ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Калибровочные поля в теории конденсированного состояния и сохранение спиральности

М.И. Труханова[a]
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 23.11.2019, после доработки 23.12.2019, принята к публикации 24.12.2019.

Рассмотрена модель квантовой гидродинамики заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле с учетом спин-орбитального взаимодействия и влияния энергии Зеемана на основе применения формализма введения неабелевых калибровочных полей Янга—Миллса. Показано, что неабелевы калибровочные поля порождают силы, действующие на спин и спиновый ток. Показано, что спиральность частицы, движущейся на фоне таких полей, которые порождают силы, зависящие от спина частицы, не сохраняется. Построена двухжидкостная модель квантовой гидродинамики системы электронов в spin-up- и spin-down-состояниях, движущейся на фоне магнитной структуры скирмиона с нетривиальной топологией. Построена система уравнений непрерывности, баланса импульса, эволюции плотности спина, и доказано сохранение спиральности для потоков электронов в рамках развитой двухжидкостной модели.

Ключевые слова: калибровочные поля, квантовая гидродинамика, магнитные скирмионы, электрон-скирмионное взаимодействие.
УДК: 53.01. PACS: 11.15.-q, 47.35.-i, 12.39.Dc.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании свойств спин-орбитального взаимодействия Рашбы и Дрессельхауса, а также взаимодействия заряженных частиц с нетривиальными магнитными структурами, весьма удобным является введение калибровочных полей и дальнейшее рассмотрении эволюции частиц, движущихся на фоне этих полей [1]. В нерелятивистском случае формализм такого подхода основан на использовании уравнения Паули для частицы, движущейся на фоне электромагнитного поля Максвелла $U(1)$ и калибровочного поля $SU(2)$ Янга—Миллса [2, 3]. Модель эволюции спиновых и зарядовых токов в среде со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и Дрессельхауса была сформулирована на основе четырехмерной $U(1)\times SU(2)$ калибровочной теории. Было показано, что полный спиновый ток, содержащий вклад от напряженности поля Янга—Миллса, сохраняется [2].

Интересной областью применения метода введения калибровочных полей является исследование поведения топологически нетривиальной магнитной структуры скирмионов [4–8] и, в первую очередь, ее взаимодействие с током зарядов. Электроны могут взаимодействовать с локальными магнитными моментами скирмиона через сильную связь Хунда, стремящуюся сориентировать спины электронов в направлении локальных моментов в результате действия механизма передачи крутящего спинового момента. Можно рассматривать подобное взаимодействие, используя формализм калибровочных полей, когда электрон в адиабатическом приближении движется на фоне абелевых калибровочных полей, захватывая фазу Берри [9–13]. Электрон в такой модели видит спиновую структуру скирмиона как источник калибровочного «магнитного» поля, а движущийся скирмион — как источник калибровочного «электрического» поля [9, 10].

В работе мы развиваем метод квантовой гидродинамики, используя формализм введения калибровочных полей, для построения двухжидкостной модели системы электронов, находящейся в двух различных состояниях, со спином вверх (spin-up) и спином вниз (spin-down), рассматривая их как две различные жидкости. Мы также исследуем вопрос сохранения спиральности.

1. ПОЛЯ ЯНГА—МИЛЛСА В ТЕОРИИ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Описание поведения заряженной частицы со спином во внешнем электромагнитном поле с учетом спин-орбитального взаимодействия Рашбы и Дрессельхауса может быть сформулировано на языке четырехмерной $SU(2)\times U(1)$ калибровочной теории, где $U(1)$ является абелевым электромагнитным полем Максвелла, а $SU(2)$ — неабелевым классическим полем Янга—Миллса. Для вывода системы уравнений необходимо ввести гамильтониан, учитывающий вклад спин-орбитального взаимодействия и энергии Зеемана [1],

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\phi-\frac{q\hbar}{2\mu c}\hat{\sigma}\cdot\mathbf{B}-\\ -\frac{e\hbar}{4\mu^2c^2}\hat{\sigma}\cdot\left(\mathbf{E}\times\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)-\frac{ie\hbar^2}{8\mu^2c^2}\hat{\sigma}\cdot\nabla\times\mathbf{E}, \quad (1)$$

