

## Спиральная структура галактик в калибровочной теории гравитации

Е. П. Кубарко,<sup>а</sup> П. И. Пронин<sup>б</sup>

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра теоретической физики.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 17.11.2019, после доработки 28.11.2019, принята к публикации 03.12.2019.

Рассматривается движение звезд галактических дисков в эпициклическом приближении в потенциале, вытекающем из калибровочной теории гравитации. Неустойчивость круговых орбит к малым возмущениям в таком потенциале может служить механизмом для образования спиральных рукавов. Найдены те значения неизвестных коэффициентов, входящих в лагранжиан теории, при которых это неустойчивость может возникнуть.

*Ключевые слова:* спиральная структура, калибровочная теория гравитации, эпициклическая частота.

УДК: 530.21, 530.24.

PACS: 04.20.Fy, 04.20.Jb, 04.25.Nx, 04.50.Kd, 04.80.Cc, 11.15.-q, 95.30.Sf, 98.35.Nj.

### ВВЕДЕНИЕ

Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что в известной и исследованной части Вселенной звезды и межзвездное вещество группируются в галактические системы, состоящие из огромного количества звезд и газа. Существует классификация галактик, подразделяющая их на эллиптические и дисковые. Последние, в свою очередь, делятся на линзовидные, спиральные и неправильные. Из наблюдений известно, что почти две трети массивных галактик относятся к числу спиральных. Выяснению сущности явления образования спиралей уделялось и уделяется достаточно много внимания, но вопрос о том, как формируются и эволюционируют спиральные рукава, остается открытым.

Среди спиральных галактик можно выделить 3 типа [1]:

- флоккулентные с многочисленными короткими рукавами;
- галактики с двумя главными четкими и симметричными рукавами (grand design);
- галактики с множественными спиральями.

Одной из первых работ по объяснению спиральной структуры галактик была динамическая теория Линдблада [2], которая была довольно привлекательна и успешна за исключением того момента, что направление вращения и угол закручивания спиралей в этой теории не совпадали с экспериментальными данными. Эту теорию несколько улучшила гипотеза Гейзенберга и Вайцеккера [3, 4] о влиянии магнитного поля на образование и развитие спиральной структуры.

К разряду успешных с математической точки зрения следует отнести работу [5], в которой образование спиральной структуры связывается с пространственной неоднородностью распределения материи в галактиках, следствием которой будет ветвление решений нелинейных дифференциальных уравнений. В этой теории угол закручивания спиральных рукавов совпадал с наблюдательными данными.

К числу последовательных теорий, анализирующих структуру дисков галактик с точки зрения кинематики, относятся работы Колпакова и Терлецкого [6], развитые впоследствии Майлгромом [7]. Суть их подхода заключается в допущении, что движение звезд следует рассматривать в модифицированном ньютоновском потенциале. Тогда круговые орбиты становятся неустойчивыми к малым возмущениям в некотором диапазоне галактоцентрических расстояний и спиральные рукава в этой теории — это геометрическое место точек, где расположена материя, «выброшенная» со своей круговой орбиты. Направление закручивания и постоянство угловой скорости таких рукавов соответствуют наблюдаемому. В настоящей статье подробнее рассматривается именно этот подход.

В настоящее время существуют 3 основные теории для объяснения спиральной структуры:

- теория спиральных волн плотности, предсказывающая долгоживущие рукава, вращающиеся с постоянной угловой скоростью [11];
- динамическая теория, согласно которой спирали — это транзиентная возобновляющаяся структура, вращающаяся дифференциально [12, 13];
- приливные взаимодействия, объясняющие, по предположению, структуру grand design.

Модели, рассмотренные в [6, 7] не противоречат им, но предлагают простой механизм возникновения неустойчивости в звездных дисках за счет модификации потенциала гравитационного взаимодействия.

Анализу структуры спиральных галактик в одной из таких модифицированных теорий гравитации и посвящена данная работа.

Во втором разделе мы коротко напомним о механизме образования спиральной структуры галактик в рамках теории [6] и [7] и рассмотрим некоторые модели модифицированных теорий гравитации, приводящих к неьютоновским потенциалам гравитационного взаимодействия в нерелятивистском пределе в свете обзора [8].

Особое внимание будет уделено калибровочной теории гравитации [9, 10], модификации гравитационного потенциала взаимодействия и анализу спиральной структуры галактик, открывающемуся в рамках данной теории.

<sup>а</sup> E-mail: kate.baggins24@gmail.com

<sup>б</sup> E-mail: petr\_pro\_iv@mail.ru

Третий раздел посвящен изучению поведению квадрата эпициклической частоты и механизму образования неустойчивости, приводящего к возникновению спиральной структуры.

