

## Прохождение рентгеновского излучения сквозь бесконечные диэлектрические клиновидные объекты

А. П. Орешко<sup>a</sup>

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра физики твердого тела.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 07.06.2019, после доработки 08.07.2019, принята к публикации 22.08.2019.

Аналитически решена задача прохождения и отражения рентгеновского излучения ( $0.1 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 10 \text{ \AA}$ ) от бесконечной аморфной однородной диэлектрической клиновидной пластины. Полученное решение является «нулевым» шагом в решении задачи дифракции рентгеновского излучения на полубесконечном аморфном однородном диэлектрическом клине в рамках эвристической геометрической теории дифракции.

*Ключевые слова:* рентгеновское излучение, дифракция, диэлектрический клин, эффект Гуса—Хенхен.

УДК: 539.26. PACS: 61.05.cc, 42.25.Gy.

### ВВЕДЕНИЕ

В оптике и видимого света, и рентгеновского излучения хорошо известна и давно решена задача прохождения и зеркального отражения излучения от бесконечной плоскопараллельной аморфной однородной диэлектрической пластины (или пленки) конечной толщины. Слово «аморфная» здесь означает, что при прохождении рентгеновского излучения сквозь такую пластину не наблюдается дифракция на атомах вещества пластины. Решение этой задачи описывается формулой Эйри [1], и в рентгеновском диапазоне длин волн многолучевая интерференция волн в пластине проявляется в виде осцилляций Кизиха (см., например, [2, 3]). Модель плоской пленки на поверхности хорошо описывает реальные экспериментальные результаты, получаемые в методе рентгеновской рефлектометрии. В настоящее время на основе модели плоской пленки развито большое количество теоретических подходов, позволяющих описывать взаимодействие рентгеновского излучения с плоскопараллельными многослойными как аморфными, так и кристаллическими структурами с различными типами упорядочений [4–13].

Еще одной классической проблемой является задача дифракции электромагнитной волны в полубесконечной клиновидной области. Эта задача, по-видимому, впервые была сформулирована и решена А. Зоммерфельдом в 1896 году для дифракции плоской волны на металлическом клине [14]. В свою очередь, задача дифракции на диэлектрическом клине до сих пор не имеет точного решения. Для решения этой задачи развито большое количество подходов, основанных на методе Зоммерфельда—Малюжинца (см. [15] и ссылки там) и различных эвристических методах: геометрооптическом [16], геометрической теории дифракции [17], равномерной асимптотической физической оптики [18].

Альтернативой аналитическому решению задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрической клиновидной области служит решение, найденное при помощи численных методов. Известны решения такой задачи, найденные методом поверх-

ностных интегральных уравнений [19, 20] и методом конечных разностей во временной области [21]. Особенностью численных методов является необходимость скругления ребра клина. Численные методы имеют и свою ценность, поскольку могут служить для проверки применимости эвристических решений [22].

Так как наибольшее значение проблема дифракции электромагнитной волны на диэлектрической клиновидной области имеет для задач радиолокации и радиосвязи, то основное внимание при решении уделялось рассмотрению диапазона длин волн  $\lambda > 0.1$  мм и в рентгеновском диапазоне длин волн эта проблема принципиально не решалась. Актуальность подобной задачи в рентгеновском диапазоне длин волн связана с рассмотрением задач динамической дифракции на кристаллах конечных размерах [23], а также дифракции и зеркального отражения рентгеновского излучения на латеральных структурах [24].

Настоящая статья является «нулевым» шагом в решении задачи дифракции рентгеновского излучения на полубесконечном аморфном однородном диэлектрическом клине и посвящена рассмотрению прохождения и отражения рентгеновского излучения ( $0.1 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 10 \text{ \AA}$ ) от бесконечной аморфной однородной диэлектрической клиновидной пластины.

### 1. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СКВОЗЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ КЛИНОВИДНУЮ ПЛАСТИНУ

Рассмотрим задачу о прохождении и отражении плоской монохроматической  $\sigma$ -поляризованной рентгеновской волны  $\mathbf{A}_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})$  от бесконечной аморфной однородной диэлектрической клиновидной пластины с углом раствора  $\alpha$  (см. рисунок). Поместим начало декартовой прямоугольной системы координат в точку схождения продолжения граней пластины. Ось  $Ox$  направим вдоль верхней грани пластины, а ось  $Oz$  — в плоскости вниз, перпендикулярно верхней грани так, чтобы волновой вектор  $\mathbf{k}_0$  лежал в плоскости  $xz$ . Ось  $Oy$  направим