где первое и второе слагаемые представляют кинетическую и потенциальную энергию заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, третье слагаемое — вклад энергии Зеемана для магнитного момента в магнитном поле, четвертое и пятое слагаемые представляют собой влияние электрического

[a] E-mail: mar-tiv@yandex.ru

поля на движущийся спиновый магнитный момент, или спин-орбитальное взаимодействие Рашбы. Гамильтониан, представленный выше (1), может быть переформулирован в слагаемых калибровочных полей и должен описывать заряженную частицу, движущуюся на фоне абелева калибровочного поля Максвелла $U(1)$ и неабелева калибровочного поля Янга—Миллса $U(2)$ [1, 2]. В результате, эволюция состояния частицы со спином подчиняется переформулированому уравнению Паули

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\hat{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - g\boldsymbol{\Upsilon}\right)^2\psi(\mathbf{r},t) + e\phi\psi(\mathbf{r},t) + g\chi\psi(\mathbf{r},t), \quad (2)$$

здесь для описания состояния заряженной частицы с полуцелым спином введен вектор состояния, или двухкомпонентный спинор $\psi(\mathbf{r},t)$, а калибровочные преобразования спинора построены на группе, изоморфной $SU(2)$, поэтому новый «заряд» g, появляющийся при введении $SU(2)$ калибровочных полей, есть $g = \hbar$, e — электрический заряд, $\mathbf{A}, \phi$ представляют собой векторный и скалярный потенциалы $U(1)$ калибровочного поля Максвелла $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$, или потенциалы электромагнитного поля, и $(\chi, \boldsymbol{\Upsilon})$ — скалярный и векторных потенциалы калибровочного поля Янга—Миллса $\boldsymbol{\Upsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Upsilon}^b\hat{\sigma}^b$ и $\chi = \frac{1}{2}\chi^b\hat{\sigma}^b$. Следует отметить, что a, b — спиновые индексы, а $\alpha, \beta, \gamma, i, j, k$ — индексы, соответствующие пространственно-временным компонентам. Неабелевы калибровочные потенциалы $\boldsymbol{\Upsilon}^b$ и χ^b появляются в результате локальных калибровочных преобразований. Спин заряженной частицы связан с ее пространственным перемещением через спин-орбитальное взаимодействие и с магнитным полем через энергию Зеемана. Таким образом, калибровочные потенциалы, зависящие от пространственно-временных переменных и вектора спина, имеют два индекса и могут быть представлены в виде $\chi^a = -\frac{e}{\mu c}B^a$ и $\Upsilon^a_k = \frac{e}{2\mu c^2}\varepsilon^{ajk}E_j$ [1], а пространственная и временная ковариантные производные определены в форме $\mathbf{D} = \boldsymbol{\partial} - \frac{ie}{c\hbar}\mathbf{A} - i\boldsymbol{\Upsilon}$ и $\mathfrak{D}_t = \partial_t + \frac{ie}{\hbar}\phi + i\chi$. Здесь матрицы Паули $\frac{1}{2}\sigma^b$ являются генераторами группы $SU(2)$:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тензор неабелева калибровочного поля может быть получен в виде $\mathcal{F}^b_{\mu\nu} = \partial_\mu\Upsilon^b_\nu - \partial_\nu\Upsilon^b_\mu - \varepsilon^{bac}\Upsilon^a_\nu\Upsilon^c_\mu$. Основные уравнения одночастичной квантовой гидродинамики, позволяющие описать эволюцию заряженной частицы на фоне полей Максвелла и Янга—Миллса, — уравнение динамики спина и уравнение Эйлера или баланса импульса, а также уравнение непрерывности. Дифференцируя по времени выражение для плотности спина $\mathbf{s} \equiv s^b(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2}\psi^+(\mathbf{r},t)\hat{\sigma}^b\psi(\mathbf{r},t)$ и используя уравнение Паули (2), уравнение динамики плотности спина может быть получено в виде [1]

$$\partial_t\mathbf{s}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\chi}\times\mathbf{s}(\mathbf{r},t) + \nabla_j\mathbf{J}^j_{\text{spin}}(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\Upsilon}_j\times\mathbf{J}^j_{\text{spin}}(\mathbf{r},t) = 0. \quad (3)$$