В рамках калибровочной теории гравитации дан полный анализ ограничений на неизвестные численные константы, входящие в лагранжиан теории.

В последнем разделе статьи мы рассматриваем возможности развития данного подхода и приводим соображения, которые могут привести к ограничениям на спектр калибровочной теории гравитации как со стороны астрофизических факторов, так и со стороны требования перенормируемости квантовой калибровочной теории гравитации.

## 1. НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

В работе [6] для объяснения спиральной структуры использовался потенциал гравитационного взаимодействия типа  $V(r) = -\frac{GM \exp(-kr)}{r}$ , для которого справедливо не уравнение Пуассона

$$\Delta U(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}),$$

где

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

а уравнение Юкавы–Неймана

$$\Delta U(\mathbf{x}) - \mu^2 U(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x})$$

с общим решением

$$U(\mathbf{x}) = -G \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\exp(-\mu(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

Появление уравнения Юкавы–Неймана может быть объяснено модификациями теории Эйнштейна, приводящими к появлению ньютоновских вкладов. К числу таких теорий относятся теория Эйнштейна с космологическим членом, квадратичная теория гравитации, лагранжиан которой содержит, кроме скаляра кривизны риманова пространства, геометрические инварианты второго порядка по кривизне, скалярно-тензорные [14], векторно-тензорные [15] и тензор-тензорные теории гравитации, супергравитация, многомерные теории, калибровочная теория гравитации, в которой метрика и связность рассматриваются как независимые динамические переменные, что является следствием трактовки гравитации как калибровочной теории группы Пуанкаре. Подробный обзор таких теорий, их следствий и механизмов возникновения ньютоновских вкладов в гравитационный потенциал можно найти в работе [8].

Здесь мы кратко напомним некоторые теоретические предпосылки генерации ньютоновских сил в обобщенных теориях гравитации. В рамках ППН-формализма для сферически симметричной метрики квадрат интервала дается выражением

$$ds^2 = g_{00}(r)dt^2 - g_{11}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Для  $g_{00}(r)$  справедливо представление

$$g_{00}(r) = 1 + U(r) + \dots$$

В теории Эйнштейна

$$U(r) = -\frac{G}{r},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная.

Остановимся на калибровочной теории гравитации, в которой наиболее общий лагранжиан, включающий слагаемые, квадратичные по кривизне и кручению, содержит 10 слагаемых и 9 неизвестных коэффициентов [9, 10]:

$$L = \frac{1}{16\pi G} \{ R + Q_{\lambda\mu\nu} (a_1 Q^{\lambda\mu\nu} + a_2 Q^{\nu\mu\lambda} + a_3 g^{\lambda\nu} Q^{\alpha\mu}_{\alpha}) + R^{\alpha\beta\mu\nu} (b_1 R_{\alpha\beta\mu\nu} + b_2 R_{\mu\nu\alpha\beta} + b_3 R_{\alpha\mu\beta\nu} + b_4 R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + b_5 R_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + b_6 g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} R) \}.$$

Здесь  $g_{\beta\nu}$  — метрический тензор;

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}$  — тензор кривизны;

$Q^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})$  — тензор кручения;

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  — аффинная связность;

$R = R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$  — скаляр кривизны.

Сферически-симметричные решения уравнений поля приводят к потенциалу вида [16, 17]

$$U(r) = -\frac{1}{r} \left( 1 + \alpha_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_1}\right) + \alpha_2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_2}\right) \right), \quad (1)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{4(4 + a_1 + a_2)}{3(2a_1 + a_2)}, \quad (2)$$

$$\lambda_1 = -\frac{4(4(b_1 + b_2) + 2b_3 + b_4 + b_5)}{3\alpha_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{2a_1 + a_2 + 3a_3 - 2}{3(2a_1 + a_2 + 3a_3)}, \quad (3)$$

$$\lambda_2 = \frac{4(b_1 + b_2 + b_4 + b_5) + 2b_3 + 12b_6}{2\alpha_2}.$$

Поэтому рассматриваемая теория естественным образом приводит к модификации ньютоновского потенциала.