<sup>a</sup> E-mail: ap.oreshko@physics.msu.ru

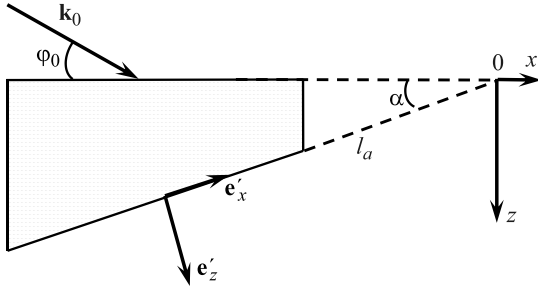


Рисунок. Постановка задачи для нахождения амплитудных коэффициентов отражения и прохождения сквозь диэлектрическую клиновидную пластину

перпендикулярно плоскости рисунка так, чтобы базисные векторы осей  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  образовывали правую тройку векторов. В такой системе координат сечение плоскостью  $xz$  верхней грани клиновидной пластины является прямой  $z = 0$ , а сечение этой же плоскостью нижней грани — прямой  $l_\alpha: z = -x \operatorname{tg} \alpha$ .

Излучение падает из вакуума под произвольным углом скольжения  $\varphi_0$  по отношению к входной (верхней) грани клиновидной пластины так, что происходит отражение от границы раздела вакуум-пластина. Это означает, что угол скольжения  $\varphi_0 \leq 2-3\varphi_C$ , где  $\varphi_C = |\operatorname{Re}(\chi_0)|^{1/2}$  — критический угол полного внешнего отражения, а  $\chi_0$  — рентгеновская поляризуемость материала пластины. В рентгеновском диапазоне длин волн критический угол полного внешнего отражения составляет величину порядка  $10-20'$ , что, в свою очередь, приводит и к ограничению угла скольжения  $\varphi_0 \leq 40-60'$ . Отраженную и преломленную волны запишем в виде  $\mathbf{A}_S \exp(i\mathbf{k}_S \mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{q}_0 \mathbf{r})$  соответственно. Очевидно, что в вакууме над клиновидной пластиной  $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_S| = k_0$ , а величина волнового вектора в среде связана с  $k_0$  соотношением  $q_0 = nk_0$ , где  $n = (1 + \chi_0)^{1/2}$  — показатель преломления.

Прежде чем переходить к записи суммарных волновых полей вне и внутри клиновидной пластины, проведем оценку угла падения излучения на выходную грань пластины. Для этого будем считать материал пластины непоглощающим, т.е. положим  $\operatorname{Im}(\chi_0) = 0$ . В этом случае преломленная волна  $\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{q}_0 \mathbf{r})$  падает на выходную (нижнюю) грань клиновидной пластины под углом  $\varphi_2 \approx \alpha + (\varphi_0^2 + \operatorname{Re}(\chi_0))^{1/2}$ . Таким образом, при угле падения  $\varphi_0 \approx \varphi_C$  и угле раствора клина  $\alpha \geq \varphi_C$  угол падения на выходную грань  $\varphi_2 > 2-3\varphi_C$  и отражением преломленной волны  $\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{q}_0 \mathbf{r})$  от выходной грани можно пренебречь. Это, в свою очередь, означает что поле в вакууме под нижней границей клиновидной пластины состоит только из прошедшей волны  $\mathbf{B}_0 \exp(i\mathbf{b}_0 \mathbf{r})$  с  $|\mathbf{b}_0| = |\mathbf{k}_0| = k_0$ .

Следовательно, в рамках нашей модели ( $\alpha \geq \varphi_C$ ) поле в вакууме над входной гранью клиновидной пластины имеет вид

$$\mathbf{E}_{\text{vac1}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) + \mathbf{A}_S \exp(i\mathbf{k}_S \mathbf{r}). \quad (1)$$

Поле внутри клиновидной пластины имеет вид

$$\mathbf{E}_{\text{wed}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{q}_0 \mathbf{r}), \quad (2)$$

а поле в вакууме под выходной гранью клиновидной пластины — вид

$$\mathbf{E}_{\text{vac2}}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 \exp(i\mathbf{b}_0 \mathbf{r}). \quad (3)$$

Необходимо еще раз отметить, что такой выбор волновых полей в вакууме и клиновидной пластине не позволяет учесть эффекты, вызванные дифракцией волн на краях пластины. Но как раз именно такое допущение и используется в рамках эвристической геометрической теории дифракции для создания «скелета», который будет использован в дальнейшем для учета именно краевых эффектов.

