

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Черные дыры и голые сингулярности в системе бесконечного импульса

Д. В. Гальцов,^a А. В. Кулицкий^b*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 29.06.2019, после доработки 09.10.2019, принята к публикации 10.10.2019.

Рассматривается проблема построения ударных волн методом бустирования метрик черных дыр и голых сингулярностей. Отмечается, что при бустировании могут возникать сингулярные члены, препятствующие получению ударных волн, в частности при отсутствии квазидекартовых координат. При бустировании метрики Фишера черной дыры со скалярным зарядом и сингулярным горизонтом найдено, что скалярное поле исчезает в результате бустирования, в отличие от черных дыр с электрическим и магнитным зарядами. Отмечается, что бустированные метрики являются решениями линеаризованных уравнений Эйнштейна, в то время как исходные метрики являются точными нелинейными решениями этих уравнений. При бустировании исчезает горизонт событий, поэтому бустирование голых сингулярностей приводит к тому же результату, что и бустирование черных дыр. Это также подтверждается на примере ударно-волнового решения, которое строится на основе гамма-метрики (Зипоя—Вурхиса). Наконец, показано, что при бустировании линеаризованной метрики с параметром Ньюмена—Унти—Тамбурино (НУТ) вдоль струны Мизнера получается ударная волна с недиагональной структурой гиратона.

Ключевые слова: черные дыры, гравитационные волны, ударные волны, бустирование.

УДК: 514.7. PACS: 04.20.-q, 04.30.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется метрикам черных дыр в системе бесконечного импульса, т. е. бустированных формально до скорости света. Помимо своей роли в классической гравитации как некоторого класса точных решений [1], эти геометрии актуальны при исследованиях транспланковских столкновений частиц в теориях с большими дополнительными измерениями. При энергиях, значительно превышающих многомерную массу Планка, возможно описание в рамках классической теории. При этом поле ультрарелятивистской частицы можно аппроксимировать метрикой ударной волны. При столь высоких энергиях столкновений гравитационное взаимодействие является доминирующим [2, 3], и поэтому гравитационные ударно-волновые решения играют важную роль при описании столкновений ультрарелятивистских частиц. Эти решения также используются для голографического описания столкновений тяжелых ядер. В таком подходе столкновение ядер моделируется столкновением ударных волн, распространяющихся в пространстве анти-де Ситтера (ADS) [4]. Такие столкновения могут приводить к образованию черной дыры [5, 6] с характерной температурой Хокинга, что голографически описывает образование термализованного состояния кварк-глюонной плазмы [7].

В 1971 г. Айхельбург и Сексль [8] получили точное решение уравнений Эйнштейна, описывающее безмассовую частицу, движущуюся со скоростью света посредством бустирования метрики Шварцшильда и последующего взятия предела $v \rightarrow c$, сопровождаемого перемасштабированием массы и спе-

циальным координатным преобразованием, обеспечивающим регуляризацию результата. Метод бустирования Айхельбурга и Сексля был впоследствии использован для получения ультрарелятивистского предела метрик Райсснера—Нордстрема [9, 10], решения Эйнштейна—Максвелла с дилатонным полем [11], решения Керра—Ньюмена [12], метрики Тауба—НУТ с нулевой массой [13], пространств Шварцшильда—анти-де Ситтера [14], а также в контексте гравитационных теорий с высшими производными [15]. Между тем в теории бустирования до сих пор остаются неясные вопросы и некоторые тонкости, которые следует иметь в виду. Именно этими соображениями мотивирована данная работа. Мы хотим понять, в частности, влияет ли на бустированное решение регулярность исходной метрики, а также выяснить особенности бустирования метрик со струной Мизнера.

1. БУСТИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ФИШЕРА

Как известно, асимптотически-плоское решение скалярно-тензорной теории с минимальной связью [16]

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu})$$

описывается метрикой Фишера:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^S dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-S} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1-S} (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \quad (1)$$

где введены параметры

$$r_0 = 2(M^2 + \Sigma^2)^{\frac{1}{2}}, \quad S = \frac{M}{(M^2 + \Sigma^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2)$$

^a E-mail: galtsov@phys.msu.ru^b E-mail: av.kulitsky@yandex.ru

M — асимптотическая масса Комара, Σ — скалярный заряд. Параметр S принимает значения в промежутке $0 \leq S \leq 1$, причем в пределе $S = 1$ скалярный заряд Σ исчезает, и метрика превращается в решение Шварцшильда. В случае нетривиального скалярного поля (12) горизонт событий при $r = r_0$ становится сингулярным в полном соответствии с теоремами об отсутствии скалярных волос. Будем вначале следовать работе [18], в которой рассматривалось бустирование согласно процедуре Айхельбурга и Секля [8], а затем предложим эквивалентный метод, основанный на первоначальной линеаризации исходной метрики.

