СТАТЬИ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Симметрии и общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с аксионом

О. В. Кечкин,[1,2,a] П. А. Мошарев[3,4,б]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей ядерной физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), факультет № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», кафедра компьютерной математики. Россия, 121552, Москва, Оршанская ул., д. 3*
[3] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В.Скобельцына. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[4] *Национальный исследовательский университет МЭИ, кафедра высшей математики. Россия, 111250, Москва, Красноказарменная улица, д. 14.*

Поступила в редакцию 01.03.2020, после доработки 12.03.2020, принята к публикации 16.03.2020.

Получен эффективный лагранжиан и найдена группа скрытых симметрий теории Максвелла с аксионом в стационарном случае. Построено общее гармоническое решение; показано, что центрально-симметричный источник может обладать магнитным полем кулоновского типа. Электрическое поле такого источника имеет потенциал сложного вида, который при особом выборе параметров может быть всюду конечным. В первом порядке теории возмущений вычислено дифференциальное сечение рассеяния пробных частиц на дионе, обладающем аксионым зарядом.

Ключевые слова: электродинамика с аксионом, монополи, дионы, точные решения, симметрии.
УДК: 53.01, 537.8. PACS: 11.10.Lm, 11.30.Na, 11.15.Kc.

ВВЕДЕНИЕ: ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА С АКСИОНОМ

Аксионы как нейтральные бозоны с нулевым спином первоначально были введены в контексте решения «сильной CP-проблемы» [1, 2]. Позднее было установлено, что поле аксиона входит, наряду с дилатонным, калибровочными и гравитационным полями, в спектр безмассовых возбуждений (например, гетеротической) струны. В настоящее время аксионы вызывают большой интерес в качестве кандидатов на роль «новой физики» [3, 4]. Читателю, интересующемуся альтернативными способами построения нелинейной электродинамики, рекомендуем обратить внимание на классические статьи [5, 6], а также современные работы [7–17].

Динамика аксионного и фотонного (то есть максвелловского) полей описывается лагранжианом следующего вида (мы рассматриваем здесь безмассовые аксионы, в отличие, например, от [18]):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \gamma\varkappa\widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\varkappa\partial_{\mu}\varkappa. \qquad (1)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ — тензор электромагнитного поля; A_{μ} — 4—потенциал электромагнитного поля $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$; $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}$, где $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ — символ Леви–Чивиты; $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ — метрика Минковского, $\varkappa$ — поле аксиона, а γ — произвольная константа аксион-максвелловской связи.

[a] E-mail: kechkin@sinp.msu.ru
[б] E-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru

Уравнения Эйлера—Лагранжа, соответствующие (1), записываются в виде

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\varkappa + \frac{1}{4}\gamma\widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0, \qquad (2)$$

$$\partial_{\nu}\left(F^{\mu\nu} + \gamma\varkappa\widetilde{F}^{\mu\nu}\right) = 0. \qquad (3)$$

Из второго уравнения следует, что введение в электродинамику аксиона эквивалентно появлению эффективного тока электрических зарядов в уравнениях Максвелла $\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = J^{\mu}$, а именно, тока $J^{\mu} = -\partial_{\nu}\left(\gamma\varkappa\widetilde{F}^{\mu\nu}\right)$, причем благодаря антисимметрии $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ для него тождественно выполняется «закон сохранения заряда» $(\partial_{\mu}J^{\mu} \equiv 0)$. В отличие от работы [19], мы будем рассматривать только стационарные поля и зададимся вопросами поиска симметрий стационарной системы и общего гармонического решения в этом случае.

1. КОМПАКТИФИКАЦИЯ ТЕОРИИ

Рассмотрим уравнения (2) и (3) в стационарном случае: будем считать все производные по x^0 от всех полей равными нулю. Уравнение (3) при $\mu = m$ (здесь и далее в работе латинские индексы принимают значения $1,2,3$) записывается в виде

$$\epsilon^{km\ n}[-\epsilon_k^{\ a\ b}A_{a,b} + \gamma\varkappa A_{0,k}]_{,n} = 0,$$

