Big[B_1\cos\nu_1 x\cdot q_1\cdot(-\sin q_1 b) + + \sum_{m=2}^{+\infty} B_m\cos\nu_m x\cdot q_m\sinh q_m b\Big] = = \mathcal{W}_2 B_1\cos\nu_1 x\cos q_1 b + + \mathcal{W}_2\sum_{m=2}^{+\infty} B_m\cos\nu_m x\cosh q_m b. \quad (24)$$

5. ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Запишем представления Галеркина для полей в виде векторно-матричных равенств:

$$E_z = \Phi_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(y)\mathbf{A}, \quad (25)$$

$$H_z = \Phi_c^T(x)\otimes\Upsilon_c^T(y)\mathbf{B}. \quad (26)$$

Здесь

$$\Phi_s(x) = \big(\varphi_1^{(s)}(x), \varphi_2^{(s)}(x), \dots\big)^T, \quad \Phi_c(x) = \big(\varphi_1^{(c)}(x), \varphi_2^{(c)}(x), \dots\big)^T \quad (27)$$

$$\Upsilon_s(y) = \big(\psi_1^{(s)}(y), \psi_2^{(s)}(y), \dots\big)^T, \quad \Upsilon_c(y) = \big(\psi_1^{(c)}(y), \psi_2^{(c)}(y), \dots\big)^T \quad (28)$$

— векторы-столбцы координатных функций,

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots)^T, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots)^T,$$

векторы-столбцы галеркинских коэффициентов, символ $\otimes$ означает почленное перемножение векторов (в данном случае векторов-строк) без суммирования. В векторно-матричном виде запишем выражения для поперечных компонент полей:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\gamma}{\chi^2}\big[\tilde\Phi_s^T\otimes\Upsilon_s^T\big]\mathcal{M}\mathbf{A} - \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\big[\Phi_c^T\otimes\tilde\Upsilon_c^T\big]\mathcal{Q}\mathbf{B},\\ E_y &= +\frac{i\gamma}{\chi^2}\big[\Phi_s^T\otimes\tilde\Upsilon_s^T\big]\mathcal{P}\mathbf{A} + \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\big[\tilde\Phi_c^T\otimes\Upsilon_c^T\big]\mathcal{N}\mathbf{B},\\ H_x &= +\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\big[\Phi_s^T\otimes\tilde\Upsilon_s^T\big]\mathcal{P}\mathbf{A} - \frac{i\gamma}{\chi^2}\big[\tilde\Phi_c^T\otimes\Upsilon_c^T\big]\mathcal{N}\mathbf{B},\\ H_y &= -\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\big[\tilde\Phi_s^T\Upsilon_s^T\big]\mathcal{M}\mathbf{A} - \frac{i\gamma}{\chi^2}\big[\Phi_c^T\otimes\tilde\Upsilon_c^T\big]\mathcal{Q}\mathbf{B}, \end{aligned} \quad (29)$$

диагональные матрицы $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ содержат на диагонали числа $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$, диагональные матрицы $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ содержат на диагонали числа $\{p_k\}$, $\{q_k\}$,

$$\tilde\Phi_s(x) = \big(\tilde\varphi_1^{(s)}(x), \tilde\varphi_2^{(s)}(x), \dots\big)^T, \quad \tilde\Phi_c(x) = \big(\tilde\varphi_1^{(c)}(x), \tilde\varphi_2^{(c)}(x), \dots\big)^T, \quad (30)$$

$$\tilde\varphi_m^{(s)}(x) = \cos\mu_m x, \quad \tilde\varphi_m^{(c)}(x) = -\sin\nu_m x, \quad m\in\{1;\dots\}, \quad (31)$$

$$\tilde\Upsilon_s(y) = \big(\tilde\psi_1^{(s)}(y), \tilde\psi_2^{(s)}(y), \dots\big)^T, \quad \tilde\Upsilon_c(y) = \big(\tilde\psi_1^{(c)}(y), \tilde\psi_2^{(c)}(y), \dots\big)^T, \quad (32)$$

$$\tilde\psi_m^{(s)}(y) = \begin{cases} \cos\tilde p_m y \text{ при } m\in\{1;\dots;m'\},\\ \cosh\tilde{\tilde p}_m y \text{ при } m\in\{m'+1;\dots\}; \end{cases} \quad (33)$$

$$\tilde\psi_n^{(c)}(y) = \begin{cases} -\sin\tilde q_n y \text{ при } n\in\{1;\dots;n'\},\\ \sinh\tilde{\tilde q}_n y \text{ при } n\in\{n'+1;\dots\}. \end{cases} \quad (34)$$