Как было показано, плотности спина не сохраняются, поскольку, как видно из уравнения (3), скалярный потенциал калибровочного поля создает крутящий момент, действующий на плотность спина, а векторный потенциал создает крутящий момент, действующий на плотность спинового тока, но 4-вектор спинового тока должен сохраняться [2] $D_\mu J^\mu_{\text{spin}} = 0$, где пространственная часть спинового тока определяется выражением

$$\mathbf{J}^a_{\text{spin}}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2\mu}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}^+\psi^+\frac{\hat{\sigma}^a}{2}\psi + \psi^+\frac{\hat{\sigma}^a}{2}\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi\right)(\mathbf{r},t),$$
$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \hat{\mathbf{p}}' - \hbar\boldsymbol{\Upsilon}^b\hat{\sigma}^b,$$

где $\hat{\mathbf{p}}' = -i\hbar\hat{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$. Для вывода уравнения динамики частицы на фоне внешнего электромагнитного поля и поля Янга—Миллса следует ввести плотность в виде $\rho(\mathbf{r},t) = \psi^+(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$. Дифференцируя выражение для плотности и используя уравнение Паули, можно прийти к уравнению непрерывности

$$\partial_t\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0,$$

где плотность потока представима в форме

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\mu}\Big(\boldsymbol{\mathcal{D}}^+\psi^+(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) + \psi^+(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi(\mathbf{r},t)\Big). \quad (4)$$

Применяя процедуру дифференцирования к выражению для плотности потока (4), уравнение Эйлера или баланса импульса частицы, движущейся на фоне калибровочных полей, может быть получено в виде

$$\mu\partial_t j^i + \nabla_k\Pi^{ik} = \mathbf{h}^i\cdot\mathbf{s} + \varepsilon^{ijk}\mathbf{J}^j_{\text{spin}}\cdot\mathbf{b}^k + e\rho E^i + \frac{e}{c}\varepsilon^{ijk}j^jB^k. \quad (5)$$

Третье и четвертое слагаемые в правой части уравнения движения (5) представляют собой действие силы Лоренца на движущийся заряд, первое и второе слагаемые характеризуют влияние классических калибровочных полей Янга—Миллса, действующих на плотность спина и плотность спинового тока:

$$\mathbf{h}^a = -\partial_t\boldsymbol{\Upsilon}^a - \nabla\chi^a + \varepsilon^{abc}\chi^b\boldsymbol{\Upsilon}^c,$$
$$\mathbf{b}^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{ikj}\mathcal{F}^a_{jk} = \nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}^a + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\boldsymbol{\Upsilon}^b\times\boldsymbol{\Upsilon}^c.$$

При этом микроскопическое определение плотности потока импульса может быть получено при выводу уравнения движения в форме

$$\Pi^{ik}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\mu}\left(\psi^+\hat{\mathcal{D}}^i\hat{\mathcal{D}}^k\psi + (\hat{\mathcal{D}}^i\psi)^+\hat{\mathcal{D}}^k\psi + h.c.\right)(\mathbf{r},t).$$

2. КВАНТОВАЯ ГИДРОДИНАМИКА ЭЛЕКТРОН-СКИРМИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Интересной областью применения теории калибровочного поля в конденсированном состоянии вещества является описание движения заряженной частицы на фоне магнитной структуры скирмиона. Магнитные скирмионы представляют собой топологически устойчивые магнитные вихри, которые могут быть использованы для хранения двоичной информации. Манипулировать движением скирмионов возможно с помощью электрического тока.

Нетривиальная спиновая структура скирмиона взаимодействует со свободно движущимся электроном через так называемое взаимодействие Хунда, стремящееся выстроить спин электрона в направлении локальных магнитных моментов, образующих спиновую структуру скирмиона, через механизм передачи крутящего момента спина. Уравнение Паули, описывающее движение электрона в поле скирмиона, представимо в виде

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - J_H\hat{\sigma}\cdot\mathbf{m}\right)\psi, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{M},$$

здесь J_H — константа обменного взаимодействия и $\mathbf{m}$ — направление локального магнитного момента скирмиона [9, 10].