или, в терминах векторных дифференциальных операторов, как

$$\nabla\times[-\nabla\times\mathbf{A} + \gamma\varkappa\nabla A_0] = 0.$$

Это соотношение позволяет ввести потенциал магнитного поля u согласно определению

$$\nabla u = -\nabla \times \mathbf{A} + \gamma\varkappa\nabla A_0. \tag{4}$$

Уравнение (3) при $\mu = 0$ имеет вид

$$\nabla^2 A_0 + \gamma\nabla\varkappa(\nabla \times \mathbf{A}) + \gamma\varkappa\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \tag{5}$$

а уравнение (2) —

$$\nabla^2\varkappa + \gamma\nabla A_0(\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \tag{6}$$

Подставляя в два последних уравнения $\nabla \times \mathbf{A}$ согласно соотношению (4) и обозначая для удобства $A_0 \equiv v$, получаем:

$$\begin{aligned}\nabla^2 v + 2\gamma^2\varkappa\nabla\varkappa\nabla v + \gamma^2\varkappa^2\nabla^2 v -&\\ -\gamma\nabla\varkappa\nabla u - \gamma\varkappa\nabla^2 u = 0,&\qquad (7)\\ \nabla^2\varkappa + \gamma^2\varkappa(\nabla v)^2 - \gamma\nabla u\nabla v = 0.&\qquad (8)\end{aligned}$$

Наконец, подействовав на соотношение (4) оператором дивергенции, получаем последнее уравнение на функции $\varkappa$, u и v:

$$\nabla^2 u - \gamma\nabla\varkappa\nabla v - \gamma\varkappa\nabla^2 v = 0. \tag{9}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что полученные уравнения (7), (8) и (9) являются уравнениями Эйлера—Лагранжа для эффективного лагранжиана

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}(\nabla\varkappa)^2 - \frac{1}{2}\big[(\nabla u - \gamma\varkappa\nabla v)^2 + (\nabla v)^2\big]. \tag{10}$$

Отметим, что, просто положив в исходном лагранжиане (1) производные по x^0 равными нулю и расписав его явно через A_0, $\mathbf{A}$, $\varkappa$, получим

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}(\nabla\varkappa)^2 - \frac{1}{2}\Big\{ - (\nabla A_0)^2 + [\nabla \times \mathbf{A}]^2 + \\ + 2\gamma\varkappa\big(\nabla A_0[\nabla \times \mathbf{A}]\big)\Big\}.$$

Уравнения (5) и (6) являются для него уравнениями Эйлера—Лагранжа, и в этом смысле он эквивалентен лагранжиану (10), но процесс поиска симметрий, описанный в следующем разделе работы, для него сильно затруднен.

2. СИММЕТРИИ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Найдем преобразования обобщенных координат $\varkappa$, u и v, сохраняющие форму $\mathcal{L}_3$. А именно, предположим, что производится преобразование (с параметром λ) от «старых» потенциалов $\varkappa_0$, u_0 и v_0 к «новым» потенциалам

$$v = v(\lambda, v_0, u_0, \varkappa_0), \quad u = u(\lambda, v_0, u_0, \varkappa_0), \\ \varkappa = \varkappa(\lambda, v_0, u_0, \varkappa_0)$$

такое, что

$$v_{,\lambda} = K_v(v, u, \varkappa), \quad u_{,\lambda} = K_u(v, u, \varkappa), \\ \varkappa_{,\lambda} = K_\varkappa(v, u, \varkappa). \tag{11}$$

Преобразование является преобразованием симметрии для данной системы, если $\mathcal{L}_{3,\lambda} = 0$, т. е. если

$$\mathcal{L}_{3,\lambda} = \nabla\varkappa\nabla K_\varkappa - \Big(\nabla u - \gamma\varkappa\nabla v\Big)\cdot \\ \cdot\Big(\nabla K_u - \gamma(K_\varkappa\nabla v + \varkappa\nabla K_v)\Big) - \\ - \nabla v\nabla K_v = 0.$$

Подставляя сюда

$$\nabla K_u = K_{u,v}\nabla v + K_{u,u}\nabla u + K_{u,\varkappa}\nabla\varkappa$$

и аналогичные выражения для ∇K_v, $\nabla K_\varkappa$, приравнивая к нулю множители при произведениях градиентов потенциалов и решая получающуюся систему из 6 уравнений, находим:

$$\begin{aligned} K_\varkappa &= A\, v + B,\\ K_v &= A\varkappa + C,\\ K_u &= \frac{\gamma}{2}A\big(\varkappa^2 + v^2\big) + \gamma B\, v + D,\end{aligned} \tag{12}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Используя эти выражения, можно выписать генераторы полной четырехпараметрической группы симметрий лагранжиана $\mathcal{L}_3$ согласно формуле

$$X_A = K_{\varkappa(A)}\frac{\partial}{\partial\varkappa} + K_{u(A)}\frac{\partial}{\partial u} + K_{v(A)}\frac{\partial}{\partial v},$$