Теперь найдем невязку уравнений (23), (24) на поверхности $y = b$:

$$R_1 = -\big[\Phi_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(b)\big]\mathbf{A} + + \mathcal{W}_1\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\big[\Phi_s^T(x)\otimes\tilde\Upsilon_s^T(b)\big]\mathcal{P}\mathbf{A} - - \mathcal{W}_1\frac{i\gamma}{\chi^2}\big[\tilde\Phi_c^T(x)\otimes\Upsilon_c^T(b)\big]\mathcal{N}\mathbf{B}; \quad (35)$$

$$R_2 = -\frac{i\gamma}{\chi^2}\big[\tilde\Phi_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(b)\big]\mathcal{M}\mathbf{A} - - \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\big[\Phi_c^T(x)\otimes\tilde\Upsilon_c^T(b)\big]\mathcal{Q}\mathbf{B} - - \mathcal{W}_2\big[\Phi_c^T(x)\otimes\Upsilon_c^T(b)\big]\mathbf{B}. \quad (36)$$

6. ПРОЕКЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Заметим, что если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — коэффициенты Фурье точного решения задачи 1 по координатным функциям $\Phi_{s;c}$, $\Upsilon_{s;c}$, то невязки (35), (36) равны нулю (опять при условии сходимости соответствующих рядов). Для вычисления этих коэффициентов мы используем метод Галеркина. Пусть начиная с этого момента задано число N, определяющее количество используемых для записи приближенного решения координатных функций. Таким образом, далее везде в векторах (27), (28) имеется ровно N идущих подряд координатных функций. Специального нового обозначения вводить не будем, так как из контекста всегда ясно, что в последующих формулам имеется в виду умножение матриц, корректное в соответствии с правилами матричной алгебры. В частности, теперь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ есть векторы размерности N.

Мы используем для вычисления неизвестных заранее коэффициентов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ поверхностный вариант метода Галеркина. Выражения (14), (15), (18), (19), (20), (21) совместно обеспечивают точное выполнение уравнений Максвелла внутри области G при единственном условии возможности почленного дифференцирования этих функциональных рядов. Мы далее обоснуем эту возможность, показав равномерную сходимость соответствующих продифференцированных рядов, которая опирается на оценку скорости убывания их коэффициентов. Поэтому нам остается только удовлетворить граничным условиям Леонтовича и для этого мы используем поверхностный вариант метода Галеркина. Поставим условия ортогональности невязки соответствующим проекционным функциям на импедансной поверхности:

$$\begin{aligned}\Big\langle \Xi_s(x)\Big|\big[\Phi_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(b)\big]\Big\rangle\mathbf{A} = \\ = \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\Big\langle \Xi_s(x)\big|\mathcal{W}_1(x)\big|\big[\Phi_s^T(x)\otimes\tilde{\Upsilon}_s^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{P}\mathbf{A}- \\ -\frac{i\gamma}{\chi^2}\Big\langle \Xi_s(x)\big|\mathcal{W}_1(x)\big|\big[\tilde{\Phi}_c^T(x)\otimes\Upsilon_c^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{N}\mathbf{B}; \qquad (37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{i\gamma}{\chi^2}\Big\langle \Xi_c(x)\Big|\big[\tilde{\Phi}_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{M}\mathbf{A}- \\ -\frac{i\omega\mu}{\chi^2}\Big\langle \Xi_c(x)\Big|\big[\Phi_c^T(x)\otimes\tilde{\Upsilon}_c^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{Q}\mathbf{B} = \\ = \Big\langle \Xi_c(x)\big|\mathcal{W}_2(x)\big|\big[\Phi_c^T(x)\otimes\Upsilon_c^T(b)\big]\Big\rangle\mathbf{B}. \qquad (38)\end{aligned}$$