На верхней и нижней гранях клиновидной пластины тангенциальные граничным компонентам электрического и магнитного полей должны быть непрерывны [25]. Следствием этого условия является непрерывность тангенциальных граничным компонентам волновых векторов. На верхней грани для волновых векторов получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} k_{0y} = k_{Sy} = q_{0y} = 0, \quad k_{0x} = k_{Sx} = q_{0x} = k_0 \cos \varphi_0, \\ k_{0z} = k_0 \gamma_0, \quad q_{0z} = (q_0^2 - k_{0x}^2)^{1/2} = k_0 \gamma_S, \\ \gamma_0 = \sin \varphi_0, \quad \gamma_S = (\gamma_0^2 + \chi_0^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как  $k_{Sx} = k_{0x}$ , то отраженная волна также составляет с гранью угол  $\varphi_0$ , т.е. имеет место зеркальное отражение и  $k_{0z} = -k_{Sz} = k_0 \gamma_0$ .

Перед тем, как записать условия непрерывности тангенциальных компонент волновых векторов на нижней грани пластины, обратим внимание на то, что  $q_{0y} = b_{0y} = 0$ , и наша задача из трехмерной становится двумерной — в плоскости отражения.

Введем в плоскости отражения единичные векторы  $\mathbf{e}'_x$  — вдоль прямой  $l_\alpha$  и  $\mathbf{e}'_z$  — перпендикулярно прямой  $l_\alpha$  так, как показано на рисунке. Тогда

$$\mathbf{q}_0 = q_{0x} \mathbf{e}_x + q_{0z} \mathbf{e}_z = q_{0l} \mathbf{e}'_x + q_{0n} \mathbf{e}'_z,$$

где

$$\begin{aligned} q_{0l} = q_{0x} \cos \alpha - q_{0z} \sin \alpha = k_0 (\cos \varphi_0 \cos \alpha - \gamma_S \sin \alpha), \\ q_{0n} = q_{0x} \sin \alpha + q_{0z} \cos \alpha = k_0 (\cos \varphi_0 \sin \alpha + \gamma_S \cos \alpha), \end{aligned}$$

а условие непрерывности тангенциальных компонент волновых векторов на нижней грани пластины примет вид

$$q_{0l} = b_{0l}.$$

Для определения амплитуд полей в (1)–(3) запишем условия непрерывности тангенциальных компонент электрических и магнитных полей на верхней и нижней гранях пластины. На верхней грани получим следующую систему граничных условий:

$$\begin{aligned} A_0 + A_S = E_0, \\ \gamma_0(A_0 - A_S) = E_S. \end{aligned} \quad (4)$$

На нижней — получим условие

$$E_0 \exp\{iq_{0n}d\} = B_0 \{ib_{0n}d\}, \quad (5)$$

где  $b_{0n} = (b_0^2 - b_{0l}^2)^{1/2}$ , а  $d$  — толщина клиновидной пластины, являющаяся функцией координат  $(x, z)$ .

Из граничных условий (4)–(5) видно, что амплитуды зеркально-отраженной и преломленной волн не зависят от толщины клиновидной пластины и, по сути, удовлетворяют граничным условиям для полубесконечной среды с поляризуемостью пластины [25]. Амплитудные коэффициенты зеркального отражения от клиновидной пластины  $R_S = A_S/A_0$  и прохождения в клиновидную пластину  $T_S = E_0/A_0$  задаются при помощи хорошо известных формул Френеля:

$$R_S = (\gamma_0 - \gamma_S)/(\gamma_0 + \gamma_S), \quad T_S = 2\gamma_0/(\gamma_0 + \gamma_S) \quad (6)$$

и совпадают с коэффициентами зеркального отражения и прохождения для плоскопараллельной пластины. В свою очередь, амплитудный коэффициент прохождения сквозь клиновидную пластину  $T_0 = B_0/A_0$  задается выражением:

$$T_0(d) = T_S \exp\{i(q_{0n} - b_{0n})d\}.$$

Так как структура полного поля над и в плоскопараллельной пластине, а тем самым и в клиновидной пластине в рамках нашего приближения, хорошо известны (см., например, [1, 2]), то более подробно рассмотрим структуру поля «под пластиной»:

$$E_{\text{vac}}(x', z') = A_0[2\gamma_0/(\gamma_0 + \gamma_S)] \times \exp\{i(q_{0n} - b_{0n})d(x', z')\} \exp\{i(b_{0l}x' + b_{0n}z')\}.$$

Перейдем в систему координат  $xyz$  и учтем, что в этой системе координат толщина клиновидной пластины связана с координатой  $x$  соотношением  $d = -x \operatorname{tg} \alpha$ . Тогда выражение для амплитуды поля примет вид

$$E_{\text{vac}}(x, z) = A_0 \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + \gamma_S} \times \exp\left\{-ix \left(q_{0n} - \sqrt{k_0^2 - q_{0l}^2}\right) \operatorname{tg} \alpha\right\} \times \exp\left\{i \left[ q_{0l}(x \cos \alpha - z \sin \alpha) + \sqrt{k_0^2 - q_{0l}^2}(x \sin \alpha + z \cos \alpha) \right]\right\},$$

а  $q_{0l}$ ,  $q_{0n}$  определяются в (1).

