ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Анализ влияния непериодических магнитных полей и внеосевых эффектов на излучение рентгеновских и других ЛСЭ

К. В. Жуковский[a]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 16.04.2020, после доработки 14.05.2020, принята к публикации 16.05.2020.

Теоретически исследовано ондуляторное излучение (ОИ) в ондуляторе с гармониками поля в двух ортогональных плоскостях с учетом непериодических магнитных компонент и внеосевых эффектов. Новые аналитические выражения для спектра и интенсивности ОИ записаны явно в терминах обобщенных функций Бесселя и Эйри. В предельных случаях они описывают излучение двухчастотного плоского, спирального и эллиптического ондуляторов. Аналитически учтено влияние конечного размера пучка электронов, эмиттанса, отклонения электронов от оси, разброса энергии электронов, влияние постоянных компонент магнитного поля. Полеченные выражения позволяют различить и выделить вклады каждой компоненты поля и характеристик пучка и ондулятора в генерацию гармоник ОИ. Использована феноменологическая модель ЛСЭ для исследования эволюции мощности гармоник в ЛСЭ экспериментах LCLS и LEUTL. Проанализировано влияние параметров пучка и ондулятора на генерацию гармоник. Полученные теоретические результаты мощности и спектра излучения ЛСЭ согласуются с экспериментами. Показано, что 2-я гармоника в рентгеновском ЛСЭ LCLS объясняется отклонением пучка от оси на $\sim$ 12 мкм, сравнимым с размером фотонного пучка, а в UV-A ЛСЭ LEUTL 2-я гармоника возникает за счет широких, ~ 0.2 мм, пучков электронов и фотонов.

Ключевые слова: ондулятор, генерация гармоник, магнитное поле, лазер на свободных электронах.
УДК: 53.02, 535.3 PACS: 41.60 m, 41.60.Ap, 41.60.Cr.

ВВЕДЕНИЕ

Источники синхротронного излучения последнего поколения — лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), в которых когерентное излучение генерируется электронами, сгруппированными в микробанчи на расстоянии длины волны излучения друг от друга. Они позволяют получить рентгеновское когерентное излучение для исследования процессов на наномасштабе. Для этого требуется высокое качество ондуляторов и пучков, малые разброс энергии и отклонение пучка от оси, которые приводят к уширению линии ондуляторного излучения (ОИ) и ухудшению группировки электронов [1–5]. В реальных устройствах обычно присутствуют гармоники поля, а идеальное синусоидальное поле не реализуется, так как не удовлетворяет уравнениям Максвелла. Хотя на оси в идеальном плоском ондуляторе излучаются только нечетные гармоники, а в спиральном — только основной тон, в спектре реальных устройств излучаются также четные гармоники. Их мощность сильно варьируется в зависимости от установки (см., например, [6–10]). Обычно моделирование ЛСЭ проводится численно (см., например, [11]). Это требует вычислительных мощностей, программ и подготовленного персонала. Численное моделирование обычно дает хорошее согласие с экспериментом, но в каждом случае требует проработки программы под конкретную установку, что может быть выполнено опытными программистами. Кроме того, результаты численного моделирования не объясняют причины генерации тех или иных гармоник ОИ и ЛСЭ. Нами предлагается теоретический анализ поведения гармоник спонтанного и вынужденного ОИ с использованием аналитического подхода. Ниже мы также проведем детальное сравнение результатов такого моделирования с некоторыми экспериментами ЛСЭ. В отличие от недавних наработок в этом направлении [12–19], в настоящем исследовании получена и используется аналитическая явная угловая зависимость коэффициентов Бесселя, учитывается угол электрон-фотонного взаимодействия, чувствительность последнего к потерям на каждой гармонике и расщепление линий спектра в результате бетатронных колебаний. Это позволяет проанализировать по отдельности влияние вышеперечисленных факторов на излучение в конкретной установке, объяснить различные причины генерации четных гармоник в ЛСЭ в рентгеновском и видимом диапазонах и получить точность, сравнимую со сложными численными симуляциями.

