

Редукция изображений к виду, свойственному измерению распределения прозрачности объекта, при субъективной информации о его разреженности в заданном базисе

Д. А. Балакин^a

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 19.06.2019, после доработки 19.11.2019, принята к публикации 28.11.2019.

При изучении чувствительных к свету или быстро эволюционирующих объектов число фотонов, взаимодействовавших с объектом, часто невелико, что приводит к низкому качеству восстановленного изображения объекта исследования. В этой ситуации математические методы обработки измерений должны не только обеспечить минимальную погрешность, но и использовать всю доступную исследователю информацию об объекте исследования для дополнительного уменьшения этой погрешности. Источником информации, используемой вместе с результатами измерений для построения оценки распределения оптических характеристик объекта, могут быть представления исследователя о возможном виде распределения оптических характеристик объекта и о возможных реализациях шума. В статье рассмотрен вариант *математического метода редукции измерения*, позволяющий использовать такую информацию, моделируемую средствами *математического формализма субъективного моделирования*, а также проверять с помощью данных измерений согласие с ними предложенной исследователем субъективной информации.

Ключевые слова: редукция измерения, фантомные изображения, запутанные фотоны, сжатые измерения, субъективное моделирование, верификация информации.

УДК: 519.25. PACS: 07.05.Pj, 42.50.Ex, 02.50.Le.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении быстро эволюционирующих объектов или при исследовании необратимо изменяющихся под действием излучения объектов возникает задача восстановления пространственного распределения оптических характеристик объекта исследования, так как если изучаемый объект освещается небольшим числом фотонов, погрешность непосредственно получаемого изображения, как правило, велика. В этой ситуации эффективность математических методов и алгоритмов обработки полученных измерений становится критической. Поэтому эти методы должны не только обеспечивать минимальную погрешность при заданной модели измерения для априори произвольного объекта исследования, но и позволять использовать всю доступную исследователю информацию об объекте исследования для дальнейшего уменьшения этой погрешности. Математический метод редукции измерения к виду, свойственному измерению на идеальном измерительном приборе, позволяет это сделать.

В методе редукции измерения процесс измерения моделируется системой «измеряемый объект — среда — измерительный преобразователь — вычислитель», имеющей следующий вид. В процессе взаимодействия измерительного преобразователя (ИП) с измеряемым объектом и со средой на входе ИП формируется сигнал f , который преобразуется им в выходной сигнал ИП ξ , пораженный шумом. Вычислительный преобразователь (ВП) преобразует результат измерения ξ , дополнительную и априорную информацию в выходной сигнал измерительно-вычислительного преобразователя (ИВП), рассматриваемого как средство измерения.

Задачей метода редукции измерения является получение интересующей исследователя характеристики исследуемого объекта с максимальной точностью. Для моделирования интересующей исследователя характеристики используется понятие идеального ИП. Чтобы указать, какая характеристика интересует исследователя, он определяет модель идеального ИП — оператор U . На его вход поступает тот же сигнал f , что и на вход реального ИП, но на его выходе сигнал Uf равен значению интересующей исследователя характеристики исследуемого, а не измеряемого объекта.

В качестве примера физической реализации вышеописанной схемы рассмотрим квантовые мультиплексированные фантомные изображения. Они являются одним из способов решения проблемы изучения чувствительных к свету объектов, прямое оптическое наблюдение которых затруднено. Для формирования фантомных изображений [1–3] необходим источник коррелированных световых пучков, один из которых взаимодействует с объектом, а другой — нет. При этом в объектном канале детектор дает информацию только о полной интенсивности прошедшего излучения. Сопряженный пучок не взаимодействует с объектом, но регистрируется матрицей ПЗС, допуская измерение пространственной корреляционной функции интенсивности между двумя каналами. Конкретный вид изучаемой схемы [4–7] формирования квантовых мультиплексированных фантомных изображений показан на рис. 1. В ней эти изображения формируются с помощью пучков запутанных фотонов, создаваемых при помощи связанных параметрических процессов в нелинейном кристалле (параметрический распад фотонов накачки на два фотона с разными частотами и последующее их смешение в том же кристалле с фотонами накачки).

^a balakin_d_a@physics.msu.ru

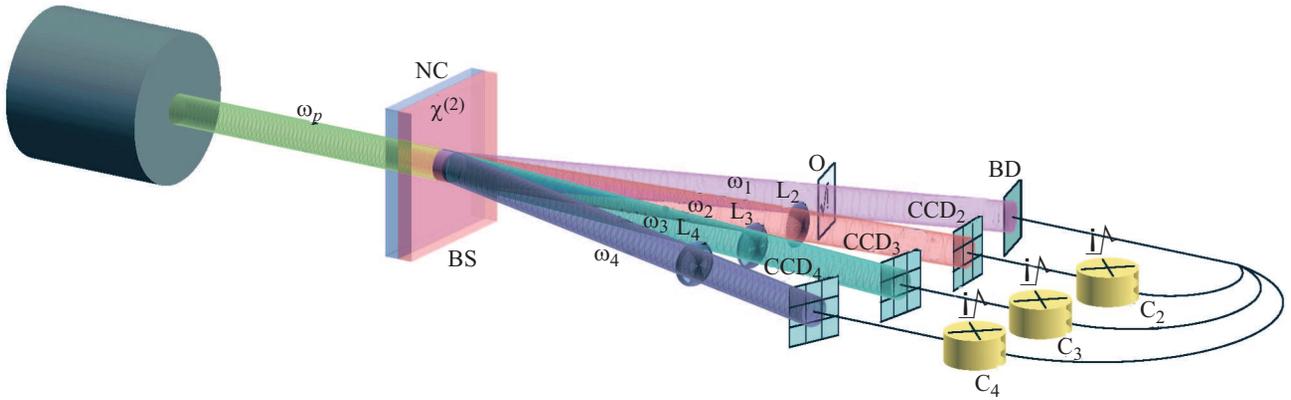


Рис. 1. Схема формирования квантовых мультимплексированных фантомных изображений [7]. NC — нелинейный кристалл, BS — светоделитель, ω_p — частота накачки, ω_1 – ω_4 — частоты полученных запутанных фотонов, O — объект исследования, L_2 – L_4 — линзы, BD — пространственно неразрешающий детектор, CCD₂–CCD₄ — детекторы, C₂–C₄ — корреляторы

