Существование и устойчивость периодических решений с пограничным слоем в двумерной задаче реакция—диффузия в случае сингулярно возмущенных граничных условий второго рода

Н. Н. Нефедов,[а] Е. И. Никулин[б]
Московский государственный университет, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва.

Поступила в редакцию 29.10.2019, после доработки 10.12.2019, принята к публикации 17.12.2019.

В работе доказано существование периодических по времени решений погранслойного типа для двумерной задачи типа реакция—диффузия с малым параметром при параболическом операторе в случае сингулярно возмущенных краевых условий второго рода. Построено асимптотическое приближение по малому параметру таких решений. Исследовано множество граничных условий, при которых такие решения существуют и установлена локальная единственность и асимптотическая устойчивость по Ляпунову таких решений. Показано, что, в отличие от аналогичной задачи Дирихле, где такое решение единственно, в рассматриваемой задаче таких решений может быть несколько, при этом каждое из них обладает своей областью устойчивости и локальной единственности. Для доказательства использовались результаты, основанные на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные параболические задачи, периодические задачи, уравнения реакция—диффузия, пограничные слои, асимптотические методы, дифференциальные неравенства, асимптотическая устойчивость по Ляпунову.
УДК: 519.624.2. PACS: 90.60.Fm.

ВВЕДЕНИЕ

Периодические параболические краевые задачи интенсивно исследуются как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Ряд важных для приложений классов задач можно найти, например, в [1]. Рассмотрению эволюционных и периодических задач с аналогичными старшими дифференциальными операторами на основе развиваемого операторного метода и их применению в ряде прикладных физических задач посвящены работы [3–6]. В приложениях такие уравнения называют уравнениями реакция—диффузия или уравнениями реакция—диффузия—адвекция в случае наличия в уравнении слагаемого, описывающего перенос. Эти уравнения широко и успешно используются в нелинейной теории волн и гидродинамике (см., например, [2–8]). Во многих случаях для описания процессов с интенсивной реакцией (источником) используются сингулярно возмущенные задачи рассматриваемого типа — задачи, содержащие малый параметр при старшем дифференциальном операторе. Характерной особенностью таких задач является наличие решений с пограничными и внутренними переходными слоями [9–11]. Отметим также, что аналогичный метод исследования асимптотической устойчивости применялся в работе [12]. Уравнения реакция—диффузия—адвекция часто встречаются в приложениях, например в экологии при математическом моделировании изменения температуры или концентрации газов в приповерхностных слоях атмосферы, а также в химической кинетике и биологической кинетике.

В работе рассматривается новый класс задач, не изученных ранее, — многомерные по пространственной переменной задачи с сингулярными по малому параметру граничными условиями. Эта работа обобщает и развивает результат работы [13] для одномерного случая на многомерный по пространственной переменной более сложный класс задач. Задачи с сингулярно возмущенными условиями возникают во многих приложениях, где в качестве математических моделей выступают уравнения реакция—диффузия. В частности, такой тип граничных условий возникает в «гидродинамическом» варианте уравнения Бюргерса (см., например, [14]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается уравнение реакция—диффузия с сингулярно возмущенным краевым условием второго рода, естественно возникающее в математических моделях с быстрым потоком через границу:

$$
\begin{gathered}
N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2\left(\triangle u - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(u,x,t,\varepsilon) = 0,\\
(x,t)\in D_t := \big\{(x,t)\in R^3 : x\in D, t\in R\big\},\\
\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(x,t,\varepsilon) = u_\Gamma(x,t), \quad x\in\Gamma, t\in R,\\
u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+T,\varepsilon), \quad x\in\bar{D}, t\in R,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$, производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по внутренней нормали к гладкой границе Γ заданной двумерной односвязной области D, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Малый параметр ε в граничном условии может интерпретироваться как интенсивные источники на границе области. Такие граничные условия мы называем сингулярными, т. к. если записать граничное условие Неймана в стандартной форме, то малый параметр окажется в знаменателе. В отличие от стандартного условия Неймана, когда пограничный слой слабый (порядка ε), в этом случае возникает пограничный слой порядка единицы и, как показано ниже, имеет более сложную структуру, чем в случае граничных условий Дирихле.