В лабораторной системе отсчета магнитные моменты скирмиона меняют свое направление в пространстве и во времени. Применяя локальные преобразования, можно осуществить переход от лабораторной системы отсчета в систему отсчета, связанную с направлением локальных магнитных моментов скирмиона таким образом, что z-ось проекции спина электрона будет направлена вдоль векторов локальных магнитных моментов скирмиона. При локальных преобразованиях квантово-механические величины преобразуются с помощью оператора поворота, заданного унитарной матрицей $\hat{U}^{1/2}$, которая может быть параметризована углами Эйлера (φ, θ, ξ):

$$\hat{U} = \hat{U}^{1/2}(\varphi,\vartheta,\xi) = e^{-\frac{i}{2}\varphi\hat{\sigma}_z}\cdot e^{-\frac{i}{2}\vartheta\hat{\sigma}_y}\cdot e^{-\frac{i}{2}\xi\hat{\sigma}_z},$$

$$\hat{U}^{1/2}(\varphi,\vartheta,\xi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i(\varphi+\xi)/2} & -\sin\frac{\vartheta}{2}e^{i(\varphi-\xi)/2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{-i(\varphi-\xi)/2} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{i(\varphi+\xi)/2} \end{pmatrix}.$$

Волновая функция и квантово-механические операторы преобразуются по правилу $\psi_m \to \psi'_{m'} = \sum_m \psi_m U_{mm'}$, $\hat{O}' = U\hat{O}U^{-1}$. Унитарные преобразования приводят к появлению калибровочных потенциалов и как результат калибровочных полей, действующих на движущийся электрон.

С другой стороны, для описания эволюции электронов в состоянии со спином-вверх (spin-up) и спином-вниз (spin-down) должна быть построена двухжидкостная модель квантовой гидродинамики. Электроны с разными проекциями спина, проходящие через магнитную структуру скирмиона, ощущают на себе действие калибровочных полей, которое может быть описано при выводе двухжидкостной модели квантовой гидродинамики. Двухкомпонентный спинор в данной модели представим в виде

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow\end{pmatrix},$$

где состояние электрона со спином вверх характеризуется $\psi_\uparrow$ и со спином вниз — $\psi_\downarrow$, а плотность вероятности задана в виде $\rho_\uparrow = |\psi_\uparrow|^2$ и $\rho_\downarrow = |\psi_\downarrow|^2$. В контексте многочастичной модели динамические функции $\chi_p(R,t)$, где $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\}$ представимы путем введения процедуры квантово-механического усреднения по состояниям системы частиц $\langle\chi\rangle = \int dR\sum_p \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\chi_p$. Концентрация числа частиц с различными проекциями спина на выделенное направление $n_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r},t)$ в окрестности точки $\mathbf{r}$ трехмерного физического пространства, может быть задана как квантово-механическое среднее оператора концентрации $\hat{n} = \sum_p \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)$, где $\mathbf{r}_p$ представляет собой координаты p-й частицы

$$n_{\uparrow\downarrow} = \int dR\sum_p \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\psi^+_{\uparrow\downarrow}(R,t)\psi_{\uparrow\downarrow}(R,t) \equiv \langle\psi^+_{\uparrow\downarrow}\psi_{\uparrow\downarrow}\rangle,$$

где $dR = \Pi_{p=1}^N d\mathbf{r}_p$. z-проекция плотности спина является функцией концентраций частиц $s^z = \frac{\hbar}{2}\int dR\times \times\sum_p \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\psi^+\sigma^z\psi = \frac{\hbar}{2}(n_\uparrow - n_\downarrow)$.