Так как мы используем метод Галеркина, проекционные функции совпадают с координатными: $\Xi_s = \Phi_s$, $\Xi_c = \Phi_c$. Система (37) и (38) может быть упрощена с использованием соотношений ортогональности, например

$$\Big\langle \Xi_s(x)\Big|\big[\Phi_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(b)\big]\Big\rangle$$

— диагональная матрица, содержащая квадраты нормы координатных функций. Вместе уравнения (37) и (38) образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений, которую запишем в блочно–матричной форме:

$$\begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB}\\ G_{BA} & G_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = 0, \qquad (39)$$

где

$$\begin{aligned} G_{AA} &= -\Big\langle \Xi_s(x)\Big|\big[\Phi_s^T(x)\otimes\Omega_s^T(b)\big]\Big\rangle + \\ &+\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\Big\langle\big[\Xi_s(x)\big|\mathcal{W}_1(x)\big|\Phi_s^T(x)\otimes\tilde{\Upsilon}_s^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{Q},\\ G_{AB} &= -\frac{i\gamma}{\chi^2}\Big\langle \Xi_s(x)\big|\mathcal{W}_1(x)\big|\big[\tilde{\Phi}_c^T(x)\otimes\Upsilon_c^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{N},\\ G_{BA} &= \frac{i\gamma}{\chi^2}\Big\langle \Xi_c(x)\Big|\big[\tilde{\Phi}_s^T(x)\otimes\Upsilon_s^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{M},\\ G_{BB} &= \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\Big\langle \Xi_c(x)\Big|\big[\Phi_c^T(x)\otimes\tilde{\Upsilon}_c^T(b)\big]\Big\rangle\mathcal{Q}+ \\ &+\Big\langle \Xi_c(x)\big|\mathcal{W}_2(x)\big|\big[\Phi_c^T\otimes\Upsilon_c^T(b)\big]\Big\rangle. \end{aligned} \qquad (40)$$

Матрица системы зависит от параметра γ. Условие нетривиальной разрешимости заключается в равенстве нулю определителя этой системы:

$$\left|\begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB}\\ G_{BA} & G_{BB}\end{pmatrix}\right| = 0. \qquad (41)$$

Требуется найти значения параметра γ (вообще говоря, комплексные), при которых эта нелинейная (относительно γ) система имеет нетривиальное решение.

7. УРАВНЕНИЯ ГОМОТОПИИ

Нелинейное уравнение (41) относительно γ имеет бесконечно много решений, среди которых направляемые моды, запертые моды и, возможно, решения, не отвечающие физически оправданным полям. Вместо численного решения мы предлагаем метод, позволяющий построить решение системы (41), соответствующее направляемой моде с заданной априорно структуре поля. Пусть теперь $\mathcal{W}_{1;2}$ являются функциями от параметра τ, называемого параметром гомотопии. Пусть $\mathcal{W}_1(0) = 0$, $\mathcal{W}_2(0) = 0$, $\mathcal{W}_1(1) = \tilde{\mathcal{W}}_1$, $\mathcal{W}_2(1) = \tilde{\mathcal{W}}_2$, где $\tilde{\mathcal{W}}_{1;2}$ заданные проводимости, для которых требуется получить решение задачи 1. Продифференцируем равенство (39) по параметру τ :

$$\begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB}\\ G_{BA} & G_{BB}\end{pmatrix}\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} + \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB}\\ G_{BA} & G_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = 0. \qquad (42)$$

В соответствии с явными выражениями матричных элементов матриц $G_{.,.}$, равенство (42) равносильно

$$\begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB}\\ G_{BA} & G_{BB}\end{pmatrix}\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G'_{AA} & G'_{AB}\\ G'_{BA} & G'_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\frac{d\gamma}{d\tau} + \begin{pmatrix} G''_{AA} & G''_{AB}\\ G''_{BA} & G''_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = 0, \qquad (43)$$