[а] E-mail: nefedov@phys.msu.ru
[б] E-mail: nikulin@physics.msu.ru

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(A1) Пусть $f(u,x,t,\varepsilon)$, $u_\Gamma(x,t)$ — достаточно гладкие T-периодические по t функции в рассматриваемой области определения.

(A2) Пусть вырожденное уравнение $f(u,x,t,0) = 0$ имеет T-периодическое по t решение $u=\varphi(x,t)$, причем выполнено неравенство

$$f_u(\varphi,x,t,0) > 0, x\in \bar{D},\ t\in\ R.$$

Будем исследовать вопрос о существовании у задачи (1) гладкого периодического решения, которое для любого момента времени t при $\varepsilon\to 0$ внутри области D, ограниченной кривой Γ, стремится к корню $\varphi(x,t)$ и резко изменяется в окрестности кривой Γ, т. е. имеет пограничный слой.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

2.1. Асимптотическое разложение решения

Для описания пограничного слоя стандартным образом введем локальную систему координат. Для кривой Γ определим δ-окрестность $\Gamma^\delta(t) := \{P\in D : \mathrm{dist}(P,\Gamma) < \delta\}$, $\delta = \mathrm{const} > 0$. Далее, введем в δ-окрестности кривой Γ локальные координаты (r,θ), где $\theta\in[0,\Theta)$ — это координата точки $M\in\Gamma$, $\mathrm{dist}\{x,\Gamma\} = \mathrm{dist}\{x,M\}$; $r = \mathrm{dist}\{x,\Gamma\}$, $x\in D$. Пусть кривая Γ определена в параметрической форме: $x_i = X_i(\theta), i = 1,2$, а $\mathbf{n}(\theta) = \{n_1(\theta), n_2(\theta)\}$ — внутренняя нормаль к кривой Γ в точке M. При достаточно малом δ (но конечном и не зависящем от ε) существует взаимно-однозначное соответствие между координатами (x_1,x_2) и (r,θ):

$$x_i = X_i(\theta) + rn_i(\theta),\quad i=1,2.$$

Будем искать асимптотику решения задачи (1) в следующем виде

$$U(x,t,\varepsilon) = \bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi(\xi,\theta,t,\varepsilon), \tag{2}$$

где регулярная часть имеет вид

$$\bar{u}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}_0(x,t) + \varepsilon\bar{u}_1(x,t) + \ldots + \varepsilon^n\bar{u}_n(x,t) + \ldots,$$

пограничная часть в окрестности Γ

$$\Pi(\xi,\theta,t,\varepsilon) = \Pi_0(\xi,\theta,t) + \varepsilon\Pi_1(\xi,\theta,t) + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^n\Pi_n(\xi,\theta,t) + \ldots,$$

где

$$\xi = \frac{r}{\varepsilon}.$$

Такая структура асимптотики стандартна для задач с пограничными слоями и предложена в классических работах Тихонова–Васильевой (см. [15]): регулярная часть асимптотики служит для приближения решения внутри области, погранслойная — для приближения решения вблизи границы. Коэффициенты при степенях ε погранслойной части называются пограничными функциями.

Стандартный алгоритм метода пограничных функций (см. [15, 16]) с учетом особенностей параболического оператора (см. [16, 17]) приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов (2). В частности, $\bar{u}_0(x,t) = \varphi(x,t)$, а члены $\bar{u}_i(x,t)$ более высокого порядка определяются из простых алгебраических уравнений.