Наша задача состоит в том, чтобы, основываясь на полученном виде потенциала (1), подобрать такие значения неизвестных коэффициентов  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , при которых круговые орбиты станут неустойчивы к малым возмущениям и приведут к образованию спиральной структуры.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КВАДРАТА ЭПИЦИКЛИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ

По аналогии с работой [6] рассмотрим орбитальное движение звезд диска в эпициклическом приближении. Оно состоит в том, что в результате малых возмущений круговых орбит звезды движутся по эллипсам — эпициклам — с эпициклической частотой  $\kappa$ , а центры эллипсов движутся по круговым

орбитам. Квадрат эпициклической частоты дается формулой

$$\kappa^2 = \frac{3}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Условием устойчивости орбит к малым возмущениям является  $\kappa^2 > 0$ , что всегда выполняется для ньютоновского потенциала, но для модифицированных потенциалов  $\kappa^2$  может быть знакопеременной величиной. По предположению, неустойчивость орбит, возникающая вследствие обращения в нуль  $\kappa^2$  может объяснить спиральную структуру в дисках галактик. В работе [6] условие  $\kappa^2 = 0$  выполнялось на некотором галактоцентрическом расстоянии  $a$  и спирали охватывали область от  $a$  до края диска. Можно было бы совместить эту модель с теорией волн плотности, отождествив  $a$  с радиусом коротации и считая, что возмущение распространяется как к краю, так и к центру диска, но это не может соответствовать действительности. Например, для Млечного Пути на радиусе коротации  $\kappa^2 \neq 0$ . Поэтому модель [6] может предложить новый механизм образования неустойчивости, но не может рассматриваться как полноценное объяснение возникновения спиральной структуры. Отметим, что условие  $\kappa^2 = 0$  в теориях аккреционных дисков определяет последнюю устойчивую круговую орбиту [18, 19].

Исследуем функцию  $\kappa^2(r)$  для потенциала (1) и найдем значения неизвестных коэффициентов, при которых квадрат эпициклической частоты становится равным нулю.

Для рассматриваемого потенциала (1)

$$\kappa^2 = \frac{GM}{r^3} \left( 1 - \alpha_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_1}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_1^2} - \frac{r}{\lambda_1} - 1 \right) - \alpha_2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_2}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_2^2} - \frac{r}{\lambda_2} - 1 \right) \right).$$

При  $r \rightarrow \infty$   $\kappa^2 \rightarrow +0$ , при  $r \rightarrow 0$  знак  $\kappa^2$  зависит от знака выражения  $(1 + \alpha_1 + \alpha_2)$ . Поскольку при  $r \rightarrow 0$   $U(r)$  должно стремиться к  $-\infty$ , то  $(1 + \alpha_1 + \alpha_2) > 0$ . Поэтому при  $r \rightarrow 0$   $\kappa^2 \rightarrow +\infty$ .

Представим квадрат эпициклической частоты в виде  $\kappa^2 = \frac{1}{r^3}(f_1 - f_2)$  (для простоты используем систему единиц, в которой  $GM = 1$ ) и приравняем это выражение нулю. Найдем по отдельности нули функций  $f_1 \equiv 1 - \alpha_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_1}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_1^2} - \frac{r}{\lambda_1} - 1 \right)$  и  $f_2 \equiv \alpha_2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_2}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_2^2} - \frac{r}{\lambda_2} - 1 \right)$ .

Нули  $f_2$  — это нули квадратного уравнения  $y_2^2 - y_2 - 1 = 0$ , т.е.  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Нас интересуют неотрицательные  $y_2$ , поэтому остается только корень  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Отсюда сразу находим  $\lambda_2 = \frac{2R}{1 + \sqrt{5}}$ , где  $R$  — галактоцентрический радиус, на котором  $\kappa^2$  должна обращаться в ноль.  $\lambda_2$  зависит только от  $R$  и не зависит от  $\alpha_2$ .

$f_1 \rightarrow 1$  при  $y_1 \rightarrow \infty$  и  $f_1 \approx (1 + \alpha_1)$  при  $y_1 \rightarrow 0$ . Если  $\alpha_1 < -1$ , то  $f_1$  точно имеет вещественный ноль. Его можно найти численно, разлагая в ряд  $\exp(-y_1)$ . Чем больше  $|\alpha_1|$ , тем больше корень  $y_1$  и меньше  $\lambda_1$ .

Функция  $f_1$  также имеет нули при  $\alpha_1 \geq \frac{\exp(3)}{5} \approx 4$ . Действительно, при положительных  $\alpha$   $f_1$  имеет минимум. Найдем его из условия  $\frac{df_1}{dy_1} = 0$ :

$$\frac{df_1}{dy_1} = \alpha_1 \exp(-y_1)(y_1^2 - 3y_1) = 0.$$

Минимуму соответствует значение  $y_1 = 3$ . Из условия  $f_1(3) = 0$  получаем оценку  $\alpha_1 \geq \frac{\exp(3)}{5} \approx 4$ . Итак, при  $\alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}$   $f_1$  имеет один корень, при  $\alpha_1 > \frac{\exp(3)}{5}$   $f_1$  имеет 2 корня.