Область применимости используемого подхода для описания отражения и прохождения рентгеновского излучения вблизи кромки клина ограничивается областью применимости формул Френеля (6). В [26] показано, что при отражении плоской волны телом конечных размеров, или, что то же самое, отражении ограниченного падающего пучка, происходит дифракционное уширение отраженного пучка, причем максимальный линейный размер этого уширения для отражения от однородной среды соответствует величине продольного сдвига Гуса—Хенхен (ГХ) [27, 28].

Так как в рентгеновском диапазоне длин волн сдвиг ГХ максимален в области полного внешнего отражения, а в используемой в данной статье модели зеркальным отражением рентгеновского излучения пренебрегается, то для определения области, где нельзя использовать формулы Френеля (6),

достаточно найти величину сдвига ГХ на входной грани клина. Иными словами, для определения расстояния до кромки клина, где нельзя использовать формулы Френеля (6), нужно найти величину сдвига ГХ в задаче о зеркальном отражении «полубесконечной» плоской рентгеновской волны с амплитудой  $A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$  от плоской границы раздела вакуум—полубесконечная однородная среда. Дифракционные эффекты на краю пучка приводят к возникновению «отраженной» волны и в области  $x > 0$ . Именно эта область и характеризует расстояние до кромки, где нельзя использовать формулы Френеля.

Величина продольного сдвига ГХ определяется формулой Артманна [29, 30]:

$$\Delta = - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial k_x} \right|_{k_x = k_{0x}}, \quad (7)$$

где  $k_x$  — проекция волнового вектора на границу раздела вакуум—среда, а  $\vartheta$  — фаза комплексного коэффициента отражения  $R_s(k) = |R_s(k)| \exp\{i\vartheta(k)\}$  плоской монохроматической волны с длиной волны  $\lambda$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$ , определяемого выражением (6). При этом мы будем считать, что изменение проекции волнового вектора на границу раздела  $k_x$  происходит только за счет изменения угла падения  $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ . Из (6) и условия полного внешнего отражения  $R_s(k) = 1$ , пренебрегая поглощением в среде ( $\operatorname{Im}(\chi_0) \ll \operatorname{Re}(\chi_0)$ ) следует, что

$$\vartheta = - \arcsin \left( \frac{2\gamma \sqrt{|\operatorname{Re}(\chi_0)| - \gamma^2}}{|\operatorname{Re}(\chi_0)|} \right), \quad (8)$$

где  $\gamma = \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2}}$ . В итоге из (7) и (8) получим

$$\Delta = \frac{2k_{0x}}{k_0^2 \gamma_0 \sqrt{|\operatorname{Re}(\chi_0)| - \gamma_0^2}} = \frac{\lambda}{\pi \operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{|\operatorname{Re}(\chi_0)| - \sin^2 \varphi_0}},$$

т. е. в области полного внешнего отражения размер области  $L$  ( $L$  — расстояние от кромки клина), где нельзя использовать формулы Френеля,  $L \sim 10^6 \lambda$ .

Для определения области применения предложенного метода вне области полного внешнего отражения подход, основанный на вычислении сдвига ГХ уже неприменим, и в [16] было показано существование так называемой «запредельной» области у самой кромки клина, в которой принципиально не справедливо приближение геометрической теории дифракции. Размер этой области определяется соотношением  $L = (\lambda/4)(\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{Re}(\chi_0)^{1/2})$ , т. е.  $L \sim (1-100)\lambda$ , что значительно меньше величины продольного сдвига ГХ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены аналитические выражения для амплитуд прошедшей и отраженной рентгеновской

волн от бесконечной аморфной однородной диэлектрической клиновидной пластины. Показано, что в области полного внешнего отражения рентгеновского излучения полученные результаты справедливы вне области вблизи кромки клина, линейные размеры которой определяются величиной продольного сдвига Гуса—Хенхен для отраженного пучка.