Остановимся подробно на построении функций пограничного слоя. Оператор Лапласа в локальных координатах (r,θ) имеет вид (см. [15]): $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \triangle r\frac{\partial}{\partial r} + |\nabla\theta|^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \triangle\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$. Тогда при действии на функции пограничного слоя слоя дифференциальный оператор $D_\varepsilon := \varepsilon^2\left(\triangle - \frac{\partial}{\partial t}\right)$ в переменных (ξ,θ,t) приобретает вид:

$$D_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \varepsilon s(\varepsilon\xi,\theta,t)\frac{\partial}{\partial\xi} + \\ + \varepsilon^2\left(|\nabla\theta|^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \triangle\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

где $s(r,\theta) := \triangle r(r,\theta)$. Пусть $\mathbf{R_0}(\theta) = \{X_1(\theta), X_2(\theta)\}$ — радиус-вектор точки кривой Γ с координатами θ. Известно (см. [18]), что $\triangle r(r,\theta)$ — кривизна кривой $\Gamma_r := \{x\in D : \{x_1,x_2\} = \mathbf{R_0}(\theta) + r\mathbf{n}(\theta)\}$ в точке $(x_1(\theta), x_2(\theta))$.

Действуя по схеме алгоритма А. Б. Васильевой, определим функции Π_i.

Член $\Pi_0(\xi,\theta,t)$ определяется из следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Pi_0(\xi,\theta,t)}{\partial\xi^2} = f(\varphi(0,\theta,t) \\
&\qquad + \Pi_0(\xi,\theta,t), 0,\theta,t,0),\quad \xi>0,\\
&\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}(0,\theta,t) = u_\Gamma(\theta,t),\\
&\Pi_0(+\infty,\theta,t) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение в (3) — это автономное уравнение второго порядка (θ, t — параметры), которое может быть исследовано на фазовой плоскости (Π_0, Π_0'), где начало координат $(0,0)$ — точка покоя типа седла (в силу условия (A2)). Задача (3) будет иметь решение в том случае, если сепаратриса, входящая в седло $(0,0)$, пересекает горизонтальную прямую $\Pi_0' = u_\Gamma(\theta,t)$. Эта задача может иметь несколько решений (см. рис. 1). Наш выбор решения содержится в следующем условии.

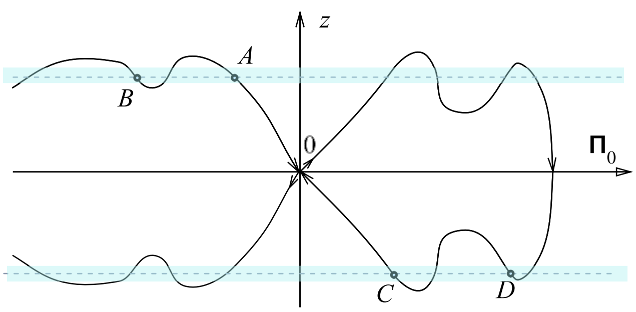

Рис. 1. Возможное расположение сепаратрис на фазовой плоскости задачи (3). Верхняя и нижняя горизонтальные пунктирные прямые соответствуют положительному и отрицательному значениям функции $u_\Gamma(\theta,t)$

(A3) Пусть при любых фиксированных $(\theta, t) \in [0, \Theta) \times \mathbb{R}$ задача (3) имеет монотонное по ξ решение $\Pi_0(\xi, \theta, t)$, удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned}\Pi_0''(0, \theta, t) = f(\varphi(0, \theta, t) + \\ + \Pi_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0) > 0(< 0), \\ \Pi_0(0, \theta, t) > 0(< 0).\end{aligned}$$

Может существовать несколько решений $\Pi_0(\xi, \theta, t)$, удовлетворяющих условию (A3). Так, если значению аргумента $\xi = 0$ соответствуют точки A, B, C, D (рис. 1), то, двигаясь от них по соответствующей сепаратрисе к седлу (0,0), мы получим фазовые траектории — решения задачи (3), удовлетворяющие условию (A3).

Известно (см. [19]), что имеют место следующие оценки:

$$|\Pi_0(\xi, \theta, t)| \leqslant Ce^{-k\xi}, \tag{4}$$

где C, k — некоторые положительные константы.