Найдем значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\lambda_1$ , при которых  $\kappa^2$  равно нулю.

К условию  $\kappa(R)^2$  добавляется условие  $\frac{d\kappa(r)^2}{dr} = 0$  при  $r = R$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa(r)^2}{dr} = & \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_1}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_1^2} - \frac{3r}{\lambda_1} \right) + \\ & + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_2}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_2^2} - \frac{3r}{\lambda_2} \right) + \\ & + \frac{3}{r} \left( 1 - \alpha_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_1}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_1^2} - \frac{r}{\lambda_1} - 1 \right) - \right. \\ & \left. - \alpha_2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_2}\right) \left( \frac{r^2}{\lambda_2^2} - \frac{r}{\lambda_2} - 1 \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение обращается в ноль, т.к.  $\kappa(R)^2 = 0$ , и, возвращаясь к обозначениям  $y_1 = \frac{r}{\lambda_1}$  и  $y_2 = \frac{r}{\lambda_2}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \exp(-y_1)(y_1^2 - 3y_1) + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \exp(-y_2)(y_2^2 - 3y_2) = 0; \\ y_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, y_2^2 - 3y_2 = -\sqrt{5}, \text{ поэтому} \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\sqrt{5} \lambda_1} \exp(y_2 - y_1)(y_1^2 - 3y_1).$$

Например, при  $\alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}$ ,  $y_1 = 3$  и  $\alpha_2 = 0$ . При  $\alpha_1 = -1.5$   $\alpha_2 \approx 1.024 > |\alpha_1| - 1$ .

### 2.1. Допустимые значения $\alpha_1$ , $\alpha_2$ и $\lambda_1$ , $\lambda_2$

Из условия  $\kappa^2(R) = 0$  на заданном радиусе  $R$  в потенциале притяжения (1) вытекают следующие ограничения на возможные значения параметров:

- $(1 + \alpha_1 + \alpha_2) > 0$ ;
  - $\lambda_2 = \frac{2R}{1 + \sqrt{5}}$ ;
  - $\alpha_1 < -1$ , тогда  $\alpha_2 > |\alpha_1| - 1$ , а  $\lambda_1 = \frac{R}{y}$ , где  $y$  — решение уравнения  $1 - \alpha_1 \exp(-y)(y^2 - y - 1) = 0$  при заданной  $\alpha_1$ ;
  - $\alpha_1 \geq \frac{\exp(3)}{5}$ , тогда  $\alpha_2 > -\alpha_1 - 1$  (в том числе  $\alpha_2$  может равняться нулю) и  $\lambda_1$  определяется аналогично.
- При  $\alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}$ ,  $\alpha_2 = 0$  минимальное значение  $\kappa^2$  в точности равно нулю.

Для других значений  $\alpha_1$  это выполняется при

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\sqrt{5} \lambda_1} \exp(y_2 - y_1)(y_1^2 - 3y_1).$$

Во всех остальных случаях  $\kappa^2$  всюду положительна. Заметим также, что описанный метод нахождения корней уравнения  $\kappa^2$  путем приравнивания к нулю обеих функций  $f_1$  и  $f_2$  дает наименьшее из решений в том случае, когда корней 2.

**3. ДОПУСТИМЫЕ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $a_i, b_j$**

Полученные ограничения на возможные значения  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1$  и  $\lambda_2$ , накладывают ограничения на допустимые области изменения коэффициентов  $a_i, b_j$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, 6$ ), которые даются выражениями (2), (3).

Некоторые достаточно очевидные общие выводы:

- Из  $2a_1 + a_2 \neq 0, 2a_1 + a_2 + 3a_3 \neq 0$ , в частности, следует, что  $a_1, a_2, a_3$  не могут быть равны нулю одновременно;
- $\text{sign}(4(4(b_1 + b_2) + 2b_3 + b_4 + b_5)) = -\text{sign}(\alpha_1)$ ,  $\text{sign}(4(b_1 + b_2 + b_4 + b_5) + 2b_3 + 12b_6) = \text{sign}(\alpha_2)$ , обеспечивает выполнение условия  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 > 0$ .

**3.1. Области изменения  $a_i$**

Обозначим  $2a_1 + a_2 \equiv x$ , тогда  $\alpha_1 = -\frac{4(4+x)}{3x}$  и  $x = -\frac{16}{3\alpha_1+4}$ .