где $K_{\varkappa(A)}$ — значение $K_\varkappa$ при $A = 1$ и остальных константах, равных нулю. Рассматривая генераторы, соответствующие разным константам, получаем:

$$\begin{aligned} X_1 &= v\frac{\partial}{\partial\varkappa} + \varkappa\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\gamma}{2}\big(\varkappa^2 + v^2\big)\frac{\partial}{\partial u},\\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial\varkappa} + \gamma v\frac{\partial}{\partial u},\\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial v},\\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}$$

Коммутационные соотношения между генераторами имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \big[X_4, X_1\big] &= \big[X_4, X_2\big] = \big[X_4, X_3\big] = 0,\\ \big[X_3, X_1\big] &= X_2,\\ \big[X_2, X_1\big] &= X_3,\\ \big[X_3, X_2\big] &= \gamma X_4.\end{aligned}$$

Для того, чтобы получить явный вид преобразования функций $\varkappa$, u и v, решаем систему (12) с учетом (11). Получаем:

– при $A \neq 0; B = C = D = 0$:

$$\begin{aligned} v &= \varkappa_0\,\mathrm{sh}(\lambda) + v_0\,\mathrm{ch}(\lambda),\\ \varkappa &= \varkappa_0\,\mathrm{ch}(\lambda) + v_0\,\mathrm{sh}(\lambda),\\ u &= u_0 + \frac{\gamma}{4}\Bigg[\big(\varkappa_0^2 + v_0^2\big)\,\mathrm{sh}(2\lambda) + 4\varkappa_0 v_0\,\mathrm{sh}^2(\lambda)\Bigg];\end{aligned} \tag{13}$$

– при $B \neq 0; A = C = D = 0$:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa_0 + \lambda,\\ u &= u_0 + \gamma v_0\lambda,\\ v &= v_0;\end{aligned}$$

– при $C \neq 0$; $A = B = D = 0$:

$$v = v_0 + \lambda,$$
$$u = u_0,$$
$$\varkappa = \varkappa_0;$$

– при $D \neq 0$; $A = B = C = 0$:

$$u = u_0 + \lambda,$$
$$v = v_0,$$
$$\varkappa = \varkappa_0.$$

Легко видеть, что преобразование (13) — единственная нетривиальная симметрия, описывающая псевдоповорот в плоскости $(\varkappa, v)$ типа преобразования Лоренца.

3. ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Считая, что все поля зависят от одной гармонической функции $\lambda = \lambda(x^k)$,

$$\Delta\lambda = 0,$$

то есть, положив $u = u(\lambda)$, $v = v(\lambda)$, $\varkappa = \varkappa(\lambda)$, можем перейти к системе, описываемой эффективным лагранжианом

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left[\varkappa'^2 - (u' - \gamma\varkappa v')^2 - v'^2\right],$$

где «штрих» обозначает производную по λ. Эффективно мы получили классическую систему, характеризуемую тремя обобщенными координатами, зависящими от «времени» λ. Сразу видно, что координаты u и v являются циклическими. Соответствующие им уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$[u' - \gamma\varkappa v']' = 0,$$
$$[v' - \gamma\varkappa(u' - \gamma\varkappa v')]' = 0$$

и позволяют выписать два интеграла движения:

$$u' - \gamma\varkappa v' = C_1, \tag{14}$$
$$v' - \gamma\varkappa C_1 = C_2. \tag{15}$$

Подставляя первый из этих интегралов в уравнение (4), делаем вывод, что магнитное поле всегда имеет следующий вид:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = -C_1\nabla\lambda \tag{16}$$

В дальнейшем мы не будем интересоваться явным видом функции u, так как ее физический смысл исчерпывается этим выражением для вектора магнитной индукции.