Покажем, как определить функции $\Pi_i, i = 1, 2 \ldots$

Функции Π_1 определяются из следующей задачи:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\Pi_1 = r_1, \\ &\frac{\partial \Pi_1(0, \theta, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}(0, \theta, t) = 0, \\ &\Pi_1(\pm\infty, \theta, t) = 0, \\ &r_1(\xi, \theta, t) := -\frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi}(\xi, \theta, t)s(0, \theta, t) + \\ &\qquad + \xi\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}(0, \theta, t) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right) + \\ &\qquad + \bar{u}_1(0, \theta, t)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon},\end{aligned} \tag{5}$$

где символ «$\sim$» над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(\Pi_0(\xi, \theta, t) + \bar{u}_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)$.

Решение задач (5) при условии выбора $(\Pi_0(\xi, \theta, t)$, согласно требованию (A3), представляется в явном виде (см. [13]):

$$\begin{aligned}\Pi_1(\xi, t) = \frac{z(\xi, \theta, t)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta, t)}\Bigg\{ -\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}(0, \theta, t) + \\ + \frac{1}{z(0, \theta, t)}\int_0^\infty z(\chi, \theta, t)r_1(\chi, \theta, t)d\chi\Bigg\} \\ - z(\xi, \theta, t)\int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta, t)}\left[\int_\eta^\infty z(\chi, \theta, t)r_1(\chi, \theta, t)d\chi\right]d\eta,\end{aligned} \tag{6}$$

где $z(\xi, \theta, t) = \frac{\partial \Pi_0(\xi, \theta, t)}{\partial \xi}$.

Для Π_1 справедлива оценка

$$|\Pi_1(\xi, \theta, t, \varepsilon)| < C_1 e^{-k_1\xi},$$

где C_1, k_1 — некоторые положительные константы.

Функции внутреннего переходного слоя более высоких порядков находятся из задач, аналогичных задачам для функции Π_1:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\Pi_i = r_i, \\ &\frac{\partial \Pi_i(0, \theta, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial r}(0, \theta, t) = 0, \\ &\Pi_i(\pm\infty, \theta, t) = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

где $r_i(\xi, \theta, t)$ — известные функции. Решение задач (7) может быть выписано в явном виде, аналогичном (6). Отметим, что обратный оператор, определяющий решение задач для функций Π_i, является монотонным, что существенно используется при доказательстве существования решения и его асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Заметим, что формально П-функции определены для $\xi \in R$, однако фактически они имеют смысл только при $|\xi| \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}$. Для их гладкого продолжения на всю область D применяется стандартный прием использования срезающих функций (см., например, [15]).

Таким образом, формальное построение асимптотики решения с пограничным слоем для задачи (1) завершено.

3. ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕННОЙ АСИМПТОТИКИ

Пусть $U_n(x, t, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{n}(\bar{u}_i(x, t) + \Pi_i(\xi, \theta, t))\varepsilon^i$. Основной результат данного пункта сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Если выполнены условия* **(A1–A3)**, *то при достаточно малых ε для каждого выбранного, согласно условию* (A3), *решения $\Pi_0(\xi, \theta, t)$ задачи* (3) *существует соответствующее ему решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи* (1), *обладающее пограничным слоем, причем имеет место оценка*

$$|U_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in \bar{D}, t \in \ R.$$

Доказательство.

Доказательство этого утверждения проводится на основе метода дифференциальных неравенств. В качестве верхнего решения выбирается функция

$$\begin{aligned}\beta_n(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon\bar{u}_1(x, t) + \ldots + \varepsilon^{n+1}\bar{u}_{n+1}(x, t) + \\ + \Pi_0(\xi, \theta, t) + \varepsilon\Pi_1(\xi, \theta, t) + \ldots + \varepsilon^{n+1}\Pi_{n+1}(\xi, \theta, t) + \\ + \varepsilon^{n+1}(\gamma + \Pi_\beta(\xi, \theta, t)),\end{aligned}$$