Пусть  $2a_1 + a_2 + 3a_3 = x + 3a_3 \equiv z$  и  $\alpha_2 = \frac{z-2}{3z}$ , откуда  $z = \frac{2}{1-3\alpha_2}$  и  $a_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{1-3\alpha_2} + \frac{16}{3\alpha_1+4} \right)$  и

$$2a_1 + a_2 = -\frac{16}{3\alpha_1 + 4},$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{1 - 3\alpha_2} + \frac{16}{3\alpha_1 + 4} \right).$$

Из анализа эпициклической частоты следовали следующие ограничения на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

- $\alpha_1 < -1$  и  $\alpha_2 > |\alpha_1| - 1$ ;
- $\alpha_1 \geq \frac{\exp(3)}{5}$  и  $\alpha_2 > -\alpha_1 - 1$ .

В выражение для эпициклической частоты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  входят симметрично, поэтому индексы можно переставлять (одновременно переставляя индексы у  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ), но в данном рассмотрении существенно, как именно обозначены коэффициенты.

В частности, при  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\exp(3)}{5} \approx 4, 2a_1 + a_2 = -4, a_3 \approx \frac{14}{11}$ .

Наоборот, при  $\alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}, \alpha_2 = 0, 2a_1 + a_2 \approx -1, a_3 \approx 1$ .

Более общие зависимости:

- при  $\alpha_1 < -1, \alpha_2 > |\alpha_1| - 1 > 0$  с ростом  $|\alpha_1|$   $2a_1 + a_2 \rightarrow +0, a_3 \rightarrow -0$ , причем  $a_3 > -3$ . При  $\alpha_1 = -2$   $2a_1 + a_2$  имеет максимум, равный 8, а  $a_3$  — минимум. При  $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$   $2a_1 + a_2 = -\infty, a_3 = +\infty$ . При  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$   $a_3 = +\infty$ .
- при  $\alpha_2 < -1, \alpha_1 > |\alpha_2| - 1 > 0$  с ростом  $|\alpha_2|$   $2a_1 + a_2 \rightarrow -0$  и  $a_3 \rightarrow +0$  монотонно.  $2a_1 + a_2 > -4, a_3 < 1.5$ .
- при  $\alpha_1 \geq \frac{\exp(3)}{5}, \alpha_2 > -\alpha_1 - 1$  с ростом  $\alpha_1$   $2a_1 + a_2 \rightarrow -0, -1 < 2a_1 + a_2 < 0$ . При  $\alpha_2 < \frac{1}{3}$   $a_3 > 0$ .

Отметим, что в этом случае можно положить  $a_3 = 0$ . Для этого должно выполняться равенство

$$\frac{2}{3\alpha_2 - 1} = \frac{16}{3\alpha_1 + 4} \Rightarrow 4 + \alpha_1 = 8\alpha_2.$$

При  $\alpha_2 > \frac{1}{3}$  и  $4 + \alpha_1 < 8\alpha_2$   $a_3 > 0$ .

При  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$   $a_3 = +\infty$ .

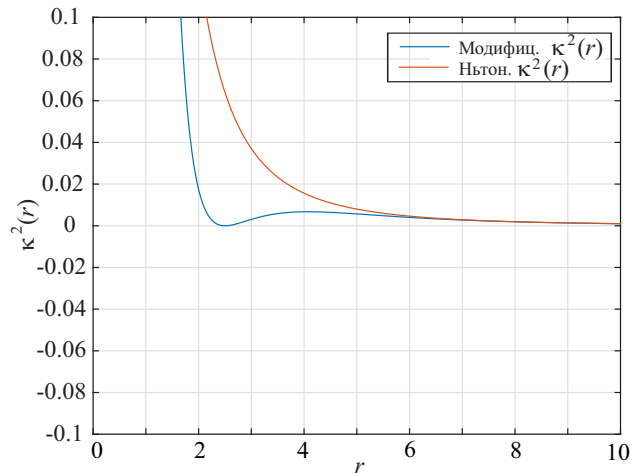


Рис. 1. Квадрат эпициклической частоты в ньютоновском и модифицированном потенциалах при  $\alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}, \alpha_2 = 0, R = 2.5, \lambda_1 = \frac{R}{3} \approx 0.8$