При описании динамики электронов в поле скирмиона в рамках двухжидкостной модели локальное вращение лабораторной системы отсчета порождает калибровочное поле, 4-потенциал которого может быть представлен через углы Эйлера: $\Upsilon_\mu = -iU^{-1}(\mathbf{r},t)\partial_\mu U(\mathbf{r},t) = \Upsilon^a_\mu\cdot\sigma^a$

$$\Upsilon^1_\mu(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\xi\cos\varphi - \partial_\mu\vartheta\sin\varphi\Big)(\mathbf{r},t),$$

$$\Upsilon^2_\mu(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\xi\sin\varphi + \partial_\mu\vartheta\cos\varphi\Big)(\mathbf{r},t),$$

$$\Upsilon^3_\mu(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\xi + \cos\vartheta\partial_\mu\varphi\Big)(\mathbf{r},t).$$

В адиабатическом приближении $\xi = \pi - \varphi$ и z-компонента потенциала $\Upsilon^3_\mu = -\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)\partial_\mu\varphi$ представляет адиабатическую фазу Берри, причем электроны в двух различных состояниях спина захватывают разные по знаку фазы. С учетом влияния калибровочных потенциалов уравнение Паули в двухжидкостной модели может быть получено в виде

$$i\hbar\partial_t\psi_{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \pm \hbar\boldsymbol{\Upsilon}^{\mathrm{ad}}\right)^2\psi_{\uparrow,\downarrow} + e\phi\psi_{\uparrow,\downarrow} \pm \hbar\chi^{\mathrm{ad}}\psi_{\uparrow,\downarrow} + \frac{\Upsilon}{2}\psi_{\uparrow,\downarrow},$$

здесь $\hbar$ — постоянная Планка, μ — масса частицы, c — скорость света в вакууме. Векторный и скалярный калибровочные потенциалы в адиабатическом приближении имеют вид $\boldsymbol{\Upsilon}^{\mathrm{ad}} = \pm\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)\partial\varphi$ и $\chi^{\mathrm{ad}} = \pm\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)\partial_t\varphi$, где знаки $\pm$ определены для электрона в состоянии с положительной проекцией спина $\uparrow$ и отрицательной проекцией спина $\downarrow$ соответственно.

Уравнения непрерывности для системы электронов, движущихся на фоне калибровочных полей, может быть получено путем дифференцирования по времени выражения для концентрации числа частиц, а также с использованием уравнения Паули

$$\partial_t n_{\uparrow\downarrow} + \nabla\mathbf{j}_{\uparrow\downarrow} = 0. \tag{6}$$

Микроскопическое представление вектора плотности тока частиц в spin-up- и spin-down-состояниях при выводе уравнений непрерывности появляется в виде

$$\mathbf{j}_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2\mu}\langle\mathbf{D}^+\psi^+_{\uparrow\downarrow}\psi_{\uparrow\downarrow} + \psi^+_{\uparrow\downarrow}\mathbf{D}\psi_{\uparrow\downarrow}\rangle,$$

макроскопическое представление плотности тока может быть введено в форме

$$\mathbf{j}_{\uparrow\downarrow} = n_{\uparrow\downarrow}\mathbf{v}_{\uparrow\downarrow}, \mu\mathbf{v}_{\uparrow\downarrow} = \mathbf{p}_{\uparrow\downarrow} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \pm \boldsymbol{\Upsilon}^{\mathrm{ad}}.$$

Дифференцируя по времени выражение для плотности тока (2) и используя уравнение Паули, уравнения баланса импульса в макроскопической форме могут быть получены в виде

$$\mu n_\uparrow \left(\partial_t + \mathbf{v}_\uparrow \cdot \nabla\right)\mathbf{v}_\uparrow = \hbar n_\uparrow \mathbf{h} + en_\uparrow \mathbf{E} + \\ + \hbar n_\uparrow \mathbf{v}_\uparrow \times \mathbf{b} + \frac{e}{c} n_\uparrow \mathbf{v}_\uparrow \times \mathbf{B} - \nabla p_\uparrow + \\ + \frac{\hbar^2}{4\mu} n_\uparrow \nabla \left(\frac{\triangle n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{(\nabla n_\uparrow)^2}{2n_\uparrow^2}\right) - n_\uparrow \nabla \Upsilon \quad (7)$$