где функция Π_0 выбирается согласно условию (A3), $\gamma > 0$ — постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства, функции Π_β необходимы для компенсации изменений, вносимой постоянной γ, и определяются из задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \Pi_\beta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\Pi_\beta = r_\beta, \\ &\frac{\partial \Pi_\beta(0, \theta, t)}{\partial \xi} = -\delta, \\ &\Pi_\beta(\pm\infty, \theta, t) = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta > 0$ — некоторая константа и

$$r_\beta(\xi,\theta,t) = \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\Pi_0(\xi,\theta,t) + \bar{u}_0(0,\theta,t),0,t,0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi,0,t,0)\right) - M\exp(-k\xi).$$

Как нетрудно видеть, коэффициент перед γ имеет экспоненциальную оценку, которая следует из оценки (4). Следовательно, можно выбрать достаточно большое $M > 0$ и достаточно малое $k > 0$, чтобы $r_\beta(\xi,\theta,t) < 0$.

Задача (8) аналогична задаче (7) и имеет решение

$$\Pi_\beta(\xi,t) = \frac{z(\xi,\theta,t)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0,\theta,t)}\times$$
$$\times\left\{-\delta + \frac{1}{z(0,\theta,t)}\int_0^\infty z(\chi,\theta,t)r_\beta(\chi,\theta,t)d\chi\right\} -$$
$$- z(\xi,\theta,t)\int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta,\theta,t)}\times$$
$$\times\left[\int_\eta^\infty z(\chi,\theta,t)r_\beta(\chi,\theta,t)d\chi\right]d\eta. \quad (9)$$

В силу условия (А3), если $\Pi_0(0,\theta,t) > 0$ (< 0), то справедливы неравенства: $\frac{\partial z}{\partial \xi}(0,\theta,t) = \Pi_0''(0,\theta,t) > 0(< 0)$, $z(\xi,\theta,t) = \Pi_0'(\xi,\theta,t) < 0(> 0)$, $\xi \in [0,\infty), t \in \mathbb{R}, \theta \in [0,\Theta)$. Из этих неравенств и представления (9) следует, что $\Pi_\beta(\xi,\theta,t) > 0$, $\xi \in [0,\infty), t \in \mathbb{R}, \theta \in [0,\Theta)$.

Нижнее решение $\alpha_n(x,t,\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру, причем $r_\alpha(\xi,\theta,t) > 0$, $\Pi_\alpha(\xi,\theta,t) > 0$, $\xi \in [0,\infty), t \in \mathbb{R}, \theta \in [0,\Theta)$, следовательно, верхнее и нижнее решения являются упорядоченными.

Необходимые дифференциальные неравенства проверяются прямым вычислением, совершенно аналогично работе [13]. Для верхнего решения имеем

$$N_\varepsilon\beta_n = \varepsilon^2\left(\triangle - \frac{\partial}{\partial t}\right)\beta_n - f(\beta_n,x,t,\varepsilon) =$$
$$= -\varepsilon^{n+1}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\gamma + M\exp(-k\xi)\right) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

где черта над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(\bar{u}_0,0,\theta,t,0)$. В силу условия (А2) при достаточно малом ε при любом $\gamma > 0$ $\quad N_\varepsilon\beta_n < 0$.

Неравенство на границе проверяется прямым вычислением:

$$\varepsilon\frac{\partial\beta_n}{\partial r}(x_\Gamma,t,\varepsilon) = \frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi} + \varepsilon^{n+1}\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial\xi} + \varepsilon^{n+2}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial r} =$$
$$= u_\Gamma(\theta,t) - \delta\varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) \leqslant u_\Gamma(\theta,t).$$

Соответствующее неравенство для верхнего решения проверяется аналогично.