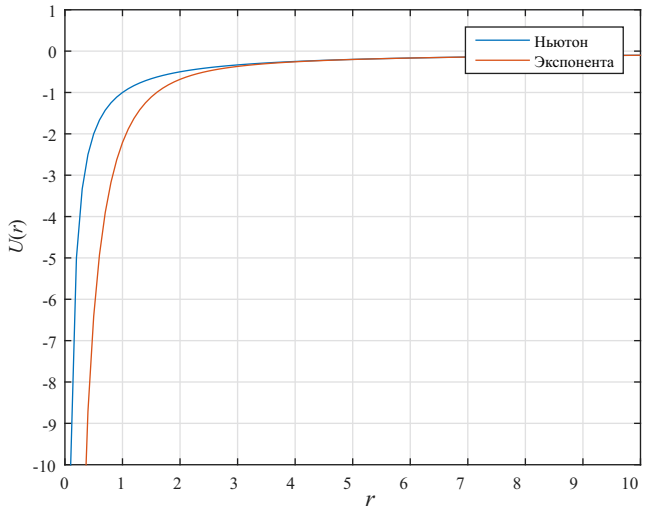


Рис. 2. Сравнение ньютоновского и модифицированного потенциалов

- г)  $\alpha_2 \geq \frac{\exp(3)}{5}, \alpha_1 > -\alpha_2 - 1$ .  
 При  $\alpha_1 < -\frac{4}{3}$   $2a_1 + a_2 > 0$  и  $a_3 < 0$ .  
 При  $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$   $2a_1 + a_2 = -\infty$ .  
 При  $\alpha_1 > -\frac{4}{3}$   $2a_1 + a_2 < 0$ .  
 При  $-\frac{4}{3} < \alpha_1 < 8\alpha_2 - 4$   $a_3 > 0$ .  
 При  $4 + \alpha_1 = 8\alpha_2$   $a_3 = 0$ .

Примечательно, что  $a_1, a_2, a_3$  не могут быть одного знака.

**3.2. Области изменения  $b_j$**

Попробуем получить оценки для коэффициентов  $b_j, j = 1, \dots, 6$  в аналогичных случаях.

Перепишем сначала выражения для  $\lambda_1, \lambda_2$  в следующем виде:

$$\lambda_1 = -\frac{16(b_1 + b_2) + 8b_3 + 4(b_4 + b_5)}{3\alpha_1};$$

$$\lambda_2 = \frac{4(b_1 + b_2) + 2b_3 + 4(b_4 + b_5) + 12b_6}{2\alpha_2}.$$

а)  $\alpha_1 < -1, \alpha_2 > |\alpha_1| - 1 > 0$ .

Из предыдущего анализа следовало, что в этом случае  $\lambda_2 = \frac{2R}{1+\sqrt{5}}$  (нет зависимости от  $\alpha_2$ ).

С другой стороны,  $\lambda_2 = \frac{2(2(b_1+b_2)+b_3)+4(b_4+b_5)+12b_6}{2\alpha_2}$ .  
Отсюда

$$2(b_1 + b_2) + b_3 + 2(b_4 + b_5) + 6b_6 = \frac{2R\alpha_2}{1 + \sqrt{5}} > 0, \\ (\alpha_2 > |\alpha_1| - 1 > 0).$$

Выразим

$$2(b_1 + b_2) + b_3 = \frac{2R\alpha_2}{1 + \sqrt{5}} - 2(b_4 + b_5) - 6b_6.$$

Далее, т. к.  $\lambda_1 > 0$  и  $\alpha_1 < 0$ , то

$$\lambda_1 = \frac{16(b_1 + b_2) + 8b_3 + 4(b_4 + b_5)}{3|\alpha_1|}$$

и

$$4(b_1 + b_2) + 2b_3 + b_4 + b_5 > 0. \\ 3\lambda_1|\alpha_1| = 4(b_4 + b_5) + 8(2(b_1 + b_2) + b_3) = \\ = 4(b_4 + b_5) + 16\left(\frac{R\alpha_2}{1 + \sqrt{5}} - (b_4 + b_5) - 3b_6\right), \\ b_4 + b_5 + 4b_6 = \frac{4R\alpha_2}{3(1 + \sqrt{5})} - \frac{\lambda_1|\alpha_1|}{4}.$$

Из анализа эпициклической частоты следовала следующая связь между  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$ :  $\lambda_1 = \frac{R}{y}$ , где  $y$  — решение уравнения  $1 - \alpha_1 \exp(-y)(y^2 - y - 1) = 0$  при заданной  $\alpha_1$ .

Поэтому независимыми величинами можно считать  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Отметим, что в принципе возможно оставить только один ненулевой коэффициент  $b_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .  $b_6$  не может быть единственным ненулевым коэффициентом, т. к.  $\lambda_1$  обратилась бы в ноль,  $\exp(-\frac{r}{\lambda_1}) \approx 0$ , а для случаев а) и б) существенны обе экспоненты.