Уравнение, соответствующее переменной $\varkappa$, выглядит следующим образом:

$$\varkappa'' - \gamma(u' - \gamma\varkappa v')v' = 0$$

и при подстановке интегралов движения (14), (15) принимает вид:

$$\varkappa'' - (\gamma C_1)^2\varkappa - \gamma C_1 C_2 = 0.$$

Решая его и интегрируя выражение (15), получаем общее гармоническое решение уравнений аксион-максвелловской электродинамики в стационарном случае:

$$\varkappa = A\ e^{\gamma C_1\lambda} + B\ e^{-\gamma C_1\lambda} - \frac{C_2}{\gamma C_1},$$
$$v = A\ e^{\gamma C_1\lambda} - B\ e^{-\gamma C_1\lambda} + D.$$

Здесь A, B, D — произвольные константы интегрирования, λ — произвольная гармоническая функция пространственных переменных.

Самый простой и физически интересный вариант решения — сферически-симметричное решение. Как известно, общее сферически-симметричное решение уравнения Лапласа имеет кулоновский вид. Рассмотрим поэтому решение с

$$\lambda = \frac{q}{r},$$

где q — произвольная константа. Введем ограничение на множество решений: потребуем, чтобы все потенциалы имели кулоновскую асимптотику на пространственной бесконечности. Это позволяет зафиксировать две константы из трех. Решения с правильной асимптотикой выглядят тогда так:

$$\varkappa = \frac{C_2}{\gamma C_1}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - 1\right) - D\ \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right),$$
$$v = \frac{C_2}{\gamma C_1}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - D\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - 1\right).$$

Магнитное поле в этом случае имеет кулоновский вид с зарядом $q_m = C_1 q$. Электрический и аксионный заряды находим, раскладывая потенциалы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$ до первого порядка. Они равны $q_e = C_2 q$, $q_\varkappa = -\gamma D C_1 q$. Зная выражения для зарядов, можем переписать решение в терминах физических констант. Оно будет тогда выглядеть следующим образом:

$$\varkappa = \frac{q_e}{\gamma q_m}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right) - 1\right) + \frac{q_\varkappa}{\gamma q_m}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right),$$
$$v = \frac{q_e}{\gamma q_m}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right) + \frac{q_\varkappa}{\gamma q_m}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right) - 1\right). \tag{17}$$

Отметим, что при стремлении к нулю магнитного заряда аксионное и электрическое поля принимают кулоновский вид.

Интересный случай реализуется при значении $D = \frac{C_2}{\gamma C_1}$ или, в терминах зарядов, $q_\varkappa = -q_e$:

$$\varkappa = \frac{q_e}{\gamma q_m}\left(e^{-\frac{\gamma q_m}{r}} - 1\right),$$
$$v = -\frac{q_e}{\gamma q_m}\left(e^{-\frac{\gamma q_m}{r}} - 1\right). \tag{18}$$

Эти потенциалы имеют конечную глубину в начале координат (при $r \to 0$). Магнитное поле при этом остается кулоновским, в соответствии с формулой (16).

4. РАССЕЯНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Мы получили потенциалы электромагнитного поля, создаваемого точечным источником в аксион-максвелловской электродинамике. Точечный источник является дионом: частицей, обладающей и магнитным, и электрическим зарядами [20, 21]. Мы показали, что электростатический потенциал такого источника может иметь конечную величину во всем пространстве, а магнитное поле при любых значениях параметров имеет кулоновский вид.

Изучим движение точечной бесспиновой частицы с электрическим зарядом в таких полях. Будем предполагать, что взаимодействие осуществляется посредством обычной силы Лоренца

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -e\nabla v(r) + \frac{eq_m}{r^3}\cdot[\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}],$$

где e — заряд пробной частицы. Можно показать, что при таком движении сохраняется полная энергия частицы

$$E = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + e\ v(r)$$

и модуль момента импульса

$$\widetilde{L} = \big|[\mathbf{r}\times m\mathrm{v}]\big| = m\ b\mathrm{v}_0,$$

где b — прицельный параметр, v_0 — скорость пробной частицы на бесконечном расстоянии от центра потенциала (при $r\to\infty$). В отличие от случая рассеяния на центральном электростатическом потенциале, вектор момента импульса не сохраняет свое направление и движение не является плоским. Вместо этого сохраняется обобщенный момент импульса

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\times m\mathbf{v}] - e\ q_m\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Из сохранения двух последних величин следует, что частица движется по поверхности конуса, угол между осью и образующей которого θ определяется из соотношения

$$\mathrm{ctg}(\theta) = \frac{eq_m}{mb\mathrm{v}_0}. \qquad (19)$$

При этом связь радиус-вектора частицы с азимутальным углом описывается такой же формулой, как и в теории рассеяния на центрально-симметричном электростатическом потенциале:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - e\ v(r) - \dfrac{\widetilde{L}^2}{2m\ r^2}}}. \qquad (20)$$