Из известных теорем сравнения следует существование решения задачи (1), удовлетворяющего неравенству $\alpha_n(x,t,\varepsilon) \leqslant u(x,t,\varepsilon) \leqslant \beta_n(x,t,\varepsilon)$, причем, как следует из построения, $\alpha_n(x,t,\varepsilon) - \beta_n(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, откуда и получаем утверждение теоремы.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Периодические решения задачи (1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$\begin{aligned}
&N_\varepsilon(v) := \varepsilon^2\left(\triangle v - \frac{\partial v}{\partial t}\right) - f(v,x,t,\varepsilon) = 0,\\
&(x,t) \in D_{t+} := \{(x,t) \in R^3 : x \in D, 0 < t < \infty\},\\
&\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}(x,t,\varepsilon) = u_\Gamma(x,t), \quad x \in \Gamma, t \in R,\\
&v(x,0,\varepsilon) = v^0(x,\varepsilon), \quad (x,y) \in \bar{D}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon) = u(x,0,\varepsilon)$, где $u(x,t,\varepsilon)$ — решение периодической задачи (1), то и задача (10) имеет решение $v(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (10) в виде $\alpha(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon))$, $\beta(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon))$, где $\Lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что $\alpha < \beta$, и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем из [1] достаточно показать, что $N_\varepsilon\beta < 0$, $N_\varepsilon\alpha > 0$. Подставляя указанные выше выражения для функций α и β и учитывая, что u является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства. Например, выражение для $N_\varepsilon\beta$ преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций f, f_u опущены, кроме первого):

$$N_\varepsilon\beta = e^{-\Lambda t}\left\{\left[\varepsilon^2\left(-\frac{\partial\beta_n}{\partial t} + \triangle\beta_n\right) - f(\beta_n)\right] + \right.$$
$$+ \left[\varepsilon^2\left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \triangle u\right) - f(u)\right] +$$
$$\left. + [f(\beta_n) - f(u) - f_u^*\cdot(\beta_n - u)] + \varepsilon^2\Lambda(\beta_n - u)\right\}.$$

Здесь символ «*» справа от функции означает, что ее значение берется при аргументе $u(x,t,\varepsilon) + \theta e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon))$, $0 < \theta < 1$.

Воспользуемся тем, что $\varepsilon^2\left(-\frac{\partial\beta_n}{\partial t} + \triangle\beta_n\right) - f(\beta_n) = -\varepsilon^{n+1}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}\gamma + M\exp(-k\xi)\right) + O(\varepsilon^{n+2})$, где $\gamma > 0$, $\beta_n - u = O(\varepsilon^{n+1})$, $f(\beta_n) - f(u) - f_u^*(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2})$, и выбирая $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0 > 0$, а γ достаточно большим, получаем $N_\varepsilon\beta = e^{-\Lambda_0 t}(-\varepsilon^{n+1}(\frac{\partial\bar{f}}{\partial u}\gamma + M\exp(-k\xi)) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3})) < 0$ при $n \geqslant 0$. Аналогично проверяется неравенство $N_\varepsilon\alpha > 0$. Таким образом, каждое из решений, существование которых гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[\alpha_0(x,0,\varepsilon), \beta_0(x,0,\varepsilon)]$, ширина этой области составляет величину порядка $O(\varepsilon^1)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **(А1–А3)**. *Тогда каждое решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи* (1), *существование которого гарантируется теоремой 1,* *асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере* $[\alpha_0(x,0,\varepsilon), \beta_0(x,0,\varepsilon)]$ *и, следовательно,* $u(x,t,\varepsilon)$ *— единственное решение задачи* (1) *в этой области.*

4.1. Пример погранслойного решения

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}
&N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2\left(\triangle u - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - u(u+2)(u+3) = 0,\\
&(x,t) \in D_t := \{(x,t) \in R^3 :\\
&x \in D = \{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}, t \in R\},\\
&\quad \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(x,t,\varepsilon) = 2.2(1 + 0.05\sin(2\pi t/T)),\\
&\quad x \in \Gamma, t \in R,\\
&u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+T,\varepsilon), \quad x \in \bar{D}, t \in R,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $T = 0.2, \varepsilon = 0.1$.