б)  $\alpha_2 < -1, \alpha_1 > |\alpha_2| - 1 > 0$ .

$$\lambda_1 > 0 \Rightarrow 4(b_1 + b_2) + 2b_3 + b_4 + b_5 < 0.$$

Теперь

$$\lambda_1 = \frac{2R}{1 + \sqrt{5}} = -\frac{4(4(b_1 + b_2) + 2b_3 + (b_4 + b_5))}{3\alpha_1}.$$

$$4(b_1 + b_2) + 2b_3 + (b_4 + b_5) = -\frac{3\alpha_1 R}{2(1 + \sqrt{5})},$$

$$2\alpha_2\lambda_2 = 4(b_1 + b_2) + 2b_3 + 4(b_4 + b_5) + 12b_6 < 0, \\ \text{т. к. } \alpha_2 < 0, \lambda_2 > 0.$$

$$2\alpha_2\lambda_2 = -\frac{3\alpha_1 R}{2(1 + \sqrt{5})} + 3(b_4 + b_5) + 12b_6,$$

$$b_4 + b_5 + 4b_6 = \frac{2}{3}\alpha_2\lambda_2 + \frac{\alpha_1 R}{2(1 + \sqrt{5})}.$$

$\lambda_2$  зависит от  $\alpha_2$  так же, как  $\lambda_1$  от  $\alpha_1$  в предыдущем случае.

Так же из всех коэффициентов, в принципе, можно оставить только один отличный от нуля,  $b_i < 0, i = 1, \dots, 5$  (кроме  $b_6$  по причине, описанной выше).

в)  $\alpha_1 \geq \frac{\exp(3)}{5}, \alpha_2 > -\alpha_1 - 1$ .

Можно использовать выкладки для случая а) с учетом того, что теперь  $\alpha_1 > 0$ , а  $\alpha_2$  может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому

$$b_4 + b_5 + 4b_6 = \frac{4R\alpha_2}{3(1 + \sqrt{5})} + \frac{\lambda_1\alpha_1}{4}.$$

При  $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}$   $\lambda_1 = \frac{R}{3}$  и  $b_4 + b_5 + 4b_6 = \frac{R}{3}$ . Из анализа эпициклической частоты следовала та же связь  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$  (см. а)), только уравнение  $1 - \alpha_1 \exp(-y)(y^2 - y - 1) = 0$  в этом случае имеет 3 корня.

Можно оставить один ненулевой коэффициент  $b_i < 0, i = 1, \dots, 5$  при  $\alpha_2 < 0$ .  $b_6$  не может быть единственным ненулевым коэффициентом, т. к.  $\lambda_1$  обратилась бы в ноль,  $\exp(-\frac{r}{\lambda_1}) \approx 0$ , а для случаев в) существенна именно первая экспонента.

г)  $\alpha_2 \geq \frac{\exp(3)}{5}, \alpha_1 > -\alpha_2 - 1$ .

Выкладки аналогичны случаю б):

$$b_4 + b_5 + 4b_6 = \frac{2}{3}\alpha_2\lambda_2 + \frac{\alpha_1 R}{2(1 + \sqrt{5})}.$$

При  $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = \frac{\exp(3)}{5}$ ,  $\lambda_1 = \frac{R}{3}$  и  $b_4 + b_5 + 4b_6 = \frac{8R}{9}$ .

В этом случае в принципе можно оставить один ненулевой коэффициент  $b_i > 0, i = 1, \dots, 5$  при  $\alpha_1 < 0$  или  $b_6 > 0$  при  $\alpha_1 = 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние десятилетия появилось большое число модификаций эйнштейновской теории гравитации. Конструирование таких теорий исходит либо из намерения объяснить известные экспериментальные данные, либо из желания построить единую теорию, включающую в себя все четыре типа взаимодействий — сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное, — либо из попыток построить перенормируемую теорию гравитации.

Рассматриваемая калибровочная теория гравитации относится к числу наиболее успешных с геометрической точки зрения попыток включить гравитационное взаимодействие в общую картину мира, трактуя гравитационное взаимодействие как калибровочное в духе электродинамики и полей Янга—Миллса. Эта теория также весьма перспективна и в квантовой области, поскольку, в отличие от квадратичной теории гравитации, где в качестве динамической переменной рассматривается только метрика, калибровочная аффинно-метрическая теория гравитации позволяет для целого ряда моделей исключить духи (состояния с нулевой энергией) и тахионы [20].



Этой проблеме был посвящен ряд работ, в которых из требования отсутствия в спектре гравитационного поля духовых и тахионных состояний были наложены ограничения на значения констант  $a_i$  и  $b_j$ .