Пределы интегрирования здесь соответствуют изменению φ при движении частицы из пространственной бесконечности ($r\to\infty$) до точки максимального сближения с центром $r = r_0$, которая определяется из уравнения $E - e\ v(r) - \frac{\widetilde{L}^2}{2m\ r^2} = 0$. Движение частицы симметрично относительно этой точки. При подстановке выражения для $v(r)$ согласно формулам (17) или (18) представленный интеграл не выражается через элементарные функции, что сильно затрудняет дальнейшее исследование.

Мы можем получить приближенное выражение для величины φ в первом порядке теории возмущений по степеням некоторого малого параметра. В качестве такого параметра можно взять, например, величину $\frac{1}{r}$ и ограничиться рассмотрением рассеяния на малые углы. Разложив потенциал электрического поля (17) в ряд до второго порядка включительно

$$v = \frac{q_e}{r} + \frac{\gamma q_m q_\varkappa}{2r^2} + \ldots$$

и подставив полученное выражение в формулу (20), получим интеграл следующего вида:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m\ E}}\times \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \dfrac{eq_e}{E}\dfrac{1}{r} - \left(\dfrac{\gamma e\ q_m q_\varkappa}{2E} + \dfrac{\widetilde{L}^2}{2m\ E}\right)\dfrac{1}{r^2}}}.$$

Результат его вычисления будет разным в зависимости от величины входящих в него параметров. Так, при $\widetilde{L}^2 > -m\gamma e\ q_m q_\varkappa$ получаем следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{\cos(\theta)\sqrt{\dfrac{\gamma m\ q_\varkappa}{eq_m} + \mathrm{tg}^2(\theta)}}\times \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2E\ q_m^2}{mq_e^2}\left(\frac{\gamma m\ q_\varkappa}{eq_m} + \mathrm{tg}^2(\theta)\right)}, \qquad (21)$$

при $-m\gamma e\ q_m q_\varkappa - \dfrac{me^2q_e^2}{2E} < \widetilde{L}^2 < -m\gamma e\ q_m q_\varkappa$ получаем выражение

$$\varphi = \frac{-1}{2\cos(\theta)\sqrt{-\left(\dfrac{\gamma m\ q_\varkappa}{eq_m} + \mathrm{tg}^2(\theta)\right)}}\times \ln\left|\frac{1 - \sqrt{-\dfrac{2E\ q_m^2}{mq_e^2}\left(\dfrac{\gamma m\ q_\varkappa}{eq_m} + \mathrm{tg}^2(\theta)\right)}}{1 + \sqrt{-\dfrac{2E\ q_m^2}{mq_e^2}\left(\dfrac{\gamma m\ q_\varkappa}{eq_m} + \mathrm{tg}^2(\theta)\right)}}\right|. \qquad (22)$$

В критической точке $\widetilde{L}^2 = -m\gamma e\ q_m q_\varkappa$ эти выражения сшиваются непрерывным образом.

Случай $\widetilde{L}^2 < -m\gamma e\ q_m q_\varkappa - \frac{me^2q_e^2}{2E}$ соответствует падению пробной частицы на центр в потенциале $v = \frac{eq_e}{r} + \frac{\gamma e\ q_m q_\varkappa}{2r^2}$. Так как в нашем рассмотрении это выражение для потенциала v является приближенным, следует полагать, что полученные здесь формулы достаточно хорошо описывают рассеяние частиц на точном поенциале $v(r)$ при величинах прицельного параметра, значительно превосходящих те, которые удолетворяют данному неравенству.

Угол рассеяния Θ в данном случае — это угол между двумя образующими конуса с углом раствора $\frac{\theta}{2}$, лежащими в плоскостях, проходящих через ось конуса под углом 2φ друг к другу. Все эти углы связаны соотношением

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sin(\theta)\sin(\varphi) \tag{23}$$

(здесь учтено, что скорость налетающей частицы направлена к центру, а рассеянной — от центра).