Сразу заметим, что поставленная задача радиально симметрична, что означает, что решение не должно зависеть от параметра θ — угла между точкой (x,y) и осью Ox.

Вырожденное уравнение $u(u+2)(u+3) = 0$ имеет три корня: $\varphi_1 = -2$, $\varphi_2 = -3$ и $\varphi = 0$, причем хорошо известно, что на фазовой плоскости (Π_0, Π_0') точки $(\varphi_1, 0), (\varphi, 0)$ являются точками покоя типа седла, а $\varphi_2 = -3$ — точкой покоя типа центра. Будем искать погранслойные решения, которые вдали от границы близки к корню $\varphi = 0$. Условию (A3) удовлетворяют ровно два решения задачи (8), которые соответствуют фазовым траекториям начинающихся в точках A, B пересечения прямой $z = u_\Gamma$ и сепаратрисы, входящей в седло $(0,0)$ (см. рис. 2).

Задача для Π_0 примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\xi^2} = \Pi_0(\Pi_0+2)(\Pi_0+3),\\
&\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}(0,\theta,t) = 2.2(1 + 0.05\sin(2\pi t/T)),\\
&\Pi_0(+\infty,\theta,t) = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

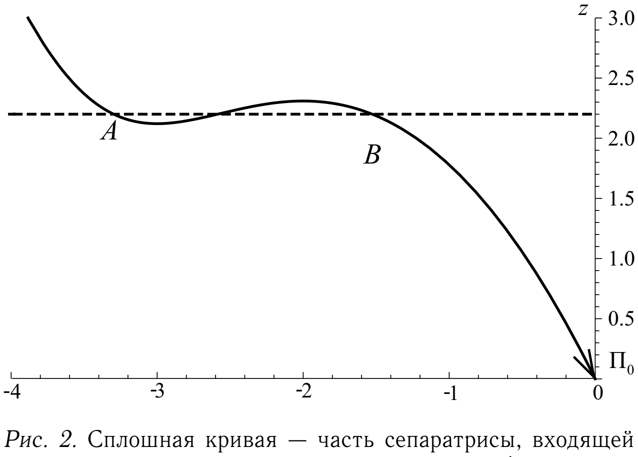

Рис. 2. Сплошная кривая — часть сепаратрисы, входящей в седло $(0,0)$, на фазовой плоскости (Π_0, Π_0'), соответствующей задачи (12). Пунктир — начальное условие $z = 2.2(1 + 0.05\sin(2\pi t/T))$. Параметр $t = 0$

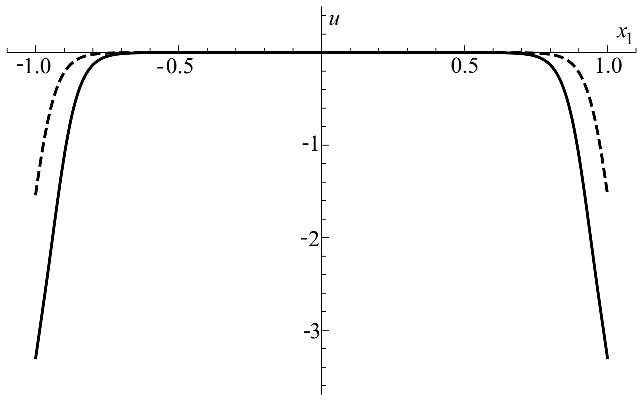

Рис. 3. Асимптотика нулевого порядка $U_0(x_1,0,\theta,0,\varepsilon)$ для обоих устойчивых решений погранслойного типа задачи (11)

Тогда для асимптотики решения в нулевом порядке имеем выражение:

$$U_0(x_1,x_2,t,\varepsilon) = \Pi_0\Big(\Big(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Big)/\varepsilon, \theta, t\Big).$$

Согласно теоремам 1 и 2 существуют два асимптотически устойчивых по Ляпунову решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (11), соответствующих двум указанным выше решениям задачи (12), удовлетворяющих оценке $|U_0(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon)| = O(\varepsilon)$. Каждое из решений локально единственно в области, указанной в теореме 2.