и

$$\mu n_\downarrow \left(\partial_t + \mathbf{v}_\downarrow \cdot \nabla\right)\mathbf{v}_\downarrow = -\hbar n_\downarrow \mathbf{h} + en_\uparrow \mathbf{E} - \\ - \hbar n_\downarrow \mathbf{v}_\downarrow \times \mathbf{b} + en_\uparrow \mathbf{v}_\uparrow \times \mathbf{B} - \nabla p_\downarrow + \\ + \frac{\hbar^2}{4\mu} n_\downarrow \nabla \left(\frac{\triangle n_\downarrow}{n_\downarrow} - \frac{(\nabla n_\downarrow)^2}{2n_\downarrow^2}\right) - n_\downarrow \nabla \Upsilon. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) описывают эволюцию заряженной частицы со спином на фоне электромагнитного поля Максвелла и калибровочного поля, в адиабатическом приближении, где калибровочные «электрическое» и «магнитное» поля имеют вид

$$\mathbf{h} = \partial_t \boldsymbol{\Upsilon} - \nabla\chi, \quad \mathbf{b} = -\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}.$$

Второе и четвертое слагаемые в правой части уравнений (7) и (8) представляют силу Лоренца, действующую на плотность движущегося заряда. Первое и третье слагаемые в правой части уравнений баланса импульса характеризуют действие калибровочных полей, отличающиеся по знаку для электронов в spin-up- и spin-down-состояниях. При этом действие калибровочного магнитного

$$b_k = -\varepsilon_{kij}\frac{\hbar}{2}\mathbf{m} \cdot (\partial_i \mathbf{m} \times \partial_j \mathbf{m})$$

поля приводит к топологическому эффекту Холла, а действие калибровочного электрического поля

$$h_k = -\frac{\hbar}{2}\mathbf{m} \cdot (\partial_t \mathbf{m} \times \partial_k \mathbf{m})$$

приводит к возникновению спин-движущей силы, разделяющей электроны с положительной и отрицательной проекциями спина электронов. Пятое, шестое и седьмое слагаемые представляют поле потенциальных сил, представимых через градиенты потенциалов. Пятое слагаемое есть градиент от кинетического давления, которое для системы вырожденных электронов имеет вид

$$p_{\uparrow\downarrow} = \frac{(6\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{\mu} n_{\uparrow\downarrow}^{5/2}.$$

Шестое слагаемое представляет собой квантовую силу, представленную как градиент от квантового давления Маделунга—Бома, отсутствующую в классическом пределе и пропорциональную квадрату постоянной Планка. Последнее слагаемое — градиент от спинового потенциала, возникающего как результат калибровочных преобразований и представленного через углы Эйлера:

$$\Upsilon = \frac{\hbar^2}{8\mu}(\nabla \mathbf{m})^2 = \frac{\hbar^2}{8\mu}\left((\nabla\Theta)^2 + \sin^2\Theta \cdot (\nabla\Phi)^2\right)$$

и стремящегося вытолкнуть электроны из области пространства с быстро меняющейся магнитной структурой [13].

Для замыкания полученной системы уравнений должны быть получены уравнения для x и y проекций плотности спина $\mathbf{s}$, микроскопическое представление которых может быть задано в форме $s^x = \frac{\hbar}{2}\langle\psi^+\sigma^x\psi\rangle \frac{\hbar}{2}\langle\psi_\uparrow^+\psi_\downarrow + \psi_\downarrow^+\psi_\uparrow\rangle$, $s^y = \frac{\hbar}{2}\langle\psi^+\sigma^y\psi\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\langle\psi_\uparrow^+\psi_\downarrow + \psi_\downarrow^+\psi_\uparrow\rangle$. Применяя вышеописанную процедуру к проекциям плотности спина, уравнения эволюции плотности спина могут быть получены в виде

$$\partial_t s_x + \nabla \mathbf{j}_s^x = -2\chi^{\text{ad}} s_y - 2\boldsymbol{\Upsilon}^{\text{ad}} \cdot \mathbf{j}_s^y, \quad (9)$$

$$\partial_t s_y + \nabla \mathbf{j}_s^y = 2\chi^{\text{ad}} s_x + 2\boldsymbol{\Upsilon}^{\text{ad}} \cdot \mathbf{j}_s^x, \quad (10)$$

где появляющаяся плотность спинового тока имеет вид

$$\mathbf{j}_s^x = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)s_x - \frac{\hbar}{\mu}s_y\left\{\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow}\right\}$$

и

$$\mathbf{j}_s^y = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)s_y + \frac{\hbar}{\mu}s_x\left\{\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow}\right\}.$$

Калибровочные электрическое и магнитное поля связаны друг с другом соотношениями

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0,$$
$$\nabla \times \mathbf{h} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}.$$

3. ДИНАМИКА ЗАВИХРЕННОСТИ

3.1. Электроны в поле скирмиона

Для исследования вихревых процессов в квантовой системе электронов в поле магнитной структуры с нетривиальной топологией должно быть получено квантово-гидродинамическое уравнение завихренности потока электронов в рамках двухжидкостной модели. Канонический импульс для частиц в spin-up- и spin-down-состояниях на фоне калибровочного поля пропорционален выражению

$$\mathbf{p}_{\uparrow\downarrow} = \mp\frac{\hbar}{\mu}\boldsymbol{\Upsilon}^{\text{ad}} + \mathbf{v}_{\uparrow\downarrow}, \quad (11)$$

здесь знак «минус» перед первым слагаемым в выражении соответствует spin-up-состоянию, а «плюс» — spin-down. Классическая завихренность может быть введена в форме

$$\boldsymbol{\Omega}_{\uparrow\downarrow} = \nabla \times \mathbf{p}_{\uparrow\downarrow} = \pm\frac{\hbar}{\mu}\mathbf{b} + \nabla \times \mathbf{v}_{\uparrow\downarrow}.$$

Используя систему уравнений квантовой гидродинамики (7) и (8) и выражение для импульса (11), приходим к уравнению динамики классической завихренности для двух потоков электронов:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_{\uparrow\downarrow}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_{\uparrow\downarrow} \times \mathbf{\Omega}_{\uparrow\downarrow}) - \frac{1}{\mu}\nabla(n_{\uparrow\downarrow}) \times \nabla(p_{\uparrow\downarrow}).$$

Для баротропной жидкости классическая спиральность, определенная выражением

$$\xi = \int d^3x \mathbf{p}_{\uparrow\downarrow} \cdot \mathbf{\Omega}_{\uparrow\downarrow},$$

для каждой из компонент потоков электронов должна сохраняться $\dfrac{d\xi}{dt} = 0$.

3.2. Классическая завихренность для частиц на фоне неабелева калибровочного поля Янга—Миллса

Для частиц со спином $\frac{1}{2}$, движущихся на фоне неабелевых калибровочных полей и внешнего электромагнитного поля, плотность завихренности (vorticity density) может быть задана выражением вида

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{P}, \mathbf{P} = \mathbf{j} + \frac{e}{\mu c}\mathbf{A}\psi^+\psi + \frac{\hbar}{2\mu}\mathbf{\Upsilon}^{\,b}\psi^+\hat{\sigma}^b\psi. \quad (12)$$

Используя уравнение баланса импульса (5), уравнение эволюции для $\mathbf{P}$ может быть получено в форме

$$\mu\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\nabla\left(e\phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{S^a}{\rho}\nabla\chi^a + \\ + S^a\varepsilon^{abc}\chi^b\mathbf{\Upsilon}^c + S^a\mathbf{v} \times \mathbf{b}^a + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Тогда уравнение эволюции завихренности $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{\Omega}}{\rho}$ примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) - \frac{1}{\mu}\nabla\left(\frac{s^a}{\rho}\right) \times \nabla\chi^a + \mathbf{\Xi}. \quad (13)$$

Как видно из выражения (12) и уравнения динамики (13), наличие неабелевых калибровочных полей меняет обычную вихревую структуру и, более того, приводит к несохранению спиральности. Поскольку калибровочные поля порождают силовые поля, зависящие от спина частицы, можно говорить о том, что наличие спин-зависящих сил приводит к потере постоянства спиральности

$$\xi^i = \int d^3x \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \neq 0.$$

Спин-зависящие силы не являются потенциальными и способны менять спиральность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены классические поля в модели квантовой гидродинамики. Введены поля Янга—Миллса, позволяющие описать спин-орбитальное взаимодействие Рашбы. Получено уравнение эволюции частицы со спином, движущейся во внешнем электромагнитном поле и калибровочных полях Янга—Миллса. Показано, что спиральность не должна сохраняться, поскольку калибровочные потенциалы порождают силовые поля, зависящие от спина.

Построена двухжидкостная модель квантовой гидродинамики, позволяющая описать движение потока нерелятивистских электронов на фоне нетривиальной магнитной структуры скирмиона. В результате действия унитарных локальных преобразований при переходе в систему отсчета, связанную с магнитными моментами скирмиона, мы приходим к появлению абелевых калибровочных потенциалов. Получена замкнутая система квантово-гидродинамических уравнений, состоящая из уравнения непрерывности (6), баланса импульса (7), (8) и эволюции плотности спина (9), (10) и описывающая электроны в spin-up- и spin-down-состояниях как две раздельные жидкости. Получено выражение завихренности электронного потока и показано, что в случае действия абелевых калибровочных полей спиральность должна сохраняться.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-72-00017). Благодарю за обсуждение материала, представленного в статье, доктора физико-математических наук, профессора кафедры теоретической физики физического факультета МГУ А. В. Борисова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berche B., Medina E.* // Eur. J. Phys. 2013. **34**. P. 161.
2. *Pei-Qing Jin, You-Quan Li, Fu-Chun Zhang* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. **39**. P. 7115.
3. *Culcer D., Sinova J., Sinitsyn N. A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**. 046602.
4. *Yu X. Z., Onose Y., Kanazawa N.* et al. // Nat. Mat. 2011. **10**. P. 106.
5. *Yu X. Z., Kanazawa N., Zhang Z.* et al. // Nat. Commun. 2012. **3**. P. 988.
6. *Nagaosa N., Yu X. Z., Tokura Y.* // Phil. Trans. R. Soc. A. 2012. **370**. P. 5806.
7. *Nagaosa N., Tokura Y.* // Nature Nanotechnology. 2013. **8**. P. 899.
8. *Muhlbauer S., Binz B., Jonietz F.* et al. // Science. 2009. **323**. P. 915.
9. *Jung Hoon Han* // Skyrmions in Condensed Matter. 2017. Springer.
10. *Everschor-Sitte K., Sitte M.* // J. Appl. Phys. 2014. **115**. 172602.
11. *Bruno P., Dugaev V. K., Taillefumier M.* // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**. 096806.
12. *Schulz T., Ritz R., Bauer A.* et al. // Nat. Phys. 2012. **8**. P. 301.
13. *Fujita T., Jalil M. B. A., Tan S. G., Murakami S.* // J. Appl. Phys. 2011. **110**. 121301.

Gauge Fields in the Theory of Condensed Matter and Helicity Conservation

M. Iv. Trukhanova

Department of General Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.
Moscow 119991, Russia.
E-mail: mar-tiv@yandex.ru.

A model of the quantum hydrodynamics of a charged particle in an external electromagnetic field is considered with account for the spin–orbit interaction and the influence of the Zeeman energy. The model is based on the formalism of introducing non-Abelian Yang—Mills gauge fields. It is shown that non-Abelian gauge fields generate forces, that act on the spin and spin current. It is demonstrated that the helicity of a particle moving on the background of such fields, that create forces that depend on the spin of the particle, is not conserved. A two-fluid model of quantum hydrodynamics is developed for systems of electrons in spin-up and spin-down states moving against the background of the magnetic structure of a skyrmion with a nontrivial topology. A system of continuity equations, momentum balance, and evolution equations of spin density is constructed, and the helicity conservation for electron fluxes is proved in the framework of the proposed two-fluid model.

Keywords: gauge fields, quantum hydrodynamics, magnetic skyrmions, electron–skyrmion interaction.
PACS: 11.15.-q, 47.35.-i, 12.39.Dc.
Received 23 November 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 2. Pp. 103–108.

Сведения об авторе

Труханова Мария Ивановна — канд. физ.-мат. наук, ассистент; e-mail: mar-tiv@yandex.ru.