Чтобы было возможно ввести декартовы координаты, используемые при бустировании, нужно вначале переписать метрику в изотропных координатах, т.е. привести ее трехмерную часть к конформно-плоскому виду:

$$ds^2 = f(r)^2 dt^2 - g(r)^2 (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)).$$

Для этого запишем очевидные соотношения между старыми и новыми координатами:

$$r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1-S} = \lambda^2 \rho^2, \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-S} dr^2 = \lambda^2 d\rho^2,$$

где $\lambda = \lambda(\rho)$. Выразив λ из первого выражения и подставив его во второе, получим дифференциальное уравнение для $r(\rho)$:

$$\frac{\pm dr}{\sqrt{r^2 - r_0 r}} = \frac{d\rho}{\rho},$$

решение которого имеет вид

$$\pm \ln \left[\sqrt{r^2 - r_0 r} + \left(r - \frac{r_0}{2}\right) \right] = \ln \rho + \text{const.}$$

Рассмотрев асимптотику при больших значениях r , легко видеть, что нужно выбрать знак «+». Для удобства дальнейших обозначений имеет смысл принять равной $\ln 2$ константу интегрирования, так что

$$\sqrt{r^2 - r_0 r} + \left(r - \frac{r_0}{2}\right) = 2\rho. \quad (3)$$

Для того, чтобы разрешить это уравнение относительно r , учтем, что

$$\begin{aligned} & \left(\left(r - \frac{r_0}{2}\right) + \sqrt{r^2 - r_0 r} \right) \times \\ & \times \left(\left(r - \frac{r_0}{2}\right) - \sqrt{r^2 - r_0 r} \right) = \frac{r_0^2}{4}, \end{aligned}$$

тогда

$$\left(\left(r - \frac{r_0}{2}\right) - \sqrt{r^2 - r_0 r} \right) = \frac{r_0^2}{8\rho}. \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), найдем

$$r = \rho \left(1 + \frac{r_0}{4\rho}\right)^2, \quad \lambda = \frac{r}{\rho} = \left(1 + \frac{r_0}{4\rho}\right)^2, \quad (5)$$

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = 1 - \frac{r_0}{\rho \left(1 + \frac{r_0}{4\rho}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{4\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_0}{4\rho}\right)^2}. \quad (6)$$

Далее запишем метрику, перейдя от сферических координат к декартовым, что необходимо для дальнейшего применения преобразований Лоренца:

$$ds^2 = \frac{(1 - \bar{A})^{2S}}{(1 + \bar{A})^{2S}} d\bar{t}^2 - (1 - \bar{A}^2)^2 \frac{(1 + \bar{A})^{2S}}{(1 - \bar{A})^{2S}} (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2),$$

где

$$\bar{A} = \frac{\bar{r}_0}{4\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}}.$$

Будем производить бустирование метрики вдоль z -координаты:

$$\bar{t} \rightarrow \gamma(t - vz), \quad \bar{x} = x, \quad \bar{z} \rightarrow \gamma(z - vt), \quad \bar{y} = y,$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$, причем нас будут интересовать лишь значения v , близкие к единице.

Линейный элемент преобразуется к виду

$$ds^2 = (1 - A^2)^2 \frac{(1 + A)^{2S}}{(1 - A)^{2S}} (dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2) - \left[(1 - A^2)^2 \frac{(1 + A)^{2S}}{(1 - A)^{2S}} - \frac{(1 - A)^{2S}}{(1 + A)^{2S}} \right] \frac{(dt - vdz)^2}{1 - v^2},$$

$$A = \frac{r_0(1 - v^2)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)}}.$$

Сделаем замену массы M и скалярного заряда Σ посредством

$$M = p\sqrt{1 - v^2}, \quad \Sigma = \Sigma_0\sqrt{1 - v^2}, \quad (7)$$

тогда для функций A и S имеем

$$A = \frac{(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}(1 - v^2)}{2\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)}}, \quad (8)$$

$$S = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \Sigma_0^2}}.$$

Если просто устремить $v \rightarrow 1$, то для A мы получим нуль. Таким образом, бустированную метрику можно будет записать так:

$$ds_{\text{boosted}}^2 = dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2 - \lim_{v \rightarrow 1} \left[(1 - A^2)^2 \frac{(1 + A)^{2S}}{(1 - A)^{2S}} - \frac{(1 - A)^{2S}}{(1 + A)^{2S}} \right] \frac{(dt - vdz)^2}{1 - v^2}.$$

Далее учтем, что

$$\begin{aligned} & \left[(1 - A^2)^2 \frac{(1 + A)^{2S}}{(1 - A)^{2S}} - \frac{(1 - A)^{2S}}{(1 + A)^{2S}} \right] = \\ & = 8SA - 2A^2 + O[A]^3. \end{aligned}$$

Это позволяет сократить $(1 - v^2)$, и предел в линейном элементе метрики дает

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow 1} \frac{4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)}} = \\ & = \begin{cases} 4S \frac{(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{|t - z|}, & t \neq z, \\ \infty, & t = z. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее следуют стандартная процедура Айхельбурга—Сексля и манипуляции с пределами. Для этого рассмотрим соотношение

$$\lim_{v \rightarrow 1} \frac{4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)}} = \lim_{v \rightarrow 1} f(x_i) + 4S \frac{(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{|t - z|},$$

где

$$f(x_i) = \frac{4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)}} - \frac{4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)}}.$$

Докажем, что

$$\lim_{v \rightarrow 1} = -8S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \delta(t - z) \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поскольку

$$\theta(z - t) = \int_{-\infty}^z \delta(t - z') dz',$$

то для функции $F(x_i)$ получим

$$\begin{aligned} F(x_i) &= \int_{-\infty}^z f(t, z', x, y) dz' = \\ &= 4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\ln \left\{ \frac{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)} + z - vt}{\sqrt{(z - vt)^2 + (1 - v^2)} + z - vt} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \ln(x^2 + y^2) \right], \\ \lim_{v \rightarrow 1} F(x_i) &= \begin{cases} -4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \ln(x^2 + y^2), & \text{если } z > t, \\ 0, & \text{если } z < t. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь возникает θ -функция, после дифференцирования которой по z получаем требуемое выражение. Исходная метрика при этом перепишется в виде

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{z}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - 4S(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{1}{|\bar{t} - \bar{z}|} - 2\delta(\bar{t} - \bar{z}) \ln \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \right] (dt - dz)^2. \quad (9)$$

Первый член в скобках не дает вклада в тензор Римана. Его можно убрать, совершив координатное преобразование вида

$$d\bar{t} - d\bar{z} = dt - dz, \quad (10)$$

$$d\bar{t} + d\bar{z} = dt + dz + 4S \frac{(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}}{|t - z|} (dt - dz); \quad (11)$$

тогда после подстановки S из (8) получим

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2 + 8p\delta(t - z) \ln \sqrt{x^2 + y^2} (dt - dz)^2,$$

или в координатах светового конуса $u = t - z$, $v = t + z$

$$ds^2 = 8p\delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} du^2 + dudv - dx^2 - dy^2.$$

Линейный элемент в точности совпадает с линейным элементом метрики Айхельбурга—Сексля [8].

Тот же результат может быть получен методом первоначальной линейаризации по гравитационной константе. В этом случае нет необходимости переходить к изотропным координатам. Учтем, что масса M и скалярный заряд Σ пропорциональны первой степени константы G . В итоге, раскладывая выражение для линейного элемента (1) в ряд по r_0 , оставляя лишь линейные по r_0 слагаемые, получим

$$ds^2 = \left(1 - S \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 + (S - 1) \frac{r_0}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{r_0}{r} dr^2.$$

Переходим к декартовым координатам с последующим бустированием вдоль оси z :

$$\begin{aligned} ds_{\text{boosted}}^2 &= dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2 - \\ &- 4(2S - 1) \lim_{v \rightarrow 1} A \frac{(dt - dz)^2}{1 - v^2} - \\ &- 2 \lim_{v \rightarrow 1} \frac{(p^2 + \Sigma_0^2)(z - vt)^2}{((x^2 + y^2)(1 - v^2) + (z - vt)^2)^{\frac{3}{2}}} (dt - dz)^2. \end{aligned}$$

Первый предел мы уже вычисляли, второй рассчитывается методом, описанным в разд. 3 для величины (14) ds_{AS}^2 . Тогда с учетом (8) находим:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dudv - dx^2 - dy^2 - \\ &- 2(2S - 1)(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|u|} - 2\delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right] du^2 + \\ &+ 2(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|u|} - 2\delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right] du^2 = \\ &= dudv - dx^2 - dy^2 - 4p \left[\frac{1}{|u|} - 2\delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right] du^2. \end{aligned}$$

После преобразования (10) получаем тот же результат, что и в (8). Таким образом, метод перехода к изотропным координатам и метод линейаризации исходной диагональной метрики полностью эквивалентны.

Найдем, как преобразуется скаляр при процедуре бустирования. В метрике Фишера скаляр имеет вид [17]

$$\phi = \frac{\Sigma}{2(M^2 + \Sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \left| 1 - \frac{r_0}{r} \right|, \quad (12)$$

где r_0 дается выражением (2). Произведем переход (5) и выполним буст:

$$\phi_{\text{boosted}} = \frac{\Sigma_0}{(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{1 - A}{1 + A} \right),$$

где величина A определена формулой (8) и обращается в нуль при взятии предела $v \rightarrow 1$. Таким образом, скалярное поле при бустировании исчезает:

$$\phi_{\text{boosted}} = \frac{\Sigma_0}{(p^2 + \Sigma_0^2)^{\frac{1}{2}}} \ln[1] = 0.$$

Таким образом, при бустировании метрики, в которой горизонт сингулярен за счет скалярного поля, и скалярное поле, и горизонт исчезают, т.е. можно сказать, что пролетающий со скоростью света наблюдатель не видит волос. Как известно, скалярные волосы для черных дыр с регулярным горизонтом событий запрещены теоремами [19] об отсутствии волос. При этом параметр массы в решении остается, т.е. бустирование сингулярного объекта массы M приводит к такому же решению ударной волны, что и при бустировании метрики Шварцшильда с той же массой.

2. БУСТИРОВАНИЕ ГАММА-МЕТРИКИ

Гамма-метрика (решение Зипоя—Вурхис (ЗВ)) [20, 21] описывает двухпараметрическое семейство пространств, относящихся к классу Вейля, и представляет собой статическое, аксиально-симметричное и асимптотически плоское вакуумное решение уравнений Эйнштейна. Наиболее удобной для наших целей является запись [22] линейного элемента ЗВ в сферических координатах

$$ds^2 = F dt^2 - F^{-1} [G dr^2 + H d\theta^2 + (r^2 - 2kr) \sin^2 \theta d\phi^2],$$

$$F = \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^\sigma,$$

$$G = \left(\frac{r^2 - 2kr}{r^2 - 2kr + k^2 \sin^2 \theta}\right)^{\sigma^2 - 1},$$

$$H = \frac{(r^2 - 2kr)^\sigma}{(r^2 - 2kr + k^2 \sin^2 \theta)^{\sigma^2 - 1}},$$

где $k = M/\sigma$ — коэффициент, задающий соотношение между массой M источника и параметром сплюсненности σ . При $\sigma = 1$ метрика ЗВ описывает стандартное сферически симметричное решение Шварцшильда. При $\sigma \geq 1$ ЗВ является «сплюсненным» пространством Шварцшильда. Если же $0 < \sigma < 1$, центральный объект является вытянутым, и, наконец, при $\sigma = 0$ метрика ЗВ становится пространством Минковского.

После линеаризации метрика ЗВ становится похожей на метрику Фишера (1) с нулевым скалярным зарядом Σ , параметром k вместо массы M и параметром σ вместо S :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^\sigma dt^2 - \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^{-\sigma} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^{1-\sigma} (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2).$$

Тогда при бустировании воспользуемся готовым выражением (9) и получим

$$ds^2 = dudv - dx^2 - dy^2 + 8\sigma \cdot \frac{p}{\sigma} \delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} du^2 = 8p\delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} du^2 + dudv - dx^2 - dy^2.$$

В итоге вне зависимости от параметра сплюсненности σ (за исключением случая $\sigma = 0$) метрика ЗВ

в системе бесконечного импульса совпадает с бустированной метрикой Шварцшильда. Таким образом, на этом примере еще раз подтверждается закономерность исчезновения различий между черной дырой и голой сингулярностью в системе бесконечного импульса.

3. БУСТИРОВАНИЕ МЕТРИК С ПАРАМЕТРОМ НЬЮМЕНА—УНТИ—ТАМБУРИНО

Рассмотрим теперь метрику Брилла [23], параметрами которой являются масса, НУТ-заряд, электрический и магнитный заряды:

$$ds^2 = f(dt - 2N(\cos \theta + C)d\phi)^2 - f^{-1}dr^2 - (r^2 + N^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

где

$$b^2 = Q^2 + P^2 - M^2 - N^2;$$

$$f = \frac{(r - M)^2 + b^2}{r^2 + N^2}.$$

В зависимости от значений параметров метрика может иметь два горизонта, один вырожденный горизонт либо не иметь горизонта событий вообще. Последний случай соответствует кротовой норе, связывающей два асимптотически локально плоских пространства. При этом кротовая норма НУТ не требует наличия экзотической материи с отрицательной плотностью энергии, но ценой этого является наличие метрической особенности на полярной оси, известной как струна Мизнера. При нулевом значении НУТ-параметра и константы C метрика переходит в решение Райсснера—Нордстрёма, а с занулением электрического (Q) и магнитного (P) зарядов становится решением Тауба—НУТ [24].

Недиагональные метрики, пожалуй, за исключением случая метрики Керра [12], при бустировании дают расходящиеся члены, пропорциональные $(1 - v^2)^{-k}$. Для таких метрик нет возможности перейти к изотропным координатам. Такая же ситуация наблюдается и при бустировании метрики Шварцшильда, формально записанной в декартовых координатах без предварительного перехода к изотропным координатам. Соответственно метрика Брилла в нелинеаризованном варианте не даст новой импульсной метрики. Поэтому ограничимся линеаризацией решения, оставив лишь первый порядок разложения по гравитационной константе. Учтем, что масса M и НУТ-заряд N , квадрат электрического Q^2 и квадрат магнитного зарядов P^2 пропорциональны первой степени G , а константа C , в свою очередь, пропорциональна нулевой степени G .

Далее, слагаемое с $\frac{r^2}{r^2 - 2M + Q^2}$ можно переписать эквивалентным образом как $1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$, домножив на $r^2 + 2M - Q^2$ и отбросив M^2 , Q^4 и MQ^2 в знаменателе, как слагаемое, пропорциональное G^2 . В итоге результирующую метрику можно записать следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} & 0 & 0 & -2N(C + \cos \theta) \\ 0 & -1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ -2N(C + \cos \theta) & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Эта метрика представляет собой линейризованную метрику Райсснера—Нордстрёма с добавкой линейризованной метрики Тауб—NUT на фоне пространства Минковского. Поэтому можно перейти от сферических координат к декартовым:

$$x = r \sin \theta \cos \phi;$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi;$$

$$z = r \cos \theta.$$

Формально разделим линейный элемент метрики на три части $ds^2 = ds_M^2 + ds_{AS}^2 + ds_{RN}^2 + ds_N^2$, соответствующие метрике Минковского (M) с добавками Айхельбурга—Сексля (AS), и бустированной части метрик RN и NUT:

$$\begin{aligned} ds_{AS}^2 &= -\frac{2M}{r} dt^2 - \frac{2M}{r^3} (dx x + dy y + dz z)^2, \\ ds_{RN}^2 &= \frac{Q^2 + P^2}{r^2} dt^2 + \\ &\quad + \frac{Q^2 + P^2}{r^4} (dx x + dy y + dz z)^2, \\ ds_N^2 &= \frac{4N(dy x - dx y) du (C + \cos \theta)}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем вначале производить бустирование вдоль оси x . Чтобы воспользоваться приведенными выше соотношениями, переобозначим координаты z и x и применим преобразования Лоренца

$$\begin{aligned} t &= \gamma(\tilde{t} - v\tilde{z}); & x &= \tilde{x}; \\ z &= \gamma(\tilde{z} - v\tilde{t}); & y &= \tilde{y}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Рассмотрим сначала ту часть, которая соответствует бустированному Шварцшильду и предложим альтернативный способ получения решения Айхельбурга—Сексля [8]. Слагаемые с положительными степенями разложения по $(1-v^2)$ можно сразу отбросить, т.к. при взятии предела $v \rightarrow 1$ они обратятся в нуль:

$$\begin{aligned} ds_{AS}^2 &= -\lim_{v \rightarrow 1} \left[\frac{2M}{r} \gamma^2 (d\tilde{t} - v\tilde{z})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2M}{r^3} \gamma^4 (\tilde{z} - v\tilde{t})^2 (d\tilde{z} - v d\tilde{t})^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее учтем, что $(\tilde{z} - v\tilde{t})^2 = (\tilde{t} - v\tilde{z})^2 - \tilde{t}(1-v^2) + \tilde{z}(1-v^2) = u^2 - \tilde{t}(1-v^2) + \tilde{z}(1-v^2)$. Опустим знак тильды у координат и избавимся от слагаемых пропорциональных положительным степеням разложения по $(1-v^2)$. Примем также во внимание, что, согласно (7), $M = p\sqrt{1-v^2}$. Получим

$$\begin{aligned} ds_{AS}^2 &= -2p \lim_{v \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{(u^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2))^{\frac{3}{2}}} \right] du^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Прибавим к выражению под знаком предела и вычтем из него выражение

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 + (1-v^2)}} + \frac{u^2}{(u^2 + (1-v^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

Тогда (15) перепишется в виде

$$\begin{aligned} ds_{AS}^2 &= -2p \lim_{v \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2)}} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{u^2 + (1-v^2)}} + \frac{u^2}{(u^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2))^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad \left. - \frac{u^2}{(u^2 + (1-v^2))^{\frac{3}{2}}} \right] - \frac{4p}{|u|}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл $F(u) = \int_{-\infty}^u f(u) du$ от выражения в квадратных скобках

$$\begin{aligned} F(u) &= 2 \ln \left[\frac{u + \sqrt{u^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2)}}{u + \sqrt{u^2 + (1-v^2)}} \right] - \\ &\quad - 2 \ln(x^2 + y^2) - \\ &\quad - \frac{u}{\sqrt{u^2 + (x^2 + y^2)(1-v^2)}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + (1-v^2)}}. \end{aligned}$$

Далее возьмем предел этого выражения при $v \rightarrow 1$.

$$\lim_{v \rightarrow 1} F(u) = \begin{cases} 0, & u > 0; \\ 4 \ln(x^2 + y^2), & u < 0. \end{cases}$$

Это выражение представляет собой не что иное, как $8\theta(-u) \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому, снова продифференцировав это выражение, найдем:

$$ds_{AS}^2 = 8p \delta(u) \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{4p}{|u|}. \quad (16)$$

Тем самым мы показали, что метрику AS можно получить посредством прямого бустирования линейризованного Шварцшильда, не прибегая к предварительному переходу к изотропным координатам. Результат в данном случае в точности совпадает с оригинальным результатом Айхельбурга и Сексля.

Теперь обратимся к части метрики, отвечающей метрике RN:

$$ds_{\text{RN}}^2 = \lim_{v \rightarrow 1} (p_e^2 + p_m^2) \left[\frac{1}{u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2} \gamma du^2 + \frac{1}{(u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2)^2} \gamma^3 u^2 du^2 \right].$$

Проинтегрируем выражение в квадратных скобках по u . Соответственно для первого и второго слагаемых получим:

$$F_1(u) = \int_{-\infty}^u \frac{p_e^2 + p_m^2}{u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2} \gamma du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan \left[\frac{u \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] + \frac{\pi}{2 \sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F_2(u) = \int_{-\infty}^u \frac{p_e^2 + p_m^2}{(u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2)^2} \gamma^3 u^2 du = \frac{\pi}{4 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2} \left(-\frac{u \gamma}{u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan \left[\frac{u \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \right).$$

Возьмем предел этих функций при $v \rightarrow 1$, а затем продифференцируем по u . Выражение для ds_{RN}^2 будет совпадать с соответствующей частью линейного элемента бустированной метрики Райсснера—Нордстрема [9]:

$$ds_{\text{RN}}^2 = \delta(u) \frac{3\pi}{2} \frac{p_e^2 + p_m^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Здесь следует отметить, что бустирование решения Шварцшильда с отрицательной массой и сверхэкстремального решения Райсснера—Нордстрема не приводят к новым ударным волнам, а лишь изменяют параметры предыдущих. В частности, поменяется только знак перед выражением (16).

Обратимся теперь к третьей части линейного элемента, содержащей NUT-параметр. Поскольку метрика Тауб—НУТ обладает цилиндрической, а не сферической симметрией, то результат будет зависеть от направления в котором производится бустирование, перпендикулярно струне Мизнера или же вдоль нее. В первом случае будем действовать методом, изложенным в работе [13], и произведем замену координат x на z , z на x с последующим бустированием вдоль координаты z . Соответственно $\cos \theta = \frac{x}{r}$. При устремлении v к 1 НУТ-параметр будет стремиться к нулю $N = \sqrt{1 - v^2} k$:

$$ds_N^2 = \lim_{v \rightarrow 1} \frac{4k \gamma x (dy u - y du) du}{(u^2 \gamma^2 + y^2) \sqrt{u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2}} + \frac{4k \gamma C (dy u - y du) du}{u^2 \gamma^2 + y^2}. \quad (17)$$

Обратимся к вычислению интегралов. Имеем

$$F_3(u) = \int_{-\infty}^u \frac{4k \gamma x u}{(u^2 \gamma^2 + y^2) \sqrt{u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2}} du = -\frac{4k}{x} \operatorname{arctanh} \left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{\gamma^2 u^2}{x^2} \right) + \frac{2i\pi k}{x}.$$

Нетрудно убедиться, что предел этого выражения при $v \rightarrow 1$ будет равен нулю, соответственно первое слагаемое в (17) не дает вклада в результирующую метрику. Далее,

$$F_4(u) = \int_{-\infty}^u \frac{4k \gamma x y u}{(u^2 \gamma^2 + y^2) \sqrt{u^2 \gamma^2 + x^2 + y^2}} du = 4k \left[\arctan \left(\frac{\gamma u x}{y \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2 u^2}} \right) + \arctan \left(\frac{x}{y} \right) \right].$$

Предел этого выражения дает θ -функцию:

$$\lim_{v \rightarrow 1} F_2(u) = 8k \theta(u) \arctan \left(\frac{x}{y} \right).$$

Чтобы получить предел второго слагаемого в линейном элементе с НУТ, содержащего константу C , необходимо перед интегрированием и взятием предела $v \rightarrow 1$ прибавить к нему и вычесть член

$$4k \gamma C \frac{u}{u^2 \gamma^2 + y^2} dy du.$$

Предел этого выражения при $\gamma \rightarrow \infty$ равен нулю. Теперь мы можем избежать проблем с интегрированием выражения

$$F_5(u) = 4k \gamma C \int_{-\infty}^u \left(\frac{u}{u^2 \gamma^2 + y^2} - \frac{u}{u^2 \gamma^2 + y^2} \right) du = \frac{2 C k}{\gamma} \ln \left[\frac{y^2 + u^2 \gamma^2}{1 + u^2 \gamma^2} \right],$$

также получая в пределе нуль. Наконец, рассмотрим последний интеграл:

$$F_6(u) = 4k \gamma C \int_{-\infty}^u \frac{y}{u^2 \gamma^2 + y^2} du = 4 C k \arctan \left[\frac{u \gamma}{y} \right] + 2 C k \pi, \quad \lim_{v \rightarrow 1} F_6 = 4 C k \pi \theta(u).$$

Собираем все воедино, дифференцируем по u , добавляем слагаемое, соответствующее бустированному Шварцшильду и плоскую часть, получим

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \left[\frac{4p}{|t-x|} - 8p \delta(t-z) \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{3\pi}{2} \delta(t-z) \frac{p_e^2 + p_m^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 8k \delta(t-z) \arctan \left(\frac{x}{y} \right) - 4 C k \pi \delta(t-z) \right] (dt - dz)^2.$$

Нетрудно заметить, что член с $\frac{4p}{|u|}$ не дает вклада в тензор энергии—импульса, его можно убрать из метрики, совершив координатное преобразование

$$dt - dx \rightarrow dt - dx;$$

$$dt + dx \rightarrow dt + dx + \frac{4p}{|t-x|}(dt - dx).$$

В результате получим метрику импульсной волны, соответствующую гравидионному плосковолновому решению типа *pp-wave*, с электрическим и магнитным зарядами, которая в координатах Бринкмана записывается следующим образом:

$$ds^2 = -\delta(u)f(x, y)du^2 + du dv - dx^2 - dy^2,$$

$$f(x, y) = -8 \left(p \ln \sqrt{x^2 + y^2} + k \arctan \left[\frac{x}{y} \right] + \frac{kC\pi}{2} \right) + \frac{3}{2} \frac{p_e^2 + p_m^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полученное решение представляет собой дион относительно гравитационной дуальности масса–НУТ-заряд, что во многом аналогично случаю связи между электрическим зарядом и магнитным монополю в электродинамике [25], поскольку для ударно-волновых метрик с НУТ-зарядом мы можем ввести комплексную переменную $\xi = y + ix$:

$$\ln \xi = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x},$$

реальную часть логарифма которой можно приписать соответствующему слагаемому метрики Айхельбурга—Сексля, а мнимую — дуальному пространству бустированного НУТ.

Бустирование вдоль струны Мизнера выражения ds_N^2 приведет к совершенно другому результату. Учитывая, что $N = \sqrt{1 - v^2}k$, возьмем предел $v \rightarrow 1$ от (17) после соответствующего применения преобразований Лоренца

$$\lim_{v \rightarrow 1} ds_N^2 =$$

$$= - \lim_{v \rightarrow 1} 4N \left(C - \frac{u}{\sqrt{(1 - v^2)(x^2 + y^2) + u^2}} \right) du d\phi =$$

$$= 8k \left(\frac{C + 1}{2} - \theta(u) \right) du d\phi.$$

Тогда полное решение можно записать следующим образом

$$ds^2 = -\delta(u)g(\rho) + du dv - d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - J(u, \rho) du d\phi,$$

где

$$g(x, y) = -8p \ln \rho + \frac{3p_e^2 + p_m^2}{\rho};$$

$$J(u, \rho) = -8k \left(\frac{C + 1}{2} - \theta(u) \right).$$

Полученное решение совпадает с полем гипотетической частицы — гиратона, обладающей большим угловым моментом [26–28], причем значение константы C , в исходной метрике отвечающее за локализацию струны Мизнера, дает вклад в угловой момент результирующего решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были выявлены следующие закономерности построения метрик ударных волн путем бустирования некоторых точных решений гравитации. Во-первых, для проведения этой процедуры необходимо перейти к координатам, в которых можно достаточно просто записать преобразования Лоренца. Для статических сферически-симметричных метрик это достигается переходом к конформно-плоским координатам в трехмерном пространстве. В случае недиагональных метрик иногда можно использовать координаты Керра—Шильда. Если же этого сделать не удастся, то приходится прибегать к линеаризации решения на фоне пространства Минковского. Если задача допускает оба метода, то результаты оказываются совпадающими, т.е. бустирование эффективно линеаризует решение полной нелинейной системы. При наличии матриальных полей это не совсем так. Именно для электромагнитного поля в метрике сохраняются квадратичные члены, в то время как в случае скалярного поля последние полностью исчезают в пределе бесконечного импульса. Стоит отметить, что в силу теоремы об отсутствии скалярных волос исходные метрики являются голыми сингулярностями, а результирующая ударная волна совпадает с получаемой при бустировании метрики Шварцшильда. Таким образом, бустирование в систему бесконечного импульса приводит к утрате различия между черной дырой и голой сингулярностью той же массы. Это можно объяснить эффективной линеаризацией решений при бустировании.

Результат бустирования метрик с параметром НУТ существенно зависит от направления буста по отношению к направлению струны Мизнера. При бустировании в перпендикулярном направлении изменяется вид гармонической функции, которая приобретает зависимость от азимутального угла. При бустировании вдоль струны Мизнера результирующая метрика имеет вид характерный для гиратона, при этом сохраняется параметр, определяющий положение струны Мизнера в исходной метрике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-02-01299a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brinkmann H. W. // Math. Ann. 1925. **94**, N 1. P. 119.
2. Hooft G. 't. // Phys. Lett. B. 1987. **198**. P. 61.
3. Hooft G. 't. // Nucl. Phys. B. 1988. **304**. P. 867.
4. Aref'eva I. Y., Bagrov A. A., Guseva E. A. // JHEP. 2009. **0912**. P. 009.
5. Eardley D. M., Giddings S. B. // Phys. Rev. D. 2002. **66**. 044011.
6. Aref'eva I. Y., Viswanathan K. S., Volovich I. V. // Nucl. Phys. B. 1995. **452**. P. 346.
7. Aref'eva I. Y. // Phys. Usp. 2014. **57**. P. 527.
8. Aichelburg P. C., Sexl R. U. // Gen. Rel. Grav. 1971. **2**. P. 303.
9. Lousto C. O., Sanchez N. G. // Int. J. Mod. Phys. A. 1990. **5**. P. 915.
10. Steinbauer R. // J. Math. Phys. 1997. **38**. P. 1614.
11. Cai R. G., Ji J. Y., Soh K. S. // Nucl. Phys. B. 1998. **528**. P. 265.
12. Lousto C. O., Sanchez N. G. // Nucl. Phys. B. 1992. **383**. P. 377.

13. *Argurio R., Dehouck F., Houart L.* // JHEP 2009. **0901**. P. 045.
14. *Podolsky J., Griffiths J.B.* // Phys. Rev. D. 1997. **56**. P. 4756.
15. *Buchdahl H.A.* // J. Phys. A. 1983. **16**. P. 1441.
16. *Fisher I.Z.* // Zh. Exp. Teor. Fiz. 1948. **18**. P. 636.
17. *Abdolrahimi S., Shoom A.A.* // Phys. Rev. D. 2010. **81**. 024035.
18. *Switek O., Tahamtan T.* // Gen. Rel. Grav. 2016. **48**, N 2. P. 22.
19. *Bekenstein J.D.* // Phys. Rev. D. 1995. **51**, N 12. P. R6608.
20. *Zipoy D.M.* // J. Math. Phys. 1966. **7**. P. 1137.
21. *Voorhees B.H.* // Phys. Rev. D. 1970. **2**. P. 2119.
22. *Esposito F.P., Witten L.* // Phys. Lett. 1975. B **58**. P. 357.
23. *Brill D.R.* // Phys. Rev. **133**. 1964. P. B845.
24. *Newman E., Tambrino L., Unti T.* // J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 915.
25. *Wu T.T., Yang C.N.* // Phys. Rev. D. 1975. **12**. P. 3845.
26. *Frolov V.P., Israel W., Zelnikov A.* // Phys. Rev. D. 2005. **72**. 084031.
27. *Frolov V.P., Fursaev D.V.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**. 104034.
28. *Podolsky J., Steinbauer R., Svarc R.* // Phys. Rev. D. 2014. **90**, N 4. 044050.

Black Holes and Naked Singularities in an Infinite Momentum Frame

D. V. Gal'tsov^a, A. V. Kulitskii^b

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.
Moscow 119991, Russia.*

E-mail: ^agaltsov@phys.msu.ru, ^bav.kulitsky@yandex.ru.

The problem of the construction of shock waves by the boosting method for metrics of black holes and naked singularities is considered. It is noted that singular terms may arise under the boosting, which prevents the generation of shock waves (in particular, in the case of the absence of quasi-Cartesian coordinates). We find that if the Fisher metric of a black hole with a scalar charge and a singular horizon is boosted, then the scalar field disappears (unlike the case of black holes with electric and magnetic charges). It is noted that boosted metrics are solutions of the linearized Einstein equations, while the original metrics are exact nonlinear solutions of these equations. The event horizon disappears under the boosting. Thus, the boosting of naked singularities leads to the same result as the boosting of black holes. This is confirmed by the example of gamma-metrics (Zipoy—Voorhees solution) as well. Finally, it is shown that if a linearized metric is boosted with the Newman—Unti—Tamburino parameter (NUT) along the Misner string, then a shock wave with a nondiagonal structure of the gyraton is obtained.

Keywords: black holes, gravitational waves, shock waves, boosting.

PACS: 04.20.-q, 04.30.-w.

Received 29 June 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 1. Pp. 1–9.

Сведения об авторах

1. Гальцов Дмитрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: gdmv04@mail.ru.
2. Кулицкий Александр Валерьевич — аспирант; e-mail: av.kulitsky@yandex.ru.