Дифференциальное сечение рассеяния вычисляется по классической формуле

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{bdb}{d(\cos\Theta)}\right|. \tag{24}$$

Так как угол θ при фиксированной энергии пробных частиц однозначно связан с прицельным параметром формулой (19), удобно перейти к выражению в терминах угла θ. Также нужно учесть тот факт, что при рассеянии на дионе связь угла рассеяния Θ с прицельным параметром (и углом θ) неоднозначная, поэтому для вычисления сечения рассеяния нужно сложить вклады от всех значений прицельного параметра, при которых частицы рассеиваются в данном направлении:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\theta_i}\left(\frac{eq_m}{mv}\right)^2 \frac{1}{2\cos^4\theta}\left|\frac{\sin 2\theta\ d\theta}{\sin\Theta\ d\Theta}\right|.$$

Сложный вид формул (21), (22) и (23), а также необходимость учитывать вклады от нескольких значений прицельного параметра делают невозможным получение явного аналитического выражения для зависимости дифференциального сечения от угла рассеяния в большинстве случаев. Для получения конкретных численных значений будет необходимо использовать приближенные методы расчета на ЭВМ.

Интересной особенностью является то, что величина дифференциального сечения стремится к бесконечности при $\sin\Theta = 0$ и $\frac{d\Theta}{d\theta} = 0$. В литературе первый случай называют «глорией» (glory), а второй — «радугой» (rainbow) [23]. Углы рассеяния, соответствующие этим эффектам, можно рассчитать численными методами. Случаю «glory» соответствуют те прицельные параметры, для которых угол Θ принимает значение π, случаю «rainbow» — точки, в которых зависимость угла рассеяния от прицельного параметра достигает экстремумов. Особенностью рассмотренного потенциала является то, что при условии $-\frac{2\gamma E\ q_\varkappa q_m}{eq_e^2} > 1$ прицельные параметры, при которых наблюдаются указанные эффекты, группируются вокруг значения $b = \sqrt{-\frac{eq_m}{2E}(\gamma q_\varkappa + \frac{eq_e^2}{2E\ q_m})}$. Это соответствует углу раствора конуса, для которого $\mathrm{tg}(\theta) = \sqrt{-\frac{m}{eq_m}(\gamma q_\varkappa + \frac{eq_e^2}{2E\ q_m})}$.

Аналитическое вычисление дифференциального сечения рассеяния становится возможным при особом выборе параметров в выражении для потенциала (17). Первый — тривиальный — случай реализуется при $q_m = 0$. В этом случае магнитное поле становится тождественно равным нулю, потенциал электрического поля становится кулоновским с зарядом q_e. Дифференциальное сечение рассеяния описывается формулой Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{eq_e}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}.$$

Во втором случае мы требуем выполнения условия $q_e = 0$. Тогда потенциал (17) описывает поле частицы, электрический заряд которой кажется нулевым удаленному наблюдателю, но электростатическое взаимодействие с пробными зарядами сохраняется на коротких дистанциях от центра. В разложении этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$ младший порядок соответствует второй степени. Выражение (21) в этом случае удобно переписать в терминах прицельного параметра b. При озвученных условиях оно выглядит так:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(mv\ b)^2 + (eq_m)^2}{(mv\ b)^2 + \gamma m\ eq_m q_\varkappa}}.$$

Тогда выражение для угла рассеяния (23) принимает вид

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{eq_m}{mv\ b}\right)^2}} \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{eq_m}{mv\ b}\right)^2}{1 + \frac{\gamma m\ eq_m q_\varkappa}{(mv\ b)^2}}}\right).$$

Рассмотрим рассеяние на малые углы, для чего в последней формуле перейдем к пределу при $b \to \infty$ и рассмотрим ее в младшем порядке разложения по степеням малого параметра $\frac{1}{b}$. Получаем выражение

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = -\left(\frac{eq_m}{mv\ b}\right)^2,$$

которое после подстановки в формулу (24) приводит к следующему выражению для дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(eq_m)^2}{16m\ E}\frac{1}{\cos^3\left(\frac{\Theta}{2}\right)}.$$

Это приближенное выражение при указанных условиях совпадает с выражением для дифференциального сечения рассеяния на кулоновском дионе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен эффективный лагранжиан электродинамики Максвелла с безмассовым аксионом в стационарном случае. Найдена и исследована группа скрытых симметрий данного лагранжиана.