На рис. 3 изображена асимптотика нулевого порядка для обоих решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен новый класс нелинейных задач математической физики, важный для многих приложений. Получены строгие результаты исследования устойчивости погранслойных решений в случае сингулярно возмущенных краевых условий Неймана. Установлено, что поведение решения в пограничном слое у таких задач значительно сложнее, чем у задач с граничными условиями Дирихле и обычными условиями Неймана. Результат может быть распространен на сингулярно возмущенные краевые условия третьего рода и представляет основу для исследования новых прикладных задач. Результаты по исследованию условий асимптотической устойчивости погранслойных решений важны и для исследования контрастных структур (решений с внутренними переходными слоями), т. к. предельное разрывное решения зависит и от поведения в пограничном слое (см., например, [16]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00327), а также поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-3005.2019.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pao C. V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Springer Science Business Media, 1993.
2. *Parker A.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1992. **438**. P. 113.

3. *Zhukovsky K. V.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. **446**, N 1. P. 628.
4. *Zhukovsky K. V.* // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. **120**. P. 944.
5. *Жуковский К. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 1. С. 45. (*Zhukovsky K. V.* Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 1. P. 45.)
6. *Жуковский К. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 3. С. 18. (*Zhukovsky K. V.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2016. **71**, N 3. P. 237.)
7. *Cole J. D.* // Quart. Appl. Math. 1951. **9**. P. 225.
8. *Malfliet W.* // Phys. A: Math. Gen. 1993. **26**(Ll). P. 723.
9. *Руденко О. В.* // ДАН. М.: Наука, 2016. **471**, № 1. С. 23.
10. *Руденко О. В.* // ДАН. М.: Наука, 2016. **471**, № 6. С. 451.
11. *Nefedov N. N., Rudenko O. V.* // ДАН. М.: Наука, 2019. **478**, № 3. С. 274.
12. *Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т., Орлов А. О.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 6. С. 3. (*Nefedov N. N., Levashova N. T., Orlov A. O.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 6. P. 565.)
13. *Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R.* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. **24**, N 08. 1440019.
14. *Barenblatt G., Entov V., Ryzhik V.* Theory of fluid flows through natural rocks. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
15. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
16. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2010. **268**. С. 268.
17. *Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. **405**, N 1. P. 90.
18. *Nefedov N. N., Sakamoto K.* // Hiroshima Mathematical Journal. 2003. **33**, N 3. P. 391.
19. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. **4**, № 3. С. 799.

The Existence and Stability of Periodic Solutions with a Boundary Layer in a Two-Dimensional Reaction-Diffusion Problem in the Case of Singularly Perturbed Boundary Conditions of the Second Kind

N. N. Nefedov, E. I. Nikulin

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.
Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]nefedov@phys.msu.ru, [b]nikulin@physics.msu.ru.

The existence of time-periodic solutions of the boundary-layer type to a two-dimensional reaction—diffusion problem with a small-parameter coefficient of a parabolic operator is proved in the case of singularly perturbed boundary conditions of the second kind. An asymptotic approximation with respect to the small parameter is constructed for these solutions. The set of boundary conditions for which these solutions exist is studied and the local uniqueness and asymptotic Lyapunov stability are established for them. It is shown that, unlike the analogous Dirichlet problem, for which such a solution is unique, there can be several solutions of this kind for the problem under consideration, each of which has its domains of stability and local uniqueness. To prove these facts, results based on the asymptotic principle of differential inequalities are used.

Keywords: singularly perturbed parabolic problems, periodic problems, reaction—diffusion equations, boundary layers, asymptotic methods, differential inequalities, asymptotic Lyapunov stability.
PACS: 92.60.Fm.
Received 29 October 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 2. Pp. 116–122.

Сведения об авторах

1. Нефедов Николай Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
2. Никулин Егор Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: nikulin@physics.msu.ru.