причем явные выражения для матриц $G'_{.,.}$ и $G''_{.,.}$ записывать не будем. Условие разрешимости линейной неоднородной алгебраической системы (43), вытекающее из теоремы Фредгольма [23], [26], имеет вид:

$$(\mathbf{A}^T,\mathbf{B}^T)\begin{pmatrix} G'_{AA} & G'_{AB}\\ G'_{BA} & G'_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\frac{d\gamma}{d\tau} + (\mathbf{A}^T,\mathbf{B}^T)\begin{pmatrix} G''_{AA} & G''_{AB}\\ G''_{BA} & G''_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = 0. \qquad (44)$$

Это и есть дифференциальное уравнение гомотопии, из которого найдем зависимость $\gamma(\tau)$. Если рассматриваемое невозмущенное собственное значение имеет кратность 1, то можно показать, что

$$(\mathbf{A}^T,\mathbf{B}^T)\begin{pmatrix} G'_{AA} & G'_{AB}\\ G'_{BA} & G'_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \neq 0,$$

так что уравнение (44) есть обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно разрешить относительно производной. Кроме того, эта величина аналитически зависит от параметра гомотопии. Заметим также, что при выполнении условия (44) уравнение (43) для $\frac{d}{d\tau}\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ имеет бесконечное множество решений, более точно, пространство решений соотвествующего уравнения имеет размерность 1. Соответствующие численные алгоритмы можно найти в [25]. Выбор конкретного решения определяет только нормировку собственных функций. Таким образом, уравнение (44) должно решаться совместно с уравнением (43) для коэффициентов $\mathbf{A},\mathbf{B}$.

Теорема 1. *Найдется промежуток $[0;\tau_0]$, на котором задача Коши для уравнений гомотопии (44) разрешима. При $N \to +\infty$ решение уравнений гомотопии—Галеркина (44) сходится к точному решению задачи 1 для уравнений Максвелла.*

8. МАЛОМОДОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Практические расчеты при малом импедансе можно провести, используя одну координатную функцию. В частности, при $\tilde{\mathcal{W}}_{1;2} = \mathrm{const}$. система Галеркина распадается на отдельные несвязанные уравнения. Пусть $m \geqslant 1$ — заданное число. Оставим только координатные функции с индексом m. Из (37), (38) получим систему

$$\begin{cases} \Big(-\left\langle \varphi_m^{(s)} | \varphi_m^{(s)} \right\rangle \psi^{(s)}(p_1 b) + \\ +\dfrac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\left\langle \varphi_m^{(s)} | \mathcal{W}_1 | \varphi_m^{(s)} \right\rangle p_m \tilde{\psi}^{(s)}(p_m b)\Big) A_m + \\ -\Big(\dfrac{i\gamma}{\chi^2}\nu_m \left\langle \varphi_m^{(s)} | \mathcal{W}_1 | \tilde{\varphi}_m^{(c)} \right\rangle \psi^{(c)}(q_m b)\Big) B_m = 0, \\ +\Big(\dfrac{i\gamma}{\chi^2}\mu_m \left\langle \varphi_m^{(c)} | \tilde{\varphi}_m^{(s)} \right\rangle \psi^{(s)}(p_m b)\Big) A_m + \\ +\Big(\dfrac{i\omega\mu}{\chi^2}\left\langle \varphi_m^{(c)} | \varphi_m^{(c)} \right\rangle q_m \tilde{\psi}^{(c)}(q_m b) + \\ +\left\langle \varphi_m^{(c)} | \mathcal{W}_2 | \varphi_m^{(c)} \right\rangle \psi^{(c)}(q_m b)\Big) B_m = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Запишем теперь явные выражения для координатных функций. Таким образом, в одномодовом приближении собственное значение находится из условия нетривиальной разрешимости системы

$$\begin{cases} \Big(-\sin p_m b + \dfrac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\mathcal{W}_1 p_m \cos p_m b\Big) A_m - \\ -\Big(\dfrac{i\gamma}{\chi^2}\nu_m \mathcal{W}_1 \cos q_m b\Big) B_m = 0, \\ +\Big(\dfrac{i\gamma}{\chi^2}\mu_m \sin p_m b\Big) A_m + \\ +\Big(\dfrac{i\omega\mu}{\chi^2} q_m \sin q_m b + \mathcal{W}_2 \cos q_m b\Big) B_m = 0, \end{cases} \tag{46}$$