Получено общее гармоническое решение и показано, что в случае сферической симметрии данное решение может описывать поле точечной частицы, обладающей зарядами всех трех типов: электрическим, магнитным и аксионным. При этом аксионное и электрическое поля могут иметь сложное распределение в пространстве, в частности принимать всюду конечные значения, в то время как магнитное поле имеет кулоновский вид при любых значениях входящих в теорию параметров.

В первом порядке теории возмущений получены формулы, описывающие рассеяние точечных электрически заряженных пробных частиц на потенциале диона, обладающего нетривиальным аксионным зарядом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peccei R. D., Quinn H. R.* // Phys. Rev. Lett. 1977. **38**. P. 1440.
2. *Peccei R. D., Quinn H. R.* // Phys. Rev. Lett. 1977. **D16**. P. 1791.
3. *Ouellet J. L., Bogorad Z.* // Phys. Rev. D. 2019. **99**. 055010.
4. *Rodriguez-Tzompantzi O.* // arXiv:2001.07101. 2020.
5. *Born M., Infeld L.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1934. **144**. P. 425.
6. *Heisenberg W., Euler H.* // Zeitschr. Phys. 1936. **98**. P. 714.
7. *Denisova I. P., Garmaev B. D., Sokolov V. A.* // European Physical Journal C. 2019. **79**. P. 531.
8. *Denisov V. I., Dolgaya E. E., Sokolov V. A., Denisova I. P.* // Physical Review D. 2017. **96**, N 4.
9. *Denisov V. I., Dolgaya E. E., Sokolov V. A.* // Journal of High Energy Physics. 2017. **5**. P. 105.
10. *Denisov V. I., Sokolov V. A., Svertilov S. I.* // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2017. **9**. P. 004.
11. *Denisov V. I., Ilyina V. A., Sokolov V. A.* // International Journal of Modern Physics D. 2016. **25**, N 11.
12. *Denisov V. I., Shvilkin B. N., Sokolov V. A.* // Physical Review D. 2016. **94**. P. 045021.
13. *Denisov V. I., Denisova I. P., Pimenov A. B., Sokolov V. A.* // European Physical Journal C. 2016. **76**, N 11. P. 612.
14. *Kruglov S. I.* // Annals of Physics. 2019. **409**. 167937.
15. *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // International Journal of Modern Physics A. 2016. **31**, N 23. P. 1650127.
16. *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // Modern Physics Letters A. 2016. **31**, N 31. P. 1650169.
17. *Кечкин О. В., Мошарев П. А.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2019. **6**. 1960102.
18. *Tobar M. E., McAllister B. T., Goryachev M.* // arXiv:1809.01654v7. 2019.
19. *Nikitin A. G., Kuriksha O.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012 **17**, N 12. P. 4585.
20. *Shnir Y. M.* // Magnetic Monopoles. Springer, 2005.
21. *Schwinger J.* // Ann. Phys. 1976. **101**. P. 451.
22. *Kechkin O. V., Denisova I. P.* // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2018. **15**, N 5. P. 464.
23. *Newton R. G.* // Scattering Theory of Waves and Particles. Springer Science + Business Media. 1982.

The Symmetries and the General Harmonic Solution to Equations of Maxwell Electrodynamics with an Axion

O. V. Kechkin[1,2,a], **P. A. Mosharev**[3,4,b]

[1]*Department of General Nuclear Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[2]*Department № 8 «Information Technologies and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University). Moscow 121552, Russia.*
[3]*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[4]*Department of Higher Mathematics, National Research University «Moscow Power Engineering Institute». Moscow 111250, Russia.*
E-mail: [a]*kechkin@sinp.msu.ru*, [b]*moscharev.pavel@physics.msu.ru*.

The effective Lagrangian is derived and a group of hidden symmetries is determined for Maxwell's theory with an axion in the stationary case. The general harmonic solution is constructed, and it is shown that a central source can have only a Coulomb-type magnetic field. The electric field of such a source has a complex potential, which can be finite everywhere with a special choice of parameters. The differential scattering cross section of the test particle on a dione with an axionic charge is calculated within the first order of the perturbation theory.

Keywords: electrodynamics with axion, monopoles, dions, exact solutions, symmetries.
PACS: 11.10.Lm, 11.30.Na, 11.15.Kc.
Received 01 March 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 3. Pp. 192–197.

Сведения об авторах

1. Кечкин Олег Вячеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-25-58, e-mail: kechkin@sinp.msu.ru.
2. Мошарев Павел Александрович — аспирант; e-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru.