Решение уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны с осевой симметрией, радиально увеличивающей свой размер

А. П. Леляков,[a] О. В. Ханейчук
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, физико-технический институт, кафедра теоретической физики и физики твердого тела. Россия, 295007, Симферополь, пр. Вернадского, д. 4.

Поступила в редакцию 31.07.2019, после доработки 27.09.2019, принята к публикации 07.10.2019.

В настоящей работе найдено решение уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны с осевой симметрией, радиально увеличивающей свой размер. Подтверждена возможность выбора идеального газа нуль-струн в качестве доминантного источника гравитации при исследовании нуль-струнного механизма инфляции в пространствах Фридмана—Робертсона—Уокера. Показано отсутствие предельного перехода между найденным решением и решением для замкнутой нуль-струны в форме окружности, радиально изменяющей свой размер, что говорит об устойчивости конфигурации замкнутой нуль-струны в виде окружности при движении во внешнем гравитационном поле. Отмечено, что часть свойств газа нуль-струн, например таких, как способность к образованию доменной структуры, существование устойчивых поляризованных состояний (мультиструнных систем), не зависит от формы нуль-струны, однако динамика пробной нуль-струны в поле такой мультиструнной системы будет иметь особенности.

Ключевые слова: нуль-струна, гравитационное поле, точное решение.
УДК: 531-9+514.823. PACS: 04.20.jb, 11.27.+d.

ВВЕДЕНИЕ

Решения типа струн в полевых теориях со спонтанным нарушением симметрии исследовались в многочисленных работах, начиная с работы Нильсена и Олесена [1], в которой получены численные решения, описывающие прямые бесконечные гравитирующие струны. Энергия такой полевой конфигурации сосредоточена в нитеподобной области с исчезающе малым поперечным сечением. Космические струны — это аналогичные объекты, которые могли быть сформированы в ранней Вселенной. Они могут появляться в процессе нарушающих симметрию фазовых переходов, предсказанных моделями физики частиц, например моделями, связанными со спонтанным нарушением симметрии, в Теории великого объединения (ТВО) [2–8]. Не исключается, что космические струны могли сохраниться до современной эпохи и могут быть наблюдаемыми [9].

Космическую струну характеризуют параметры: линейная плотность массы ρ_l и радиус поперечного сечения r_s. Для струн, возникающих в моделях ТВО, они связаны с масштабом масс теории m_{GUT} и константой Хиггса λ соотношениями:

$$\frac{G}{c^2}\rho_l = \lambda^{-1}\left(\frac{m_{\mathrm{GUT}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right)^2, \quad r_s = l_{\mathrm{pl}}\left(\frac{m_{\mathrm{pl}}}{m_{\mathrm{GUT}}}\right),$$

где m_{pl} и l_{pl} соответственно планковская масса и длина, G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Натяжение космической струны пропорционально линейной плотности массы ρ_l и, следуя приведенным выше соотношениям, измеряется отрицательными степенями массы Планка. Если в приведенных равенствах выбрать $m_{\mathrm{GUT}} \approx 10^{15}$ ГэВ, $\lambda \approx 10^{-2}$, то радиус поперечного сечения космической струны $r_s \approx 10^{-31}$ м.

Для описания движения струн в том случае, когда радиус поперечного сечения струны r_s много меньше радиуса изгиба струны, используется приближение, в котором положение струны задается линией в D-мерном пространстве—времени. В этом случае траекторией струны является двумерная мировая поверхность, математически задаваемая функциями $x^m(\tau,\sigma)$, где τ и σ — параметры на мировой поверхности струны, σ — пространственно-подобный параметр, помечающий точки вдоль струны, τ — времени-подобный параметр.

Обобщением действия точечной частицы на случай струны, предложенным Намбу и Гото, есть выбор действия, пропорционального площади мировой поверхности, которую заметает струна во время своего движения:

$$S = -2\rho_l \int d\tau d\sigma \sqrt{-g},$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^m G_{mn} \partial_\beta x^n$ — метрический тензор на мировой поверхности струны, G_{mn} — метрический тензор внешнего (фонового) пространства-времени, $m; n = 0, 1, \ldots, D-1$; $\alpha; \beta = 0, 1$.

Можно заметить, что действие Намбу—Гото не может быть применено в случае, если отсутствует натяжение струны. Для того, чтобы обойти эту трудность, в рассмотрение вводят вспомогательную функцию $E(\tau,\sigma)$, которая интерпретируется как двухмерная листовая плотность. С помощью этой функции функционал действия для струны принимает вид [4]

$$S = \int d\tau d\sigma \left[\frac{g}{E(\tau,\sigma)} - \rho_l^2 E(\tau,\sigma)\right].$$

Данное представление классически эквивалентно представлению Намбу—Гото. В чем легко убедиться, если воспользоваться уравнением движения для вспомогательного поля E, с помощью которого оно выключается из представления:

$$E = \rho_l^{-1}\sqrt{-g}.$$

[a] E-mail: lelyakov_a_p@cfuv.ru

Нуль-струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для струн Намбу—Гото [3, 10] (т. е. описывают предельный случай, в котором точки струны могут взаимодействовать только с окружающим (внешним) гравитационным полем (но не друг с другом)), а поскольку натяжение струны измеряется отрицательными степенями массы Планка $m_{\rm pl}$, то предел нулевого натяжения соответствует асимптотически большим масштабам энергии $E \gg m_{\rm pl}$. С этой точки зрения нуль-струны реализуют высокотемпературную фазу теории струн [2, 4], т. е. могли образовываться на ранних этапах эволюции Вселенной и, таким образом, возможно, участвовали в процессах формирования структуры наблюдаемой Вселенной.

Так, в работе [2] была рассмотрена возможность нуль-струнного механизма инфляции для случая D-мерных пространств Фридмана—Робертсона—Уокера (ФРУ). В работе отмечена возможность существования фазы идеального газа нуль-струн (сжимающихся или расширяющихся) и описываемых точным уравнением состояния $\rho = P(D-1)$. Рассматривая эту фазу газа нуль-струн как доминантный источник гравитации в пространствах ФРУ, вычислены возможные скейлинговые факторы $R(t)$:

$$R_I(t) = [q \cdot (t_c - t)]^{2/D}, \quad t < t_c,$$
$$R_{II}(t) = [q \cdot (t - t_c)]^{2/D}, \quad t > t_c,$$

где $q = (4\pi G_D A/(D-1)(D-2))^{1/2}$; G_D, A, t_c — константы. Решение $R_I(t)$ описывает режим ускоренного сжатия D-мерной Вселенной ($dR/dt < 0$, $d^2R/dt^2 < 0$) с коллапсом в момент $t = t_c$. Второе решение $R_{II}(t)$ описывает режим замедленного расширения Вселенной ($dR/dt > 0$, $d^2R/dt^2 < 0$) из сверхсжатого состояния с нулевым объемом.

В данной работе переход к идеальному газу нуль-струн был совершен посредством $(D-1)$-мерного пространственного усреднения по их ансамблю тензора энергии—импульса одной нуль-струны, однако неисследованной осталась сама возможность рассматривать газ нуль-струн в качестве доминантного источника гравитации. Хорошо известно, что, в соответствии с классификацией Петрова [11], пространства ФРУ относятся к типу **O** (конформно-плоское пространство—время). Вопрос о гравитационном поле идеального газа нуль-струн в работе [2] остался нерешенным. Требующей дополнительного исследования осталась и возможность существования фазы идеального газа сжимающихся или расширяющихся нуль-струн.

Одним из направлений в исследовании свойств газа нуль-струн стали исследования влияния гравитационного поля различных устойчивых во времени конфигураций нуль-струн на динамику пробной нуль-струны. Так, исследование движения пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой нуль-струны постоянного радиуса [12], проведенное в работах [13, 14], а также в гравитационном поле замкнутой нуль-струны, радиально расширяющейся или радиально сжимающейся в плоскости, проведенное в работах [15–19], позволяет предполагать возможность реализации ряда интересных свойств газа нуль-струн. Например, было показано, что:

- для пробной нуль-струны всегда существует только «узкая» область («зона взаимодействия»), находясь в которой пробная нуль-струна может взаимодействовать с нуль-струной (источником), что говорит о возможности реализации «зернистой» структуры пространства, заполненного газом нуль-струн;
- для каждой пробной нуль-струны, попавшей в «зону взаимодействия», существуют аномальные участки траектории, на которых пробная нуль-струна за очень короткий промежуток времени или ускоренно «выталкивается» на бесконечность, или ускоренно «притягивается» из бесконечности, что подтверждает, хотя и косвенно, гипотезу о возможной струнной природе механизма инфляции Вселенной;
- показана возможность существования состояния (фазы) газа нуль-струн, в котором замкнутые нуль-струны располагаются в параллельных плоскостях (эффект поляризации) и, не изменяя своей начальной формы, движутся в одном направлении (т. е. образуют нуль-струнный домен);
- действие гравитационного поля домена нуль-струн может приводить к устойчивым во времени колебаниям пробной нуль-струны внутри ограниченной области пространства. Эти устойчивые во времени и ограниченные в пространстве области можно рассматривать как локализованные в пространстве частицы с эффективной ненулевой массой покоя;
- свойства данных частиц должны определяться траекториями нуль-струн, движущихся внутри ограниченной области пространства, причем под действием изменяющихся внешних условий один сорт частиц может переходить в другой;

Предлагаемая работа посвящена начальному этапу в исследовании влияния формы замкнутой нуль-струны на ее гравитационные свойства, а именно поиску решения уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны с осевой симметрией, радиально увеличивающей свой размер.

1. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

В цилиндрической системе координат $x^0 = t$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$ функции $x^m(\tau, \sigma)$, определяющие траекторию движения (мировую поверхность) замкнутой нуль-струны, рассматриваемую в настоящей работе, имеют вид:

$$t = \tau, \quad \rho = \tau, \quad \theta = \sigma, \quad z = q(\theta), \tag{1}$$

где $\tau \in [0, +\infty)$, $\sigma \in [0; 2\pi]$, функция $q(\theta)$ удовлетворяет условиям замкнутости нуль-струны $q(\theta) = q(\theta + 2\pi)$ и инвариантности относительно инверсии θ на $-\theta$.

Отметим, что траекториям (1) соответствует случай радиального расширения замкнутой нуль-струны, при котором форма нуль-струны, определяемая функцией $q(\theta)$, не зависит от времени. Для (1) все точки нуль-струны в каждый момент времени t находятся на поверхности цилиндра радиуса $\rho = t$, т. е. находятся на гиперповерхности $\eta = t - \rho = 0$.

Квадратичная форма пространства—времени, инвариантная относительно инверсии η на $-\eta$ и θ на $-\theta$, для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (2)$$

где ν, μ, A, B функции переменных t, ρ, θ, z. Движение нуль-струны в псевдоримановом пространстве—времени определяется системой уравнений [2]:

$$x^\alpha_{,\tau\tau} + \Gamma^\alpha_{pq} x^p_{,\tau} x^q_{,\tau} = 0, \quad (3)$$

$$g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,\tau} x^\beta_{,\tau} = 0, \quad g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,\tau} x^\beta_{,\sigma} = 0, \quad (4)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор внешнего пространства—времени, Γ^α_{pq} — символы Кристоффеля, $x^\alpha_{,\tau} = \partial x^\alpha/\partial\tau$, индексы α, β, p, q принимают значение $0, 1, 2, 3$. Так как траектория движения нуль-струны (1) должна быть частным решением уравнений движения то анализ данных уравнений может дать дополнительные ограничения на функции квадратичной формы (2). Расписывая уравнения движения нуль-струны для (2), можно показать, что для траектории (1) уравнения (3), (4) приводят к равенствам

$$e^{2\nu} = A, \quad \nu = \nu(\eta, z, \theta), \quad (5)$$

где

$$\eta = t - \rho. \quad (6)$$

Анализ системы уравнений Эйнштейна, построенной для (2), (5), (6), позволяет доопределить зависимость функций квадратичной формы (2), а именно:

$$\mu = \mu(\eta, z, \theta), \quad B = B(\eta, z, \theta), \quad (7)$$

при этом система Эйнштейна принимает вид

$$(2\mu_{,\eta} + B_{,\eta}/B)_{,\eta} - 2\nu_{,\eta}(2\mu_{,\eta} + B_{,\eta}/B) + \\ + \left((2\mu_{,\eta})^2 + (B_{,\eta}/B)^2\right)/2 = -2\chi\Lambda_1, \quad (8)$$

$$B_{,zz}/B - (B_{,z}/B)^2/2 + (\nu_{,z} - \mu_{,z}) B_{,z}/B + \\ + 2(\nu_{,zz} + (\nu_{,z})^2 - \nu_{,z}\mu_{,z}) + \\ + 2e^{2\mu}\{(\nu+\mu)_{,\theta\theta} + ((\nu_{,\theta})^2 + (\mu_{,\theta})^2 + \nu_{,\theta}\mu_{,\theta}) - \\ - (\nu+\mu)_{,\theta} B_{,\theta}/2B\}/B = \Lambda_2, \quad (9)$$

$$\nu_{,zz} + \nu_{,z}\left(\ln\left(e^{\nu-\mu}/\sqrt{B}\right)\right)_{,z} - \\ - \left\{\nu_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta}\left(\ln\left(e^{\nu-\mu}/\sqrt{B}\right)\right)_{,\theta}\right\} e^{2\mu}/B = \Lambda_3, \quad (10)$$

$$\left(\ln\left[\nu_{,z} e^{2\nu}\sqrt{Be^{-2\mu}}\right]\right)_{,z} \nu_{,z} e^{-2\mu} + \\ + \left(\ln\left[\nu_{,\theta} e^{2\nu}\sqrt{e^{2\mu}/B}\right]\right)_{,\theta} \nu_{,\theta}/B = \Lambda_4, \quad (11)$$

$$(2\nu_{,z} + B_{,z}/B)_{,\eta} - \nu_{,z}(2\mu_{,\eta} + B_{,\eta}/B) - \\ - (2\mu_{,\eta} - B_{,\eta}/B) B_{,z}/2B = \Lambda_5, \quad (12)$$

$$2(\nu+\mu)_{,\eta\theta} - (\nu+\mu)_{,\theta} B_{,\eta}/B - \\ - 2\mu_{,\eta}(\nu-\mu)_{,\theta} = \Lambda_6, \quad (13)$$

$$-2\nu_{,\theta z} + 2\nu_{,z}(\mu-\nu)_{,\theta} + \nu_{,\theta} B_{,z}/B = \Lambda_7, \quad (14)$$

где $\chi = 8\pi G$ (в системе единиц $c = 1$), G — гравитационная постоянная,

$$\Lambda_1 = \varrho\left(e^{2\nu}/e^{\mu}\sqrt{B}\right)\delta(\eta)\delta(z - q(\theta)), \\ \Lambda_2 = \dots = \Lambda_7 = 0, \quad \varrho = \text{const}. \quad (15)$$

Для (5), (7) квадратичная форма (2) принимает вид

$$dS^2 = e^{2\nu}\left((dt)^2 - (d\rho)^2\right) - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (16)$$

где ν, μ, B — функции переменных η, z, θ.

При интегрировании уравнений Эйнштейна (8)–(14) удобно перейти от модели нуль-струны как одномерного объекта к модели нуль-струны в виде тонкой трубки безмассового скалярного поля («размазанной» нуль-струны). В этом случае необходимо требовать, чтобы в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект компоненты тензора энергии—импульса скалярного поля асимптотически совпали с компонентами нуль-струнного тензора энергии—импульса. Данный алгоритм позволяет определить условия, при которых тонкие трубки скалярного поля можно считать «размазанной» нуль-струной.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ «РАЗМАЗАННОГО» РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Компоненты тензора энергии—импульса для вещественного безмассового скалярного поля имеют вид [8]:

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - g_{\alpha\beta}L/2, \quad (17)$$

где $L = g^{\omega\lambda}\varphi_{,\omega}\varphi_{,\lambda}$; $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi/\partial x^\alpha$; φ — функция распределения скалярного поля, индексы $\alpha, \beta, \omega, \lambda$ принимают значение $0, 1, 2, 3$. Для того, чтобы обеспечить самосогласованность уравнений Эйнштейна для (16), (17), будем требовать

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\eta, z, \theta) \Rightarrow \varphi = \varphi(\eta, z, \theta). \quad (18)$$

Система уравнений Эйнштейна для (16)–(18) может быть приведена к системе (8)–(14) с функциями в правой части:

$$\Lambda_1 = (\varphi_{,\eta})^2, \quad \Lambda_2 = -\chi\left\{(\varphi_{,z})^2 + (\varphi_{,\theta})^2 e^{2\mu}/B\right\}, \\ \Lambda_3 = -\chi\left\{(\varphi_{,z})^2 - (\varphi_{,\theta})^2 e^{2\mu}/B\right\}/2, \\ \Lambda_4 = 0, \quad \Lambda_5 = -2\chi\varphi_{,\eta}\varphi_{,z}, \\ \Lambda_6 = -2\chi\varphi_{,\eta}\varphi_{,\theta}, \quad \Lambda_7 = \chi\varphi_{,z}\varphi_{,\theta}. \quad (19)$$

Если рассматривать систему уравнений (8)–(14), (19) для распределения скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области» («размазанной» нуль-струны), для которой переменные η и z принимают значение в интервале

$$\eta \in [-\Delta\eta, +\Delta\eta], \quad z \in [q(\theta) - \Delta z, q(\theta) + \Delta z], \\ \theta = 0 \dots 2\pi, \quad (20)$$

где $\Delta\eta$ и Δz — малые положительные константы, определяющие «толщину» «размазанной» нуль-струны, то пространство, в котором находится такая «размазанная» нуль-струна и для которого переменные η и z принимают значение в интервале $\eta \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$, условно можно разбить на три области:

$$\textit{область}\ \mathrm{I}: \quad \eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty), \quad z \in (-\infty, +\infty), \ \theta = 0 \ldots 2\pi; \tag{21}$$

$$\textit{область}\ \mathrm{II}: \quad \eta \in [-\Delta\eta, +\Delta\eta], \quad z \in (-\infty, q(\theta) - \Delta z) \cup (q(\theta) + \Delta z, +\infty), \theta = 0 \ldots 2\pi; \tag{22}$$

$$\textit{область}\ \mathrm{III}: \quad \eta \in [-\Delta\eta, +\Delta\eta], \quad z \in [q(\theta) - \Delta z, q(\theta) + \Delta z], \ \theta = 0 \ldots 2\pi. \tag{23}$$

Сравнивая функции, стоящие в правой части системы уравнений Эйнштейна (8)–(14) для замкнутой нуль-струны (15) и тонкой трубки скалярного поля (19), видим, что при стягивании скалярного поля в струну, то есть при $\Delta\eta \to 0$, $\Delta z \to 0$,

$$\begin{gathered} \left\{(\varphi_{,z})^2;\ (\varphi_{,\theta})^2\right\}\big|_{\eta\to 0,\, z\to q(\theta)} \to 0, \\ (\varphi_{,\eta})^2\big|_{\eta\to 0,\, z\to q(\theta)} \to \infty, \\ \left\{(\varphi_{,\eta}\varphi_{,z});\ (\varphi_{,\eta}\varphi_{,\theta});\ (\varphi_{,\eta}\varphi_{,\theta})\right\}\big|_{\eta\to 0,\, z\to q(\theta)} \to 0, \end{gathered} \tag{24}$$

а вне области, где сконцентрировано скалярное поле (в *области* I и II), —

$$\varphi \to 0, \quad \varphi_{,\eta} \to 0, \quad \varphi_{,z} \to 0, \quad \varphi_{,\theta} \to 0. \tag{25}$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Для приведенных условий (24), (25) функцию распределения скалярного поля удобно представить в виде [20]

$$\varphi(\eta, z, \theta) = -\ln\left(\left(\alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(Q)\right)^{\gamma}\right), \tag{26}$$

где $Q = Q(z, \theta) = z - q(\theta)$, γ — некоторая положительная константа.

Отметим, что вид функции распределения (26) не является общим, а ее выбор нужно рассматривать как один из возможных способов «размазывания» нуль-струны. Вид функции распределения скалярного поля должен влиять на гравитационные свойства модели струны в виде трубки скалярного поля. Однако, поскольку нуль-струне соответствует случай, в котором скалярное поле стягивается в одномерный объект, то способ «размазывания» не может быть существен.

Можно показать, что для распределения (26) условия (24), (25) приводят к следующим ограничениям на функции $\alpha(\eta)$, $\lambda(\eta)$ и $f(Q)$.

1. Функции $\lambda(\eta)$ и $\alpha(\eta)$ связаны соотношением

$$\lambda(\eta) = (1 - \alpha(\eta))/f_0, \quad f_0 = \mathrm{const}. \tag{27}$$

2. В пределе сжатия в одномерный объект (нуль-струну) должны быть выполнены условия (при $\Delta\eta \to 0$, $\Delta z \to 0$)

$$\begin{gathered} \left|\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right|_{\eta\to 0} \to \infty, \quad \left.\frac{f_{,Q}}{f(Q)}\right|_{Q\to 0} \to 0, \\ \left.\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)} \frac{f_{,Q}}{f(Q)}\right|_{\eta\to 0,\, Q\to 0} \to 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Ниже приведен один из примеров функций $\alpha(\eta)$ и $f(Q)$, удовлетворяющих найденным условиям:

$$\alpha(\eta) = \exp\left(-(\xi(\eta + \epsilon/\xi))^{-2}\right), \tag{29}$$

$$f(Q) = f_0 \exp\left(-\varsigma\left(1 - \exp\left(-(\zeta(Q + \epsilon/\zeta))^{-2}\right)\right)\right), \tag{30}$$

где константы ξ и ζ определяют размер («толщину») «кольца», внутри которого сконцентрировано скалярное поле по переменным η и z соответственно, а положительные константы ϵ и ς обеспечивают выполнение условий (28), а именно, как следует из (29), (3), при $\Delta\eta \to 0$, $\Delta z \to 0$: $\xi \to \infty$, $\zeta \to \infty$, $\epsilon \to 0$, $\varsigma \to \infty$.

Используя (27), (29), (3) для (26), получаем выражение одного из возможных распределений скалярного поля, компоненты тензора энергии—импульса, для которого при сжатии в одномерный объект асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии—импульса замкнутой нуль-струны, движущейся по траектории (1).

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ РАЗМАЗАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дополним систему уравнений Эйнштейна (8)–(14), (19) уравнением скалярного поля, которое для тензора (17) есть

$$\left(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{;\beta} = 0, \tag{31}$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную. Для (16)–(18) уравнение (31) принимает вид

$$\left(\ln\left[\varphi_{,z} e^{2\nu}\sqrt{Be^{-2\mu}}\right]\right)_{,z} \varphi_{,z} e^{-2\mu} + \left(\ln\left[\varphi_{,\theta} e^{2\nu}\sqrt{e^{2\mu}/B}\right]\right)_{,\theta} \varphi_{,\theta}/B = 0. \tag{32}$$

Сравнивая уравнения (11), (19) и (32), находим

$$\nu_{,z} = c(\eta)\varphi_{,z}, \quad \nu_{,\theta} = c(\eta)\varphi_{,\theta}, \tag{33}$$

откуда

$$\nu = \nu(\eta, z, \theta) = \nu(\eta, Q) = c(\eta)\varphi(\eta, Q) + \nu_0(\eta). \tag{34}$$

Для (34) уравнение (14), (19) может быть приведено к виду

$$\left(\ln\left[(\varphi_{,Q})^2 e^{2c(\eta)\varphi\left(1 + \chi/\left(2c^2(\eta)\right)\right)}\right]\right)_{,Q} = B_{,z}/B - 2\mu_{,\theta}/q_{,\theta}. \tag{35}$$

Можно заметить, что правая часть полученного равенства должна быть функцией переменных η и Q:

$$B_{,z}/B - 2\mu_{,\theta}/q_{,\theta} = F(\eta, Q). \tag{36}$$

Из (36)

$$\begin{gathered} B = B(\eta, z, \theta) = B_1 B_2, \\ \mu = \mu(\eta, z, \theta) = \mu_1 + \mu_2, \end{gathered} \tag{37}$$

где $B_1 = B_1(\eta, Q)$, $B_2 = B_2(\eta, \theta)$, $\mu_1 = \mu_1(\eta, Q)$, $\mu_2 = \mu_2(\eta)$.

Интегрируя уравнение (35) для (37), находим

$$e^{2\mu_1}B_1 = (c_1)^2(\varphi_{,Q})^2 e^{2c(\eta)\varphi\left(1+\chi/\left(2c^2(\eta)\right)\right)}, \quad (38)$$

где $(c_1)^2 = (c_1(\eta))^2$ — «константа» интегрирования.

Уравнение (10) для (14), (19), (34), (37) при условии

$$q_{,\theta} \neq 0 \quad (39)$$

принимает вид

$$B_{2,\theta}/B_2 = 2q_{,\theta\theta}/q_{,\theta}. \quad (40)$$

Интегрируя уравнение (40), находим

$$B_2(\eta,\theta) = \beta(q_{,\theta})^2, \quad (41)$$

где $\beta = \beta(\eta)$ — «константа» интегрирования. Для (34), (37), (41) уравнение скалярного поля (32) и уравнение (9), (19) соответственно принимают вид

$$\left(\ln\left[\varphi_{,Q}\left(\left(e^{2(\mu_1+\mu_2)}+\beta B_1\right)/ e^{2\mu_2}\beta\sqrt{B_1 e^{2\mu_1}}\right)e^{2\nu}\right]\right)_{,Q} = 0, \quad (42)$$

$$\left(\ln\left[\left(e^{2(\mu_1+\mu_2)}+\beta B_1\right)_{,Q}/\sqrt{B_1 e^{2\mu_1}}\right]\right)_{,Q} = -2\nu_{,Q}. \quad (43)$$

Интегрируя уравнения (42), (43), учитывая (34), (38), находим

$$e^{2(\mu_1+\mu_2)}+\beta B_1 = c_1c_2e^{2\mu_2}\beta e^{-2\nu_0(\eta)}e^{-\left(c(\eta)-\chi/(2c(\eta))\right)\varphi}, \quad (44)$$

$$\left(e^{2(\mu_1+\mu_2)}+\beta B_1\right)_{,Q} = c_1c_3\varphi_{,Q}e^{-2\nu_0(\eta)}e^{-\left(c(\eta)-\chi/(2c(\eta))\right)\varphi}, \quad (45)$$

где $c_2 = c_2(\eta)$ и $c_3 = c_3(\eta)$ — «константы» интегрирования. Дифференцируя равенство (44) по переменной Q, находим выражение для функции $c_3(\eta)$:

$$c_3(\eta) = -\beta(\eta)c_2(\eta)e^{2\mu_2(\eta)}\left(c(\eta)-\chi/(2c(\eta))\right). \quad (46)$$

Можно отметить, что для (34), (37), (41), (44) уравнение (11), (19) выполняется тождественно. Применяя равенство (38) для (44), получаем алгебраическое уравнение

$$\beta\,(B_1)^2 - bB_1 + a = 0, \quad (47)$$

где обозначено

$$b = c_1c_2e^{2\mu_2}\beta e^{-2\nu_0}e^{-c(\eta)\varphi\left(1-\frac{\chi}{2c^2(\eta)}\right)}, \qquad a = e^{2\mu_2}(c_1)^2(\varphi_{,Q})^2e^{2c(\eta)\varphi\left(1+\frac{\chi}{2c^2(\eta)}\right)}. \quad (48)$$

Отметим, что, согласно (38), (44),

$$b = \left(e^{2(\mu_1+\mu_2)}+\beta B_1\right), \quad a = e^{2(\mu_1+\mu_2)}B_1. \quad (49)$$