Для обработки квантовых изображений (в том числе фантомных изображений) в условиях, когда погрешность непосредственно получаемого изображения недостаточно мала, как правило, применяются методы обработки результатов измерений типа регуляризации [8]. Регуляризирующим функционалом является численная характеристика разреженности изображения (например, норма L_1 изображения в выбранном базисе, отношение норм L_1 и L_2 или полная вариация) [9–13], а собственно минимизируемым функционалом — функционал наименьших квадратов [10–12, 14], функционал наименьших полных квадратов [13] или функция правдоподобия [9]. В [15, 16], напротив, минимизируется характеристика разреженности при ограничениях, согласно которым измерение восстановленного таким образом изображения дало бы полученные в действительности результаты. При этом, поскольку минимизируется функционал, не связанный с погрешностью результата интерпретации, полученная оценка, вообще говоря, не является оптимальной. Кроме того, в отличие от [9] в методе редукции измерения, включая его предлагаемый вариант, не предполагается только пуассоновская статистика фотоотсчетов.

Согласно дополнительной информации, прозрачности близко расположенных точек исследуемого объекта, как правило, отличаются слабо. Эта информация формализуется как утверждение, что *в априори заданном базисе* большинство компонент оцениваемого распределения прозрачности объекта равно нулю, т.е. как утверждение о разреженности распределения прозрачности в этом базисе. Поскольку близость точек определяется используемым базисом, существенную роль играет выбор этого базиса. Например, если прозрачности всех точек объекта одинаковы, то распределение прозрачности плотно (все его компоненты отличны от нуля) в «естественном» базисе, но весьма разрежено (лишь одна компонента отлична от нуля) в базисе дискретного косинусного преобразования, базисе Хаара или базисе дискретного вейвлет-преобразования. В [17] при сравнении трех базисов («естественного», базиса дискретного косинусного преобразования и базиса дискретного вейвлет-преобразования) базис дискретного косинусного преобразования показал лучшие

результаты. Предложенный в [7] метод и алгоритм использования информации зависит от выбираемого исследователем параметра, определяющего компромисс между подавлением шума и искажением изображения. В настоящей работе рассматривается выбор значения этого параметра, основанный на имеющихся у исследователя представлениях о виде распределения прозрачности объекта исследования и шуме и их представлении средствами субъективного моделирования [18], а также проверка согласия предложенного исследователем значения параметра с данными измерений.

1. МЕТОД РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Типичной постановкой задачи редукции является следующая. Пусть в схеме измерения $\xi = Af + \nu$ входной сигнал ИП $f \in \mathcal{F}$ — априори произвольный вектор, $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$ — линейный оператор, моделирующий физические процессы в ИП. Погрешность (шум) $\nu \in \mathcal{X}$ — случайный вектор, $\mathbb{E}\nu = 0$ и известен невырожденный корреляционный оператор шума $\Sigma_\nu: \forall x \in \mathcal{X} \Sigma_\nu x = \mathbb{E}\nu(x, \nu)$. Измерение на идеальном ИП, результат которого интересует исследователя, моделируется линейным оператором $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$. Тогда линейный оператор $R_*: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ редукции измерения ξ определится как минимизирующий максимальную по f среднеквадратичную (с.к.) погрешность интерпретации $R\xi$ как $Uf: h(R, U) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E}\|R\xi - Uf\|^2 \sim \min_{R: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}}$. Погреш-

ность минимальна [19] при $R_* = U(\Sigma_\nu^{-1/2}A)^{-}\Sigma_\nu^{-1/2}$ и равна $h(R_*, U) = \text{tr}(U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-}U^*)$, где « $^-$ » обозначает псевдообращение, если $U(I - A^-A) = 0$, иначе $h(R_*, U) = \infty$.

Если же оператор Σ_ν неизвестен, но известно ограничение на среднюю «энергию» шума $\mathbb{E}\|\nu\|^2 \leq \leq \text{tr}\Sigma_\nu \leq \delta^2$, то наиболее точная версия значения Uf есть $UA^-\xi$ и ее среднеквадратичную погрешность не превосходит $\delta^2\|U(A^*A)^{-}U^*\|$. Условием конечности ее среднеквадратичной погрешности также является равенство $U(I - A^-A) = 0$.

В рассматриваемом случае регистрации квантовых фантомных изображений в измерительной схеме используются корреляторы, измеряющие корреляции между показаниями датчиков в объектном канале

и показаниями датчиков в восстанавливающих каналах. Поэтому матрица оператора A , описывающего отклик ИП на объект, имеет блочный вид и состоит из трех блоков, выражающих сигналы на выходах корреляторов:

$$A = \begin{pmatrix} B_2 C_2 \\ B_3 C_3 \\ B_4 C_4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы B_2 – B_4 описывают детекторы. Матричный элемент $(B_i)_{pk}$ равен отклику детектора в i -м канале, находящегося в p -й позиции, на единичную прозрачность k -го пикселя объекта и нулевую прозрачность остальных. Пусть нелинейный кристалл на рис. 1 достаточно тонок, так что полоса усиления поперечных волновых чисел параметрического преобразования существенно превышает ширину волнового спектра исследуемого объекта. При этом условии в [4] получены характеризующие формирование фантомных изображений корреляционные функции интенсивности 2-го порядка, а в [6] — 4-го порядка (корреляционные функции здесь не приводятся ввиду громоздкости), согласно которым матрицы C_2 – C_4 кратны единичным. При учете дифракции, влиянием которой при указанном выше условии можно пренебречь [4], матрицы C_2 – C_4 не кратны единичным, а описывают операторы типа свертки. Матрица ковариационного оператора погрешностей также имеет блочный вид:

$$\Sigma_{\nu} = \begin{pmatrix} B_2 \Sigma_{22}(f) B_2^* & B_2 \Sigma_{23}(f) B_3^* & B_2 \Sigma_{24}(f) B_4^* \\ B_3 \Sigma_{32}(f) B_2^* & B_3 \Sigma_{33}(f) B_3^* & B_3 \Sigma_{34}(f) B_4^* \\ B_4 \Sigma_{42}(f) B_2^* & B_4 \Sigma_{43}(f) B_3^* & B_4 \Sigma_{44}(f) B_4^* \end{pmatrix} + \Sigma_{\nu'},$$

где элемент с индексами k, k' блока Σ_{ij} равен (с точностью до множителя, зависящего от единиц измерения) значению интеграла корреляционной функции 4-го порядка G_{ij} по значениям координат в объектном канале по всему полю зрения, по значениям координат в i -м восстанавливающем канале, принадлежащим k -му пикселю, и по значениям координат в j -м восстанавливающем канале, принадлежащих k' -му пикселю, где порядок нумерации пикселей тот же, что и в матрице оператора A . Слагаемое $\Sigma_{\nu'}$ — ковариационный оператор не связанной с формированием фантомных изображений части погрешности ν' , например теплового шума в электросхемах. Основная часть шума, возникающего до корреляторов, подавляется ими при условии независимости этого шума в объектном и воспроизводящих каналах, но к шуму, возникающему после корреляторов, это не относится. Наконец, поскольку исследователя интересует само распределение прозрачности объекта исследования и если предполагается, что измерение не искажает объект, то $U = I$.

Кроме информации о разреженности, исследователь часто знает, что коэффициент прозрачности объекта может принимать лишь значения, принадлежащие $[0, 1]$, откуда $Uf \in \mathcal{U}_{\text{pr}} = [0, 1]^{\dim \mathcal{U}}$. Это учитывается при редукции измерения проецированием оценки редукции на это множество [6, 20, 21].

Как уже говорилось, информация, что прозрачности соседних пикселей, как правило, отличаются

слабо, часто формализуется *разреженностью* распределения прозрачности как вектора в заданном базисе. Предложенный в [7] алгоритм обработки мультиплексированных фантомных изображений с учетом информации о разреженности имеет следующий вид.

1. Вычисление оценки $R_* \xi$ линейной редукции.
2. Уточнение полученной оценки методом [20, 21]: вычисляется неподвижная точка отображения

$$\hat{u} \mapsto \Pi_{\Sigma_{R_* \xi}} \left(\tilde{R}_{\Sigma_{R_* \xi}} \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{u} \end{pmatrix} \right),$$

где \tilde{R} — оператор линейной несмещенной редукции измерения на ИП $(A^T \ U^T)^T$, $\Sigma_{R_* \nu} = R_* \Sigma_{\nu} R_*^*$, $\Pi_{\Sigma_{R_* \xi}}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{v' \in \mathcal{U}_{\text{pr}}} (v' - v,$

$\Sigma_{R_* \xi}^{-1}(v' - v))$. Иными словами, вычисляется неподвижная точка отображения, в котором результат линейной редукции и некоторая оценка интересующей исследователя характеристики комбинируются как некоррелированные результаты основного и фиктивного измерений и результат комбинирования затем проецируется на \mathcal{U}_{pr} при минимизации расстояния Махаланобиса.

3. Переход к базису, в котором искомое распределение TUf прозрачности объекта исследования считается разреженным. Обозначим соответствующее преобразование T , а его результат — $T\hat{u}$.
4. Проверка гипотез о равенстве компонент полученной оценки $T\hat{u}$ нулю. Формирование оценки $T\hat{u}_{\text{thr}, \tau}$ по правилу: $(T\hat{u}_{\text{thr}, \tau})_i \stackrel{\text{def}}{=} 0$, если гипотеза « $(T\hat{u})_i = 0$ » принимается, иначе $(T\hat{u}_{\text{thr}, \tau})_i \stackrel{\text{def}}{=} (T\hat{u})_i$. При этом фиксируется τ — параметр критерия, монотонно связанный с вероятностью ошибки первого рода. Пример такого критерия — критерий, основанный на неравенстве Чебышева: гипотеза « $(T\hat{u})_i = 0$ » принимается, если $|(T\hat{u})_i| < \tau \sigma_{\text{thr}, i}^2$, где $\sigma_{\text{thr}, i}^2$ — дисперсия i -й компоненты $T\hat{u}$. Вероятность ошибки первого рода в этом случае не превышает τ^{-2} , причем при $\tau \geq 1$ существуют распределения вероятностей погрешности, при которых она равна τ^{-2} (для фиксированного τ).

5. Возвращение к исходному базису: $\hat{u}'_{\text{thr}, \tau} \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1} T\hat{u}_{\text{thr}, \tau}$.

6. Проецирование $\hat{u}_{\text{thr}, \tau} = \Pi_{\Sigma_{R_* \xi}}(\hat{u}'_{\text{thr}, \tau})$.

Параметр критерия τ отражает приемлемый для исследователя компромисс между подавлением шума и искажением слабых компонент изображения.