В нашей работе мы исходили из принципа соответствия, согласно которому всякая новая теория не должна противоречить существующей, должна уточнять последнюю и объяснять явления и факты, не получившие подтверждения в первоначальной теории. Поскольку в рамках теории гравитации Эйнштейна не было предложено приемлемого механизма появления ньютоновских поправок к закону тяготения, которые могли бы объяснить появление спиральных рукавов галактик, мы задействовали возможности, проистекающие из более общей теории гравитации — калибровочной теории.

Рассматривая структуру галактик в таком подходе, мы нашли целый ряд областей изменения параметров теории, допускающих наличие спиральной структуры. В этой связи предложенная гипотеза, с одной стороны, естественным путем вводит возможный механизм образования спиральной структуры, а с другой, — накладывает ограничения на неизвестные константы теории.

Наша следующая работа будет посвящена исследованию спектра калибровочной теории гравитации в духе работы [20] исходя из полученных ограничений на возможные значения  $a_i$  и  $b_j$ .

Авторы благодарны своим коллегам с кафедры теоретической физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за многочисленные обсуждения данной работы при ее написании. П. И. Пронин выражает искреннюю благодарность профессору А. В. Борисову за указание на работу [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elmegreen B. G.* Annals of New York Academy of Sciences, 1990.
2. *Lindblad B.* // Stokholm Obs. Ann. 1941. **13**, N 10; 1942. **14**, N 1; 1948. **15**, N 4
3. *Weizsacker C. F. V.* // Z. Naturforsch. 1948. **3a**. P. 524.
4. *Heisenberg W., Weizsacker C. F. V.* // Z. Physik. 1949. **125**. P. 290.
5. *Власов А. А.* // Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966.
6. *Колпаков В. П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астр. 1973. № 3. С. 270. (*Kolpakov V. P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 1973. N 3.)
7. *Milgrom M.* // Astrophys. J. 1983. **270**. P. 284.
8. *De Sabbata V., Melnikov V. N., Pronin P. I.* // Progress of Theor. Phys. 1992. **88**, N 4. P. 623.
9. *Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А.* Калибровочная теория гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. *Ponomarev V. N., Barvinsky A. O., Obukhiv Yu. N.* Gauge Approach and Quantization Methods in Gravity Theory. Moscow, Nauka, 2017.
11. *Lin C. C., Shu F. H.* // Ap. J. 1964. **140**. P. 646.
12. *Goldreich P., Lynden-Bell D.* // MNRAS. 1965. **130**. P. 125.
13. *Julian W. H., Toomre A.* // Ap. J. 1966. **146**. P. 810.
14. *Wagoner R. V.* // Phys. Rev. 1970. **D1**. P. 1689.
15. *Fujii Y.* // Nature (Phys. Sci). 1971. **234**. P. 5.
16. *Kim J. K., Yoon Y.* // Phys. Lett. 1987. **A121**. P. 213.
17. *Ponomarev V. N., Obukhov Yu. N., Zytnikov V.* // Gen. Rel. Grav. 1990. **19**. P. 731.
18. *Staykov K., Doneva D., Yazadjev S.* // Eur. Phys. J. 2015. **C5**. P. 607.
19. *Kluzniak W., Rosinska D.* // MNRAS. 2013. **434**. P. 2825.
20. *Sezgin E., van Nieuvenhuizen P.* // Phys. Rev. 1980. **D21**. P. 326.

## Spiral Structure of Galaxies in Gauge Gravitation Theory

**E. P. Kubarko<sup>a</sup>, P. I. Pronin<sup>b</sup>**

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: <sup>a</sup>kate.baggins24@gmail.com, <sup>b</sup>petr\_pro\_iv@mail.ru.*

The motion of stars in galactic disks is considered in the epicyclic approximation in a potential derived from gauge gravitation theory. It is assumed that the instability of circular orbits of stars with respect to small perturbations in such a potential can lead to the formation of spiral arms. We find the values of the unknown coefficients from the lagrangian of gauge gravitation theory such that they allow such an instability to occur.

*Keywords:* gauge gravitation theory, spiral structure, epicyclic frequency.

*PACS:* 04.20.Fy, 04.20.Jb, 04.25.Nx, 04.50.Kd, 04.80.Cc, 11.15.-q, 95.30.Sf, 98.35.Hj.

*Received 17 November 2019.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 2. Pp. 109–115.

## Сведения об авторах

1. Кубарко Екатерина Павловна — аспирант; e-mail: [kate.baggins24@gmail.com](mailto:kate.baggins24@gmail.com).

2. Пронин Пётр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: [petr@phys.msu.ru](mailto:petr@phys.msu.ru).