Полученные выражения являются базисом для построения решения задачи дифракции рентгеновского излучения на полубесконечном аморфном однородном диэлектрическом клине в рамках эвристической геометрической теории дифракции, что в дальнейшем будет использовано при решении поставленной задачи дифракции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ (гранты № 19-02-00483, 19-52-12029) с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М. В. Ломоносова. Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Андреева М. А., Кузьмин Р. Н. Мессбауэровская и рентгеновская оптика поверхности. М., 1996.
3. Андреева М. А., Борисова С. Ф., Степанов С. А. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1985. № 4. С. 5.
4. Parratt L. G. // Phys. Rev. 1954. **95**. P. 359.
5. Колпаков А. В. Динамическая дифракция рентгеновских лучей. М.: МГУ, 1989.
6. Prudnikov I. R. // Phys. Stat. Sol. (B): Basic Research. 2000. **217**, N 2. P. 725.
7. Stepanov S. A., Kondrashkina E. A., Koehler R. et al. // Phys. Rev. B. 1998. **57**, N 8. P. 4829.
8. Stepanov S. A., Sinha S. K. // Phys. Rev. B. 2000. **61**, N 22. P. 15302.
9. Бушуев В. А., Орешко А. П. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2002. № 1. С. 67.
10. Орешко А. П., Бушуев В. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 5. С. 40. (Oreshko A. P., Bushuev V. A. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2003. **58**, N 5. P. 49.)
11. Одицова Е. Е., Андреева М. А. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2010. № 11. С. 46.
12. Андреева М. А., Baulin R. A., Repchenko Y. L. // J. Synch. Rad. 2019. **26**, N 2. P. 483.
13. Кожевников И. В. Теория дифракции рентгеновского излучения от неоднородных слоистых сред. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М., 2013.
14. Sommerfeld A. // Mathematische Annalen 1896. **47**. P. 317.
15. Крячко А. Ф., Лихачев В. М., Смирнов С. Н., Сташкевич А. И. Теория рассеяния электромагнитных волн в угловых структурах. СПб.: Наука, 2009.
16. Нефёдов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979.
17. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
18. Gennarelli G., Riccio G. // Int. J. of Antennas and Propagation 2012. **2012**. Article ID 151287.
19. Васильев Е. Н., Солодухов В. В. // Известия вузов, Радиофизика. 1974. **17**, № 10. С. 1518.
20. Васильев Е. Н., Солодухов В. В. Метод интегральных уравнений в задачах дифракции на полубесконечных диэлектрических структурах. Препринт № 25 (397). М.: ИРЭ АН СССР, 1984.
21. Rouviere J. F., Douchin N, Combes P. F. // IEEE Trans. On Antennas and Propagation 1999. **47**, N 11. P. 1702.
22. Комаров А. А. Анализ излучения антенн в диэлектрических структурах методом поверхностных интегральных уравнений. Дисс. ... канд. тех. наук. М., 2013.
23. Shabalin A. G., Yefanov O. M., Nosik V. L. et al. // Phys. Rev. B. 2017. **96**, N 6. 064111.
24. Колосов С. И. Теория дифракции рентгеновских лучей на латеральных структурах. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2015.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
26. Кизель В. А. Отражение света. М.: Наука, 1973.
27. Goos F, Lindberg-Hanchen H. // Ann. Physik. 1947. **436**, N 7–8. P. 333.
28. Бреховских Л. М. // УФН. 1953. **50**, С. 539.
29. Artmann K. // Ann. Physik. 1948. **437**, N 1–2. P. 87.
30. Бушуев В. А., Франк А. И. // УФН. 2018. **188**, № 10. С. 1049.

### X-Ray Transmission through Infinite Dielectric Wedge-Shaped Objects

A. P. Oreshko

Department of Solid State Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: [ap.oreshko@physics.msu.ru](mailto:ap.oreshko@physics.msu.ru).

The problem of transmission and reflection of X-rays ( $0.1 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 10 \text{ \AA}$ ) from an infinite amorphous homogeneous wedge-shaped dielectric plate has been analytically solved. The obtained solution is a «zero» step in solving the problem of X-ray diffraction on a semi-infinite amorphous homogeneous dielectric wedge within the heuristic geometric diffraction theory.

Keywords: X-ray, diffraction, dielectric wedge, Goos-Hänchen effect.

PACS: 61.05.cc, 42.25.Gy.

Received 07 June 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 6. Pp. 657–661.

#### Сведения об авторе

Орешко Алексей Павлович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-12-26, e-mail: [ap.oreshko@physics.msu.ru](mailto:ap.oreshko@physics.msu.ru).