На рис. 2 показаны результаты компьютерного моделирования регистрации и последующей обработки квантовых мультиплексированных фантомных изображений. В этом и других примерах (за исключением рис. 3) моделировалась регистрация изображений датчиками в восстанавливающих каналах, размер которых втрое больше размера пикселя, таким образом, при обработке повышалось разрешение по сравнению с непосредственно формируемыми изображениями. В случае метода редукции показаны результаты обработки как без использования

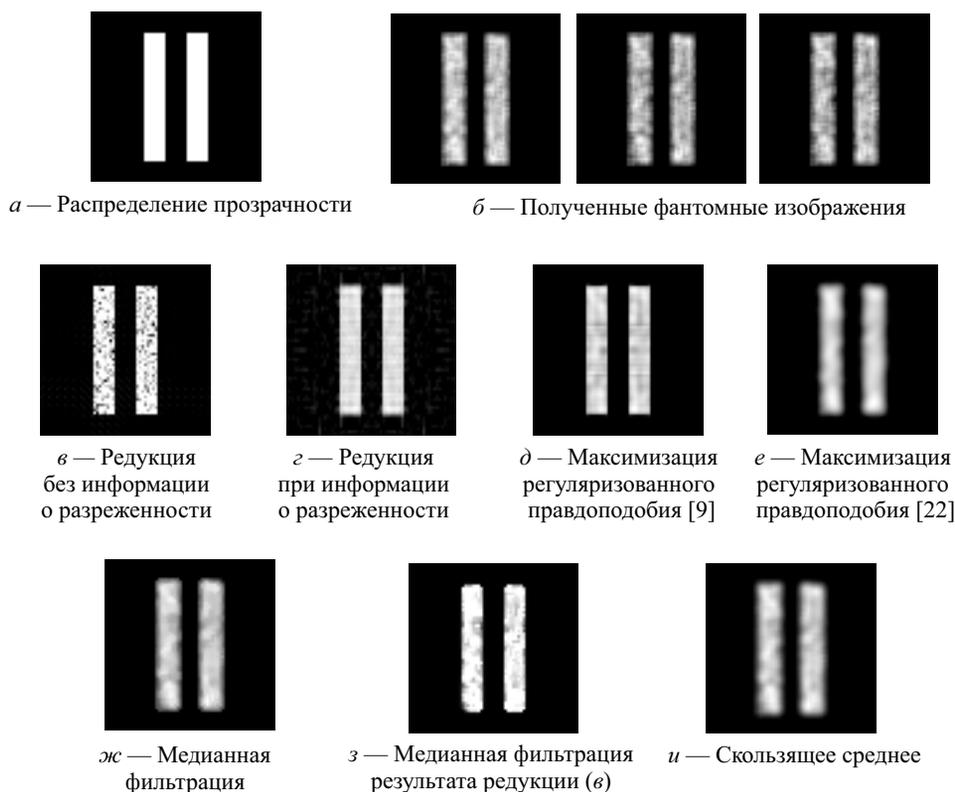


Рис. 2. Результаты компьютерного моделирования регистрации и обработки мультиплексированных фантомных изображений (*в*) методом редукции без информации о разреженности распределения прозрачности объекта в заданном базисе и (*г*) при использовании информации о разреженности. На рис. (*д-и*) показаны результаты обработки тех же изображений: (*д, е*) — при обработке максимизацией регуляризованной функции правдоподобия для двух вариантов выбора регуляризирующего функционала [9, 22]; (*ж, и*) — методами медианной фильтрации и скользящего среднего; (*з*) — результат медианной фильтрации результата редукции без информации о разреженности распределения прозрачности объекта. Моделировалось освещение в среднем 1 фотоном на пиксель объекта

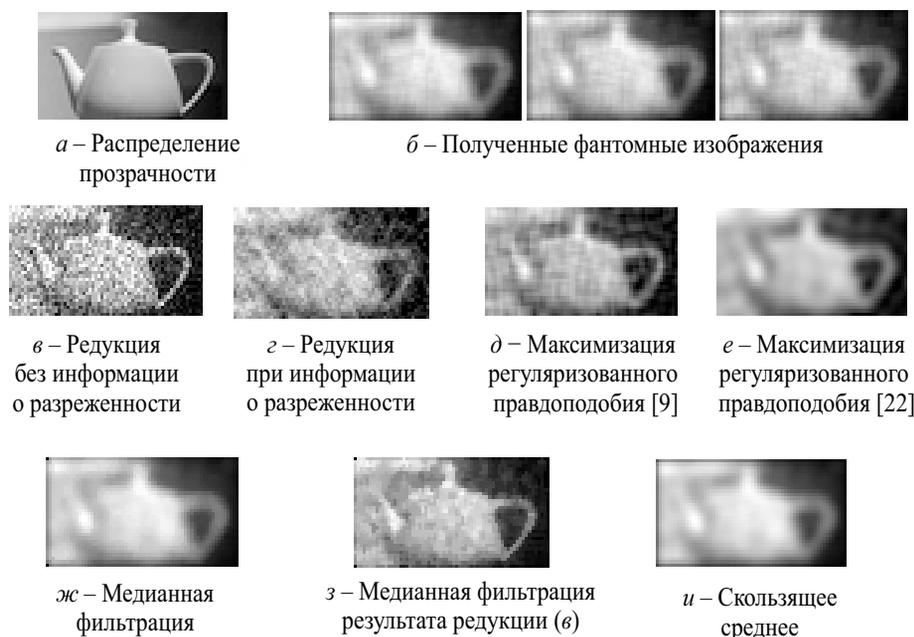


Рис. 3. Результаты компьютерного моделирования регистрации и обработки мультиплексированных фантомных изображений (*в*) методом редукции без информации о разреженности распределения прозрачности объекта в заданном базисе и (*г*) при использовании информации о разреженности. На рис. (*д-и*) показаны результаты обработки тех же изображений: (*д, е*) — при обработке максимизацией регуляризованной функции правдоподобия для двух вариантов выбора регуляризирующего функционала [9, 22]; (*ж, и*) — методами медианной фильтрации и скользящего среднего; (*з*) — результат медианной фильтрации результата редукции без информации о разреженности распределения прозрачности объекта. Моделировалось освещение в среднем 1 фотоном на пиксель объекта