что равносильно равенству нулю определителя матрицы

$$\left|\begin{pmatrix} -\sin p_m b + \dfrac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\mathcal{W}_1 p_m \cos p_m b & \dfrac{i\gamma}{\chi^2}\mathcal{W}_1 \nu_m \cos q_m b \\ \dfrac{i\gamma}{\chi^2}\mu_m \sin p_m b & \dfrac{i\omega\mu}{\chi^2} q_m \sin q_m b - \mathcal{W}_2 \cos q_m b \end{pmatrix}\right| = 0. \tag{47}$$

Однако спектральный параметр входит сюда в сложной форме в виде аргумента нескольких элементарных функций, поэтому решить это уравнение явно не представляется возможным. Однако при малом импедансе можно получить разложение решения в ряд по степеням малого параметра.

9. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД

Пусть $\mathcal{W}_{1;2} = \tau\tilde{\mathcal{W}}_{1;2}$, здесь τ — малый параметр. При $\tau = 0$ из (47) получим $\sin p_m b = 0$,

$$p_m = \pi k/b,$$

$$\chi^2 = \chi_0^2 = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2,$$

что соответствует прямоугольному волноводу с идеально проводящими стенками [1], при этом

$$\gamma_0^2 = \kappa^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2.$$

Пусть

$$p_m b = \pi k + \tau\delta,$$

тогда

$$\sin p_m b = (-1)^k \tau\delta + o(\tau),$$

$$\cos p_m b = (-1)^k (1 - \tau^2\delta^2/2) + o(\tau^2),$$

и теперь из (45) найдем χ и затем γ:

$$\left|\begin{pmatrix} -\tau\delta + \tau\tilde{\mathcal{W}}_1 \dfrac{i\omega\varepsilon}{\chi_0^2}\dfrac{\pi k}{b} & \tau\tilde{\mathcal{W}}_1 \dfrac{i\gamma_0}{\chi_0^2}\dfrac{\pi k}{b} \\ \dfrac{i\gamma_0}{\chi_0^2}\dfrac{\pi k}{b}\tau\delta & \tau\Big(\dfrac{i\omega\mu}{\chi_0^2}\dfrac{\pi k}{b}\delta - \tilde{\mathcal{W}}_2\Big) \end{pmatrix}\right| = 0, \tag{48}$$

для δ получим квадратное уравнение

$$-\delta^2\left[\frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\pi k}{b}\right] + \delta\left[\tilde{\mathcal{W}}_2 + \tilde{\mathcal{W}}_1 \frac{i\omega\varepsilon}{\chi_0^2}\frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\pi k}{b}\frac{\pi k}{b} - \tilde{\mathcal{W}}_1 \frac{i\gamma_0}{\chi_0^2}\frac{i\gamma_0}{\chi_0^2}\frac{\pi k}{b}\frac{\pi k}{b}\right] - \tilde{\mathcal{W}}_1\tilde{\mathcal{W}}_2 \frac{i\omega\varepsilon}{\chi_0^2}\frac{\pi k}{b} = 0, \tag{49}$$

$$\delta^2\left[\frac{i\omega\mu}{\chi_0^2}\right] - \delta\left[\tilde{\mathcal{W}}_2 + \tilde{\mathcal{W}}_1 \frac{i\omega\varepsilon}{\chi_0^2}\frac{i\omega\mu}{\chi_0^2}\frac{\pi k}{b} - \tilde{\mathcal{W}}_1 \frac{i\gamma_0}{\chi_0^2}\frac{i\gamma_0}{\chi_0^2}\frac{\pi k}{b}\right] + \tilde{\mathcal{W}}_1\tilde{\mathcal{W}}_2 \frac{i\omega\varepsilon}{\chi_0^2} = 0, \tag{50}$$

численное решение которого не представляет сложности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод гомотопии открывает новые возможности для расчета направляемых волн волноведущих структур, сильно возмущенных по сравнению с элементарными структурами типа круговой, эллипсоидальной, прямоугольной, треугольной, для которых собственные волны можно найти аналитически. Метод гомотопии позволяет найти направляемую моду высокого порядка в заданным числом числом нулей и пучностей, отправляясь от таковой моды для эталонного волновода с известным аналитическим решением. Метод гомотопии позволяет исследовать устойчивость моды по отношению к малой (или не малой) вариации параметров, в том числе параметров формы и параметра частоты. Применение метода гомотопии позволяет также получить надежные результаты расчета собственных волн волноводно–лестничных структур, собранных из участков цилиндрических волноводов с фланцами.

Автор выражает благодарность профессору А. Н. Боголюбову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00690-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978.
2. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
3. *Li X., Shao Z.* Fundamentals of Optical Computing Technology. New York: Springer, 2018.
4. *Drexler W., Fujimoto J. G. (Eds.)* Optical Coherence Tomography: Technology and Applications. 2 ed. — Springer International Publishing. Switzerland, 2015.
5. *Williams M., Matthew O., Wilkening J.* et al. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2011. **240**, N 22 P. 1791.
6. *Truong X. Tran, Dung C. Duong.* // Annals of Physics. 2015. **361**, N 10 P. 501.
7. *Hunsperger R. G.* Integrated Optics: Theory and Technology. 6th Edition. Springer Science and Business Media, LLC, 2009.
8. *Garanovich I., Longhi S., Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S.* // Physics Reports. 2012. **518**, N 1 P. 1.
9. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.
10. *Todaro M. et al.* // Microelectronic Engineering. 2003. **67**. P.670.
11. *Yaremchuk I.* et al. // Optics Communications. 2013. **301**. P. 1.
12. *Benisty H., Khayam O., Cambournac C.* // Photonics and Nanostructures. 2010. **8**, N 4. P. 210.
13. *Prajapati Y., Singh V., Saini J.* // Int. J. Light and Electron Optics. 2009. **120**, N 1. P. 14.
14. *Cardone G., Nazarov S., Taskinen J.* // Journal of Functional Analysis. 2015. **269**, N 8. P. 2328.
15. *Гавурин М. К.* Численные методы. М.: Наука, 1971.
16. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
17. *Свешников А. Г., Ильинский А. С.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. **11**, № 4. С. 960.
18. *Свешников А. Г.* // Докл. АН СССР. 1977. **236**, № 5. С. 1076.
19. *Ильинский А. С.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. **14**, № 4. 1063.
20. *Bykov A. A., Popov V. Yu., Sveshnikov A. G.* et al. // Mathematical and Computer Modelling. 2000. **32**, N 9. P. 1059.
21. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
22. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976.
23. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
24. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
25. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
26. *Рисс Ф, Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
27. *Быков А. А.* // ДАН СССР, 1984. **274** № 1. С.11.

A Homotopy Method for Calculating Cylindrical Waveguide Guided Waves with an Impedance Boundary

A. A. Bykov

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia. E-mail: abkov@yandex.ru.

A mathematical model for a rectangular waveguide with an impedance boundary condition has been formulated and substantiated. The model is based on the application of the Galerkin boundary method. It is assumed that the surface impedance is not a constant, but is a function of the coordinates on the surface. The solution is represented as a linear combination of coordinate functions, each of which exactly satisfies Maxwell's equations inside a cylindrical domain. The set of coordinate functions at the border forms a complete system. The coefficients are determined from the orthogonality condition for the surface residual to the system of projection functions. Because of the use of the Galerkin method, the projection functions coincide with the system of coordinate functions. To calculate the guided waves of a rectangular waveguide with an impedance boundary, a homotopy method has been proposed and justified. The decomposition of the solution into a power series in a small parameter has also been constructed.

Keywords: cylindrical waveguide, waves, modes, indedance.
PACS: 41.20.Jb.
Received 01 July 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 6. Pp. 577–584.

Сведения об авторе

Быков Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: abkov@yandex.ru.