Дискриминант уравнения (47) при использовании (48), (49) есть

$$D = \left(e^{2(\mu_1+\mu_2)}-\beta B_1\right)^2. \quad (50)$$

Из (50) следует, что $D=0$ в случае

$$e^{2(\mu_1+\mu_2)} = \beta B_1 \quad (51)$$

и $D>0$ в случае

$$e^{2(\mu_1+\mu_2)} \neq \beta B_1. \quad (52)$$

Как следует из (34), (38), (44) случай (51) приводит к уравнению, связывающему функцию распределения скалярного поля φ и «константы» интегрирования:

$$2e^{c(\eta)\varphi+\nu_0(\eta)}\varphi_{,Q} = c_2\sqrt{e^{2\mu_2}\beta(\eta)}. \quad (53)$$

Интегрируя (53), находим

$$\varphi(\eta,Q) = -\nu_0(\eta)/c(\eta) + \left(\ln\left(c(\eta)c_2(\eta)\sqrt{e^{2\mu_2}\beta(\eta)}Q+\varphi_0(\eta)\right)\right)/2c(\eta), \quad (54)$$

где $\varphi_0(\eta)$ — «константа» интегрирования. Легко заметить, что функция (54) не может реализовать распространение локализованного по переменной z объекта, поэтому случай (51) не реализуется. Корни уравнения (47) для (50), (52) следующие:

$$B_1|_{1;2} = c_1c_2e^{-2(\nu_0-\mu_2)-\varphi\left(c-\frac{\chi}{2c}\right)} \times \left[1\pm\sqrt{1-\left(2\varphi_{,Q}e^{2\nu}/\sqrt{e^{2\mu_2}\beta}c_2\right)^2}\right]/2; \quad (55)$$

тогда, используя (44),

$$e^{2\mu_1}\big|_{1;2} = c_1c_2\beta e^{-2\nu_0-\varphi\left(c-\frac{\chi}{2c}\right)} \times \left[1\mp\sqrt{1-\left(2\varphi_{,Q}e^{2\nu}/\sqrt{e^{2\mu_2}\beta}c_2\right)^2}\right]/2. \quad (56)$$

Оставшиеся три уравнения системы, (8), (12) и (13), рассматриваемые для (34), (55) и (56), определяют условия, связывающее между собой функции («константы» интегрирования): $c(\eta)$, $c_1(\eta)$, $c_2(\eta)$, $\mu_2(\eta)$, $\nu_0(\eta)$, $\beta(\eta)$, их производные и константу γ.

Так, разность уравнений (12) и (13) для (19), (34), (37), (41) есть

$$\left(\frac{(\beta B_1)_{,\eta}}{\beta B_1}-\frac{(e^{2\mu})_{,\eta}}{e^{2\mu}}\right)_{,Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\beta B_1)_{,\eta}}{\beta B_1}-\frac{(e^{2\mu})_{,\eta}}{e^{2\mu}}\right) \times \left(\frac{B_{1,Q}}{B_1}+\frac{(e^{2\mu_1})_{,Q}}{e^{2\mu_1}}\right) = 0. \quad (57)$$

Согласно (26), (27) функция $\varphi(\eta,Q)$, определяющая распределение скалярного поля, удовлетворяет уравнениям

$$\varphi_{,QQ} - \left(f_{,QQ}/f_{,Q}\right)\varphi_{,Q} - (\varphi_{,Q})^2/\gamma = 0, \quad (58)$$

$$\varphi_{,\eta\eta} - \left(\alpha_{,\eta\eta}/\alpha_{,\eta}\right)\varphi_{,\eta} - (\varphi_{,\eta})^2/\gamma = 0, \quad (59)$$

$$\varphi_{,\eta Q} - \left(\lambda_{,\eta}/\lambda(\eta)\right)\varphi_{,Q} - \varphi_{,\eta}\varphi_{,Q}/\gamma = 0. \quad (60)$$

Для (55), (56), (58), (60) уравнение (57) может быть записано в виде

$$\psi_0 + \psi_1\varphi + \psi_2\varphi_{,\eta} + \psi_3\varphi_{,Q} + \psi_4\varphi_{,Q}\varphi + \\ + \psi_5\varphi_{,Q}\varphi_{,\eta} + \psi_6(\varphi_{,Q})^2\varphi + \psi_7(\varphi_{,Q})^3\varphi + \\ + \psi_8(\varphi_{,Q})^3 + \psi_9(\varphi_{,Q})^3\varphi_{,\eta} + \psi_{10}\varphi_{,\eta Q} = 0, \quad (61)$$

где ψ_i, $i = 0, 1, \ldots, 10$ — функции, содержащие «константы» интегрирования, их производные, константу γ, а также функции, определяющие распределение скалярного поля, например

$$\psi_0 = \frac{f_{,QQ}}{f_{,Q}}\left[\ln\left(\frac{\lambda e^{2\nu_0}}{\sqrt{e^{2\mu_2}\beta}c_2}\right)\right]_{,\eta},$$

$$\psi_2 = \left(\frac{1}{\gamma} + 2c(\eta)\right)\frac{f_{,QQ}}{f_{,Q}}, \quad \psi_{10} = \left(\frac{1}{\gamma} + 2c(\eta)\right).$$

Можно показать, что требование

$$\begin{gathered}(1/\gamma + 2c(\eta)) = 0,\\ \lambda e^{2\nu_0}/\sqrt{e^{2\mu_2}\beta}c_2 = c_4 = \text{const},\end{gathered} \quad (62)$$

есть «тривиальное» решение уравнения (61) (т. е. решение для $\psi_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, 10$) и которое для уравнения (57) соответствует случаю

$$(\beta B_1)_{,\eta}/\beta B_1 - (e^{2\mu})_{,\eta}e^{-2\mu} = 0. \quad (63)$$

С другой стороны, можно показать, что требование

$$(1/\gamma + 2c(\eta)) \neq 0, \quad (64)$$

которое для уравнения (57) соответствует случаю

$$(\beta B_1)_{,\eta}/\beta B_1 - (e^{2\mu})_{,\eta}/e^{-2\mu} \neq 0, \quad (65)$$

приводит к противоречию. Так, для (64), приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях функции φ и ее производных, уравнений (60) и (61), в частности, получаем требование $\psi_2 = 0$, которое приводит к уравнению

$$f_{,QQ}/f_{,Q} = 0, \Rightarrow f(Q) = \tilde{c}Q + \hat{c}, \quad (66)$$

где $\tilde{c}$ и $\hat{c}$ — константы, решение которого, очевидно, не может выполнить требования (28). Поэтому случай (65) не реализуется. Сумма уравнений (12) и (13) для (19), (34), (37), (41), (55), (56), учитывая (62)–(63), есть

$$\varphi_{,\eta Q} - 2\left(\ln\left(\lambda c_1\sqrt{e^{2\mu_2}\beta}\right)\right)_{,\eta}\varphi_{,Q}/(1 + 2\chi\gamma^2) - \\ - \varphi_{,q}\varphi_{,\eta}/\gamma = 0. \quad (67)$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях функции φ и ее производных уравнений (60) и (67), получаем

$$\left(\ln\left(\lambda c_1\sqrt{e^{2\mu_2}\beta}\right)\right)_{,\eta} = (1 + 2\chi\gamma^2)\left(\ln\left(\sqrt{\lambda}\right)\right)_{,\eta}. \quad (68)$$

Интегрируя (68), находим

$$c_1(\eta) = \tilde{c}_1\frac{(\lambda(\eta))^{(\chi\gamma^2 - \frac{1}{2})}}{\sqrt{e^{2\mu_2(\eta)}\beta(\eta)}}, \quad (69)$$

где $\tilde{c}_1$ — константа интегрирования.

Для (19), (34), (37), (41), (55), (56), учитывая (62), (63), (69), уравнение (8) есть

$$\Psi_0(\eta) + \varphi_{,\eta\eta} + \Psi_1(\eta)\varphi_{,\eta} + \Psi_2(\varphi_{,\eta})^2 = 0, \quad (70)$$

где

$$\Psi_0(\eta) = \frac{\gamma(1 + 2\chi\gamma^2)}{(1 - 2\chi\gamma^2)}\left[\left(\frac{\lambda_{,\eta}}{\lambda}\right)_{,\eta} - \\ - 2\nu_{0,\eta}\frac{\lambda_{,\eta}}{\lambda} + \frac{1}{4}(1 + 2\chi\gamma^2)\left(\frac{\lambda_{,\eta}}{\lambda}\right)^2\right], \quad (71)$$

$$\Psi_1(\eta) = -2\nu_{0,\eta} + \\ + \left[\frac{(1 + 2\chi\gamma^2)}{(1 - 2\chi\gamma^2)} + \frac{1}{2}(1 + 2\chi\gamma^2)\right]\frac{\lambda_{,\eta}}{\lambda}, \quad (72)$$

$$\Psi_2 = \left(\frac{1}{2\gamma} - \chi\gamma\right)^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}(1 - 2\chi\gamma^2) + \\ + \frac{1}{8\gamma^2}(1 - 2\chi\gamma^2)^2 + \chi\right). \quad (73)$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях функции φ и ее производных, уравнений (59) и (70), находим условия на функции Ψ_i уравнения (70):

$$\Psi_0(\eta) = 0, \quad \Psi_1(\eta) = -\alpha_{,\eta\eta}/\alpha_{,\eta}, \quad \Psi_2 = -1/\gamma. \quad (74)$$

Интегрируя уравнения (71)–(73) для (74), находим

$$\gamma = \sqrt{3/2\chi}, \quad e^{2\nu_0(\eta)} = c_5|\lambda_{,\eta}|, \quad (75)$$

где c_5 — константа интегрирования.

Таким образом, используя (26), (34), (37), (41), (55), (56), (62), (69), (75), получаем выражение для искомых метрических функций квадратичной формы (16):

$$e^{2\nu} = c_5|\lambda_{,\eta}|(\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(Q)), \quad (76)$$

$$B = \frac{3\tilde{c}_1c_4}{\chi}\lambda^2(\eta)(\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(Q))\times \\ \times \frac{(f_{,Q})^2(q_{,\theta})^2}{\left[1 \mp \sqrt{1 - \left(c_4\sqrt{6/\chi}f_{,Q}\right)^2}\right]}, \quad (77)$$

$$e^{2\mu} = \frac{3\tilde{c}_1c_4}{\chi}\lambda^2(\eta)(\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(Q))\times \\ \times \frac{(f_{,Q})^2}{\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(c_4\sqrt{6/\chi}f_{,Q}\right)^2}\right]}, \quad (78)$$

где значение константы c_4 (нормировочная константа) должно обеспечивать выполнение неравенства

$$0 < \left(c_4\sqrt{6/\chi}f_{,Q}\right)^2 \leqslant 1,$$

а ее величина, в соответствии с (3), зависит от значения констант f_0, ς и ζ, определяющих размер («толщину») «кольца», внутри которого сконцентрировано скалярное поле по переменной z, а именно $c_4 \sim \sqrt{\chi}/f_0\varsigma\zeta$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для приведенных функций (76)–(78) все компоненты тензора Вейля равны нулю. Таким образом, в соответствии с классификацией Петрова [11], найденное решение соответствует типу **O**, т. е. описывает конформно-плоское пространство–время. Полученный результат подтверждает возможность выбора идеального газа нуль-струн в качестве доминантного источника гравитации при исследовании нуль-струнного механизма инфляции в пространствах Фридмана—Робертсона—Уокера, которое приведено в работе [2].

Частным случаем траекторий движения, определяемых (1), является траектория, соответствующая требованию $q(\theta) = q = \text{const}$, которая описывает радиальное расширение замкнутой нуль-струны в виде окружности в плоскости $z = q = \text{const}$, решение уравнений Эйнштейна для которой было приведено в работах [15–17]. Интересно отметить, что система уравнений Эйнштейна (8)–(14) для нуль-струны с осевой симметрией в предельном случае $q(\theta) = q = \text{const}$ полностью совпадает с системой для нуль-струны в виде окружности, а решение (76)–(78) в пределе $q(\theta) \to q = \text{const}$ не может быть приведено к решению, приведенному в работах [15–17]. Отсутствие при $q(\theta) \to q = \text{const}$ предельного перехода между данными решениями говорит об устойчивости конфигурации замкнутой нуль-струны в виде окружности при движении во внешнем гравитационном поле, влияние которого для такой нуль-струны, следовательно, может сводиться к изменению ее движения как целого или к изменению ее радиуса. Начальный анализ уравнений движения пробной нуль-струны (3), (4) показал, что часть свойств газа нуль-струн, например таких, как способность к образованию доменной структуры, существование поляризованных состояний (мультиструнных систем), не зависит от формы нуль-струны, однако динамика пробной нуль-струны в поле такой мультиструнной системы, несомненно, будет иметь особенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nielsen H. M., Olesen P.* // Nucl. Phys. B. 1973. **61**. P. 45.
2. *Roshchupkin S. N., Zheltukhin A. A.* // Class. Quantum. Grav. 1995. **12**. P. 2519.
3. *Schild A.* // Phys. Rev. D. 1977. **16**. P. 1722.
4. *Roshchupkin S. N., Zheltukhin A. A.* // Nucl. Phys. B. 1999. **543**. P. 365.
5. *Vilenkin A., Shellard E. P. S.* // Cosmic string and other topological defects. Cambridge, 1994.
6. *Bennet D. P.* // Formation and Evolution of Cosmic Strings. Cambridge, 1990.
7. *Vachaspati T., Vilenkin A.* // Phys. Rev. D. 1984. **30**. P. 2036.
8. *Linde A. D.* // Particle Physics and Inflationary Cosmology. Harwood, 1990.
9. *Sazhina O.S, Sazhin M. V., Capaccioli M., Longo G.* // Phys. Usp. 2011. **54**. P. 1072.
10. *Bandos I. A., Zheltukhin A. A.* // Fortschr. Phys. 1993. **41**. P. 619.
11. *Petrov A. Z.* // New methods in general relativity theory. Moscow, 1966.
12. *Lelyakov A. P.* // Gravit. and Cosmol. 2015. **21**, N 3. P. 200.
13. *Lelyakov A. P.* // Gravit. and Cosmol. 2015. **21**, N 4. P. 309.
14. *Lelyakov A. P., Osokin C. S.* // Acta Phys. Pol. B. 2019. **50**, N 4. P. 767.
15. *Lelyakov O. P., Karpenko A. S., Babadzhan R.-D. O.* // Ukr. J. Phys. 2014. **59**. P. 1115.
16. *Lelyakov A. P., Karpenko A. S.* // Theor. and Math. Phys. 2017. **190**, N 1. P. 140.
17. *Lelyakov A. P., Babadzhan R.-D. A.* // Izvestiya Vuzov. Fiz. 2015. **58**, N 7/2. P. 147.
18. *Lelyakov A. P.* // Gravit. and Cosmol. 2017. **23**, N 1. P. 50.
19. *Lelyakov A. P., Osokin C. S.* // Acta Phys. Pol. B. 2017. **48**, N 11. P. 2045.
20. *Babadzhan R.-D. A., Lelyakov A. P.* // J. Phys. and Technol. Inst. of V. I. Vernadsky Crimean Federal University. 2017. **1 (67–69)**, N 2. P. 5.

Solution of Einstein's Equations for a Closed Null String with Axial Symmetry that Is Radially Increasing Its Size

A. P. Lelyakov[a], **O. V. Haneychuk**

Department of Theoretical Physics and Solid State Physics, Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University. Simferopol 295007, Russia.
E-mail: [a]*lelyakov_a_p@cfuv.ru*.

A solution to the Einstein equations for a closed null string with axial symmetry that is radially increases its size is found. The possibility of choosing the ideal gas of null strings as a dominant source of gravity is confirmed in the study of the null string inflation mechanism in Friedmann—Robertson—Walker spaces. The absence of a limit transition between the solution that is found and the solution for a closed circular null string that is radially changing its size is shown. This indicates the stability of the configuration of a closed circular null string during its motion in an external gravitational field. It is noted that part of the characteristics of the null string gas, such as the ability to form a domain structure and existence of stable polarized states (multi-string systems), are independent of the shape of null string, but the dynamics of the test null string in a field of such multi-string system has singularities.

Keywords: null string, gravitational field, exact solution.
PACS: 04.20.jb, 11.27.+d.
Received 31 July 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 1. Pp. 18–25.

Сведения об авторах

1. Леляков Александр Петрович — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (3652) 60-80-70, e-mail: lelyakov_a_p@cfuv.ru.
2. Ханейчук Олеся Васильевна — студент; тел.: (3652) 60-80-70, e-mail: olhan91@gmail.com.