информации, согласно которой изображение объекта исследования является разреженным в заданном базисе, так и при применении такой информации. Также показаны результаты обработки максимизацией регуляризованной функции правдоподобия для двух вариантов выбора регуляризующего функционала: отношения квадратов норм L^1 и L^2 оценки в заданном для представления информации о разреженности базисе [9] и суммы квадратов конечно-разностных аппроксимаций вторых пространственных производных оценки [22]. Худшее подавление шума или большее размытие при использовании этих методов обусловлено тем, что в регуляризующем функционале не учитывается различие погрешностей компонент распределения прозрачности в выбранном базисе. Кроме того, во втором варианте регуляризации конечно-разностные аппроксимации вторых производных изображения принимают большие значения на границах щелей из-за существенного перепада прозрачности и поэтому изображение размывается в большей степени. Также приведены результаты обработки тех же изображений методами медианной фильтрации и скользящего среднего. Поскольку эти методы не предполагают повышение разрешения, соответствующие результаты размыты в большей степени, чем результаты предыдущих методов. Медианная фильтрация результата редукции без информации о разреженности распределения прозрачности объекта показывает несколько лучшее разрешение, уступающее, однако, результатам редукции, при более слабом подавлении шума по сравнению с прочими методами, кроме самого фильтруемого результата редукции.

Для выбора значения параметра алгоритма исследователь может смоделировать регистрацию тестового изображения, содержащего требуемые детали, и использовать максимальное значение параметра, при котором эти детали сохраняются либо задать значение параметра, наблюдая результаты редукции при разных τ .

На рис. 3 показаны аналогичные результаты компьютерного моделирования для другого, небинарного распределения прозрачности объекта и датчиков, впятеро большего размера пикселя. Из-за большей сложности распределения прозрачности (большее число деталей) и меньшей разрешающей способности датчиков среднее число освещающих фотонов существенно увеличено. В отличие от предыдущего рисунка качество результата медианной фильтрации результата редукции без информации о разреженности весьма близко к качеству результата редукции при использовании информации о разреженности, поскольку увеличение числа фотонов привело к уменьшению относительных различий погрешностей различных компонент изображения, которые при медианной фильтрации не учитываются.

Возможна и отличающаяся от вышеописанной формализация дополнительной информации. Пусть задача редукции разрешима при заданном U и требуется, чтобы погрешность оценивания Uf не превосходила ϵ . Если $h(R_*, U) > \epsilon$, возникает вопрос о «части» Uf максимальной размерности, допускающей оценивание с требуемой точностью. Зависимость этой размерности от ϵ называется *эффективным*

рангом [19, гл. 8] модели измерения. В отличие от рассмотренного выше алгоритма в этом случае используемый базис не выбирается исследователем, а определяется на основе математической модели измерительного эксперимента. Это, с одной стороны, снимает с исследователя обязанность выбора базиса, а с другой стороны, не позволяет ему выразить имеющуюся у него информацию о возможных особенностях изображения, в по возможности неискаженной передаче которых он заинтересован. Заметим, что в [16] в качестве базиса, в котором ожидается разреженность распределения прозрачности объекта, выбран базис собственных функций оптической системы (без учета аппаратных функций датчиков).

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ СУБЪЕКТИВНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поскольку параметр алгоритма τ выбирается исследователем в зависимости от его (часто трудноформализуемых) представлений об интересующем его распределении прозрачностей, этот параметр является мешающим.

В стандартном математическом моделировании при использовании зависящей от мешающих параметров математической модели, как правило, требуются либо независимость заключений о модели от мешающих параметров, либо минимальность потерь, обусловленных применением модели, в наихудшем по всем возможным значениям мешающих параметров случае. При этом исследователь может иметь представление о более правдоподобных и менее правдоподобных значениях мешающих параметров, но не может выразить это субъективное суждение средствами стандартного математического моделирования. Он, однако, может выразить такую, основанную на его опыте информацию о неточно известных мешающих параметрах модели с помощью математического формализма субъективного моделирования [18].

Субъективная модель неизвестного параметра $\tau \in T$ (в данном случае $T = [0, +\infty)$), определяющего модель $M(\tau)$, — пространство [18, 23] $(T, \mathcal{P}(T), \text{Pl}^{\tilde{\tau}}, \text{Bel}^{\tilde{\tau}})$ с мерами правдоподобия $\text{Pl}^{\tilde{\tau}} : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{L}$ и доверия $\text{Bel}^{\tilde{\tau}} : \mathcal{P}(T) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$. Эти меры принимают значения в шкалах $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, \max, \min)$, $\hat{\mathcal{L}} = ([0, 1], \geq, \min, \max)$, т.е. операция сложения правдоподобий — максимум ($\text{Pl}(E_1 \cup E_2) = \max\{\text{Pl}(E_1), \text{Pl}(E_2)\}$, $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(T)$), операция умножения правдоподобий — минимум (суждения « $\tau \in E_1$ » и « $\tau \in E_2$ », $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(T)$, Pl-независимы, если $\text{Pl}(E_1 \cap E_2) = \min\{\text{Pl}(E_1), \text{Pl}(E_2)\}$), а для мер доверия, наоборот, ($\text{Bel}(E_1 \cap E_2) = \min\{\text{Bel}(E_1), \text{Bel}(E_2)\}$, $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(T)$; суждения « $\tau \in E_1$ » и « $\tau \in E_2$ », $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(T)$, Bel-независимы, если $\text{Bel}(E_1 \cup E_2) = \max\{\text{Bel}(E_1), \text{Bel}(E_2)\}$). Значения $\text{Pl}^{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau} = \tau)$ и $\text{Bel}^{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau} \neq \tau)$ показывают, насколько, по мнению исследователя, *относительно* правдоподобно равенство $\tilde{\tau} = \tau$ и насколько следует *относительно* доверять неравенству $\tilde{\tau} \neq \tau$, $\tau \in T$. «Относительно» означает, что численные значения мер Pl, Bel, отличные от 0 и 1, не важны, существенна лишь их упорядоченность.

Субъективное моделирование позволяет моделировать, в частности, случаи полного незнания модели и точного ее знания. Полное незнание модели определяется распределениями $t^{\tilde{\tau}}(\tau) = \text{Pr}^{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau} = \tau) = 1$ и $\hat{t}^{\tilde{\tau}}(\tau) = \text{Bel}^{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau} \neq \tau) = 0$, $\tau \in T$, согласно которым любое значение параметра модели вполне правдоподобно и любому значению доверять нельзя. Точное знание модели определяется распределениями $t^{\tilde{\tau}}(\tau_0) = 1$, $t^{\tilde{\tau}}(\tau) = 0$, $\tau \neq \tau_0$, $\hat{t}^{\tilde{\tau}}(\tau_0) = 0$, $\hat{t}^{\tilde{\tau}}(\tau) = 1$, $\tau \neq \tau_0$, $\tau \in T$, согласно которым лишь истинное значение параметра модели вполне правдоподобно, а любое другое — нет и доверять неравенству параметра истинному значению нельзя.

Следовательно, исследователь в любом случае может предложить субъективную модель, выражающую его субъективные представления.

Пусть исследователь задал распределения правдоподобий $t^{\tilde{\tau}}(\cdot)$ и доверий $\hat{t}^{\tilde{\tau}}(\cdot)$, т. е. задал субъективную модель параметра τ , а $y = \varphi(\tau) = \Phi(M(\tau))$ — характеристика Φ модели $M(\tau)$, которая зависит от неизвестного параметра субъективной модели $\tau \in T$.

Тогда распределения правдоподобий и доверий неопределенной характеристики $\tilde{y} = \varphi(\tilde{\tau})$ модели суть

$$t^{\tilde{y}}(y) = \sup_{\substack{\tau \in T \\ \varphi(\tau) = y}} t^{\tilde{\tau}}(\tau), \quad \hat{t}^{\tilde{y}}(y) = \inf_{\substack{\tau \in T \\ \varphi(\tau) = y}} \hat{t}^{\tilde{\tau}}(\tau).$$

Таким образом, исследователь может вычислить правдоподобия и доверия истинности любых своих суждений о любых свойствах объекта исследования, обусловленных его моделью.

3. СПОСОБ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАННЫХ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА СУБЪЕКТИВНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Предлагаемый ниже способ выбора значения параметра вышеприведенного алгоритма является аналогом предложенного в [24, 25] метода выбора значения сглаживающего параметра семейства сплайнов в задаче интерпретации данных зашумленных измерений температуры. Исследователь изменяет значение параметра алгоритма τ и, глядя как на графики результатов редукции $\hat{u}_{\text{thr},\tau}$ при различных τ , так и на графики $\xi - AU^{-1}\hat{u}_{\text{thr},\tau}$ — разностей измерений ξ и соответствующего оценке их результата $AU^{-1}\hat{u}_{\text{thr},\tau}$, присваивает значениям τ численные значения правдоподобий, исходя из своих субъективных представлений об ожидаемых свойствах распределения прозрачности и из того, насколько относительно правдоподобно оценка \hat{u}_{τ} представляет искомое распределение прозрачности. Параметр алгоритма рассматривается как неопределенный элемент, заданный двумя «условными» распределениями правдоподобий $t_1^{\tilde{\tau}}$ и $t_2^{\tilde{\tau}}$: значение $t_1^{\tilde{\tau}}(\tau)$ субъективно характеризует правдоподобие \hat{u}_{τ} как значение оценки пространственного распределения оптической характеристики объекта (красные распределения на рис. 4 и 5), а значение $t_2^{\tilde{\tau}}(\tau)$ — правдоподобие $\xi - AU^{-1}\hat{u}_{\text{thr},\tau}$ как реализации шума (зеленые распределения на рис. 4 и 5). Поскольку

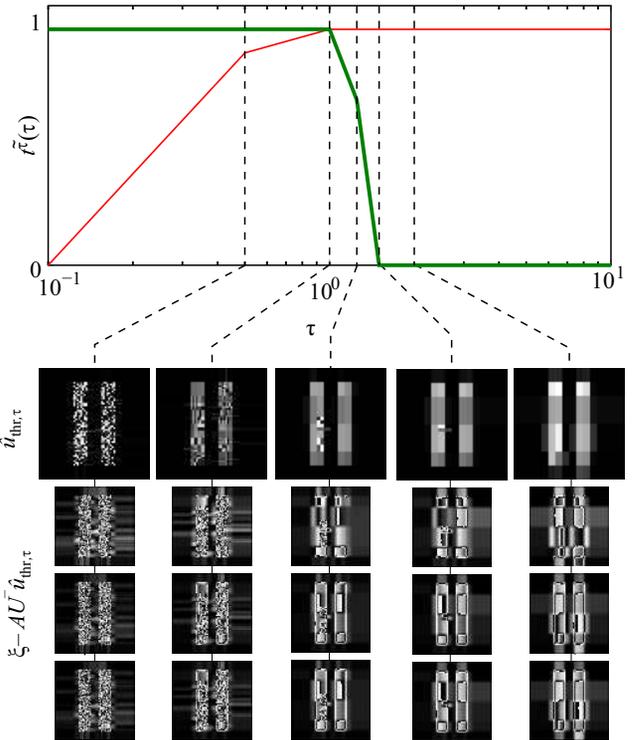


Рис. 4. Выбор параметра алгоритма τ на основе имеющейся у исследователя субъективной информации об ожидаемых свойствах распределения прозрачности и шума. Красным показано заданное исследователем распределение правдоподобий значений оценки, зеленым — распределение правдоподобий значений шума. Также приведены значения оценки распределения прозрачности $\hat{u}_{\text{thr},\tau}$, соответствующие некоторым значениям τ (верхняя строка под графиком), и соответствующие им реализации шума $\xi - AU^{-1}\hat{u}_{\text{thr},\tau}$ (последующие строки под графиком). Моделировалось освещение в среднем 1 фотоном на пиксель объекта на рис. 2, а

субъективные суждения исследователя о распределении прозрачности и о виде шума, очевидно, независимы, то независимы и их «условные» распределения правдоподобий, а оптимальное значение параметра следует определить значением максимума по всем значениям параметра минимума пары «условных» распределений правдоподобий в левом и правом столбцах, т. е. единицей.

Ввиду большей сложности исследуемого объекта на рис. 5, а именно присутствия мелких деталей и небинарности изображения (серыми являются внешний круг и окаймление объектов), при компьютерном моделировании использовалось большее среднее число освещающих фотонов (10 фотонов на пиксель).

4. СОГЛАСИЕ РЕЗУЛЬТАТА РЕДУКЦИИ С ДАННЫМИ ИЗМЕРЕНИЙ

Математический формализм субъективного моделирования позволяет также проверять с помощью данных измерений согласие с ними предложенной исследователем субъективной информации. В [18, п. 10] предложен метод верификации согласия предложенной исследователем субъективной модели с данными наблюдений. Правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому

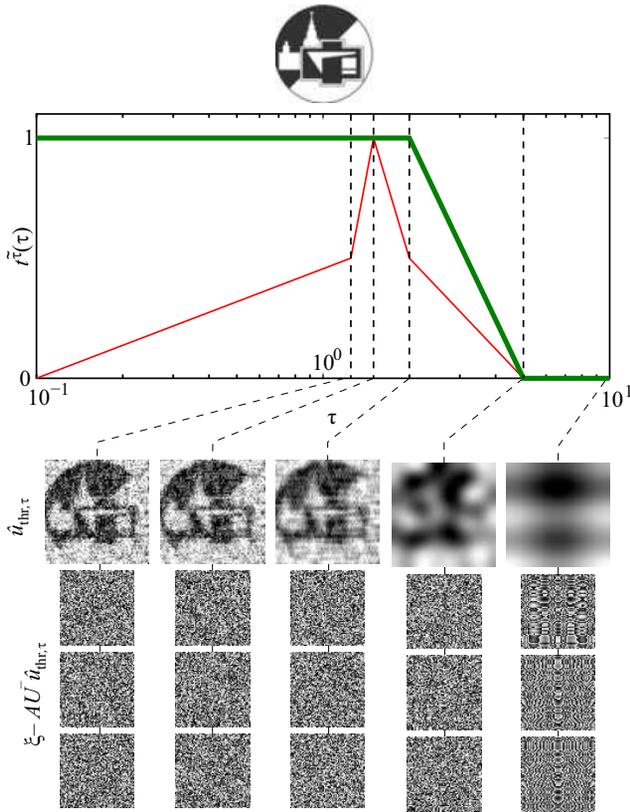


Рис. 5. Выбор параметра алгоритма τ на основе имеющейся у исследователя субъективной информации об ожидаемых свойствах распределения прозрачности и шума. Сверху — распределение прозрачности объекта исследования. Красным показано заданное исследователем распределение правдоподобий значений оценки, зеленым — распределение правдоподобий значений шума. Также приведены значения оценки распределения прозрачности $\hat{u}_{\text{thr},\tau}$, соответствующие некоторым значениям τ (верхняя строка под графиком) и соответствующие им реализации шума $\xi - AU^{-}\hat{u}_{\text{thr},\tau}$ (последующие строки под графиком). Моделировалось освещение в среднем 10 фотонами на пиксель объекта

результат интерпретации $\hat{u}_{\text{thr},\tau}$ согласуется с данными наблюдений ξ , $\hat{u}_{\text{thr},\tau} \sim \xi$, определено равенством

$$\text{Pl}(\hat{u}_{\text{thr},\tau} \sim \xi) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \inf\{\text{pr} \in [0, 1], \text{Pl}^{\hat{u}_{\text{thr},\tau}}(\Psi(\xi; \text{pr})) = 1\},$$

где Ψ — оценивающее интересующую исследователя характеристику множество. Информация, использованная для построения оценивающего множества, считается «дополнительно верной». Примером такого множества является [26]

$$\Psi'(\xi; \text{pr}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ Uf \mid f \in \mathcal{F}, \left\| \Sigma_{R_*\xi}^{-1/2} R_* (\xi - Af) \right\|^2 \leq \dim \mathcal{U} / (1 - \text{pr}) \right\}.$$

Правдоподобие согласия предложенного на рис. 4 распределения правдоподобий значений τ равно 1. Правдоподобие согласия с теми же данными измерений субъективной информации, согласно которой вполне правдоподобно лишь единственное значение τ , а все остальные — нет, показано на рис. 6.

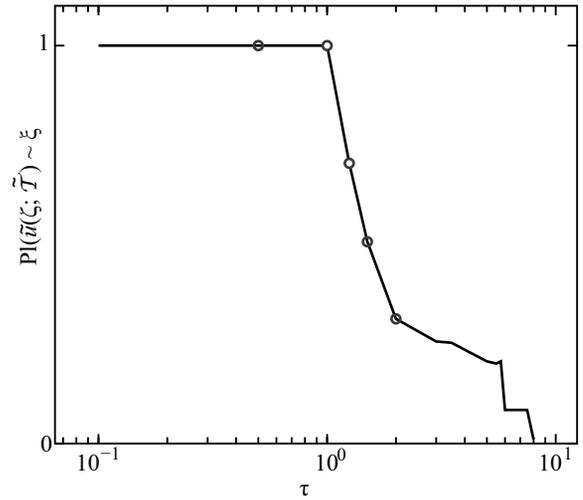


Рис. 6. Правдоподобие согласия с данными измерений результата редукции фантомных изображений двух щелей при субъективной информации, согласно которой лишь единственное значение параметра алгоритма τ вполне правдоподобно, в зависимости от единственного вполне правдоподобного значения τ

Выделены значения τ , соответствующие ранее показанным в нижней части рис. 4 значениям субъективной оценки. Видно, что для значений τ , при которых искажения неразличимы на фоне шума, правдоподобие согласия близко к 1, а для приводящих к искажениям значений τ — меньше 1 и убывает по мере роста параметра и обусловленных этим искажений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный вариант метода редукции позволяет восстанавливать распределение прозрачности объекта исследования даже при его облучении небольшим числом фотонов за счет использования информации о разреженности этого распределения в выбранном исследователем базисе. При этом математический формализм субъективного моделирования помогает исследователю выбрать компромисс между возникающим при применении предлагаемого метода искажением важных для него деталей изображения и подавлением шума, позволяя исследователю формулировать свои субъективные суждения о возможном виде распределения прозрачности и погрешности измерений. Кроме того, математический формализм субъективного моделирования также позволяет исследователю проверять с помощью данных измерений согласие с ними предложенной исследователем субъективной информации.

Полученная оценка близка к известным в математической статистике оценкам типа Джеймса—Стейна, поскольку уменьшение погрешности достигается за счет комбинирования оценки редукции, при построении которой не используется субъективная информация, но которая заведомо передает все детали объекта (в оценке Джеймса—Стейна аналогичную роль играет оценка метода наименьших квадратов), и оценки, существенно основанной на априорных представлениях вплоть до независимости от результата измерений (в оценке Джеймса—Стейна такую роль играет значение оценки, которое, по мнению исследователя, наиболее ожидаемо).

Но если в оценке Джеймса—Стейна комбинирование является линейным, то в полученном методе комбинирование производится покомпонентно, отбором компонент комбинируемых оценок методами проверки статистических гипотез с учетом субъективных представлений исследователя о виде изображения и о виде погрешности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Ю.П. Пытьеву и профессору А.В. Белинскому.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-07-00424 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский А.В., Клышко Д.Н. // ЖЭТФ. 1994. **105**, № 3. С. 487.
2. Pittman T.B., Shih Y.H., Strekalov D.V., Sergienko A.V. // Phys. Rev. A. 1995. **52**, N 5. P. R3429.
3. Moreau P.-A., Toninelli E., Gregory T., Padgett M.J. // Laser & Photonics Reviews. 2017. **12**, N 1. 1700143.
4. Чиркин А.С. // Письма в ЖЭТФ. 2015. **102**, № 6. С. 444.
5. Balakin D.A., Belinsky A.V., Chirkin A.S. // Journal of Russian Laser Research. 2017. **38**, N 2. P. 164.
6. Балакин Д.А., Белинский А.В., Чиркин А.С. // ЖЭТФ. 2017. **152**, № 2. С. 252.
7. Balakin D.A., Belinsky A.V., Chirkin A.S. // Quantum Inf. Process. 2019. **18**, N 3.
8. Han Sh., Yu H., Shen X. et al. // Applied Sciences. 2018. **8**, N 8. P. 1379.
9. Morris P.A., Aspden R.S., Bell J.E.C. et al. // Nat. Commun. 2015. **6**. P. 5913.
10. Zerom P., Chan K.W. C., Howell J.C., Boyd R.W. // Phys. Rev. A. 2011. **84**, N 6. 061804.
11. Gong W., Han Sh. // Phys. Lett. A. 2012. **376**, N 17. P. 1519.
12. Gong W., Han Sh. // Sci. Rep. 2015. **5**. P. 9280.
13. Li J., Gao W., Qian J. et al. // Sensors. 2019. **19**, N 1. P. 192.
14. Shi X., Huang X., Nan S. et al. // Laser Physics Letters. 2018. **15**, N 4. 045204.
15. Katz O., Bromberg Y., Silberberg Y. // Appl. Phys. Lett. 2009. **95**, N 13. 131110.
16. Wang H., Han Sh., Kolobov M.I. // Optics Express. 2012. **20**, N 21. P. 23235.
17. Du J., Gong W., Han S. // Optics Letters. 2012. **37**, N 6. P. 1067.
18. Пытьев Ю.П. // Матем. моделирование. 2013. **25**, № 4. С. 102.
19. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3 изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
20. Балакин Д.А., Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 2. С. 3. (Balakin D.A., Pyt'ev Y.P. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 2. P. 101.)
21. Балакин Д.А., Пытьев Ю.П. // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2018. № 5. 1850301.
22. Mertens L., Sonnleitner M., Leach J. et al. // Sci. Rep. 2017. **7**, N 1. P. 42164.
23. Пытьев Ю.П. Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях. Математические, эмпирические основы, приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
24. Пытьев Ю.П., Фаломкина О.В., Шишкин С.А., Чулчиков А.И. // Машинное обучение и анализ данных. 2018. **4**, № 2. С. 108.
25. Pyt'ev Y.P., Falomkina O.V., Shishkin S.A. // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2019. **29**, N 4. P. 577.
26. Балакин Д.А., Пытьев Ю.П. // Математическое моделирование. 2018. **30**, № 12. С. 84.

Reduction of Images to the Form Typical for Measuring the Distribution of Object Transparency with Subjective Information about Its Sparsity in a Given Basis

D. A. Balakin

Department of Mathematical Modeling and Computer Science, Faculty of Physics,
Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: balakin_d_a@physics.msu.ru.

Experiments on the study of light-sensitive objects or rapidly evolving objects often employ a small number of photons that interact with the object. This leads to poor quality of the reconstructed image of the object. In this situation, mathematical techniques for processing measurements must not only provide a minimum error, but also use all information available to the researcher about the object to further reduce this error. The source of information used together with the measurement results to construct an estimate of the distribution of the optical characteristics of the object can be a researcher's ideas about the possible form of the distribution of the optical characteristics of the object and about possible noise. A version of the *mathematical method of measuring reduction* is considered. It allows one to use such information, which is simulated by the *mathematical formalism of subjective modeling*, and to verify the agreement of subjective information proposed by the researcher with measurement data.

Keywords: measurement reduction, ghost images, multiplexed ghost images, entangled photons, compressive sensing, subjective modeling, information verification.

PACS: 07.05.Pj, 42.50.Ex, 02.50.Le.

Received 19 June 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 1. Pp. 26–34.

Сведения об авторе

Балакин Дмитрий Александрович — физик; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: balakin_d_a@physics.msu.ru.