1. ОИ ОНДУЛЯТОРА С ГАРМОНИКАМИ ПОЛЯ В ДВУХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Рассмотрим ондулятор с основным магнитным полем амплитуды H_0 с периодом λ_u и кратными гармониками в двух ортогональных плоскостях:

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = H_0\big(\sin(k_\lambda z) + d\sin(pk_\lambda z)\,,\\ d_1\sin(hk_\lambda z) + d_2\cos(lk_\lambda z),\ 0\big),\\ k_\lambda = 2\pi/\lambda_{u,x}, \quad \lambda_{u;x} \equiv \lambda_u,\\ h, l, p \in \text{integers}, \quad d, d_1, d_2 \in \text{reals}.\end{gathered} \tag{1}$$

Напряженность гармоник поля в (1) произвольна; это позволяет обобщить в (1) известные поля

[a] E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

различных плоских и эллиптических ондуляторов (см. [20–22]). В релятивистском пределе $1/\gamma \ll 1$, где γ — релятивистский фактор, получаем интенсивность ОИ в поле (1) в следующем виде:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 N^2 k^2}{4\gamma^2 c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_n}\right)^2 \times \\ \times \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\nu_n}{2}\right)\left(\left|f_{n,x}^{1,2}\right|^2 + \left|f_{n,y}^{1,2}\right|^2\right), \quad (2)$$

где $k = H_0 \lambda_u e/2\pi mc^2 \cong \lambda_u[\mathrm{cm}] H_0[\mathrm{kG}]/10.71$, $\nu_n = 2\pi n N\big((\lambda_n/\lambda) - 1\big)$ — параметр расстройки, c — скорость света, e и m — заряд и масса электрона, N — число периодов ондулятора, λ_n — резонансная длина ОИ:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left(1 + \frac{k^2}{2}\left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{l}\right)^2\right) + \\ + (\gamma\theta)^2\right), \quad \omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n}, \quad (3)$$

$f_{n;x,y}$ — коэффициенты Бесселя x- и y-поляризаций ОИ:

$$f_{n;x}^1 = \frac{d_1}{h}\left(J_{n+h}^n + J_{n-h}^n\right) + i\frac{d_2}{l}\left(J_{n+l}^n - J_{n-l}^n\right), \\ f_{n;x}^2 = \frac{2}{k}\gamma\theta\cos\phi J_n^n, \quad (4)$$

$$f_{n;y}^1 = \left(J_{n+1}^n + J_{n-1}^n\right) + \frac{d}{p}\left(J_{n+m}^n + J_{n-m}^n\right), \\ f_{n;y}^2 = \frac{2}{k}\gamma\theta\sin\phi J_n^n, \quad (5)$$

θ — угол отклонения от оси ондулятора, φ — азимутальный угол. Коэффициенты Бесселя (4), (5) выражаются через обобщенные функции Бесселя

$$J_n^m(\xi_i) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \exp\big[i\big(n\alpha + \xi_1 \sin h\alpha + \xi_2 \cos l\alpha + \\ + \xi_3 \sin\alpha + \xi_4 \sin 2\alpha + \xi_5 \sin 2h\alpha + \xi_6 \sin 2l\alpha + \\ + \xi_7 \cos(l+h)\alpha + \xi_8 \cos(l-h)\alpha + \xi_0 \sin p\alpha + \\ + \xi_9 \sin(p+1)\alpha + \xi_{10} \sin(p-1)\alpha + \xi_{11} \sin 2p\alpha\big)\big], \quad (6)$$

которые зависят от следующих аргументов ξ_i:

$$\xi_0 = \frac{\xi_4 8d}{kp^2}\gamma\theta\sin\phi, \quad \xi_1 = \frac{\xi_4 8d_1}{kh^2}\gamma\theta\cos\phi, \\ \xi_2 = \frac{\xi_4 8d_2}{kl^2}\gamma\theta\cos\phi, \quad \xi_3 = \frac{\xi_4 8}{k}\gamma\theta\sin\phi, \quad (7)$$

$$\xi_4 = \frac{1}{4}\frac{mk^2}{1 + \frac{k^2}{2}\left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{l}\right)^2\right) + \gamma^2\theta^2},$$

$$\xi_5 = \frac{d_1^2}{h^3}\xi_4, \quad \xi_6 = -\frac{d_2^2}{l^3}\xi_4, \quad (8)$$

$$\xi_7 = \frac{4d_1 d_2}{hl(l+h)}\xi_4, \quad \xi_8 = \frac{4d_1 d_2}{hl(l-h)}\xi_4,$$

$$\xi_9 = \frac{4d}{p(p+1)}\xi_4, \quad \xi_{10} = \frac{4d}{p(p-1)}\xi_4, \quad \xi_{11} = \frac{d^2}{p^3}\xi_4. \quad (9)$$

Аналитические выражения (2)–(9) дают зависимость интенсивности ОИ в поле (1) от параметров ондулятора и углов отклонения от оси и позволяют определить вклад каждого из параметров установки в генерацию четных и нечетных гармоник ОИ. Из (2)–(9) в соответствующих пределах получаются выражения для плоских и спиральных ондуляторов, исследованные в [20–24].

2. ПОПРАВКИ ЗА СЧЕТ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОНДУЛЯТОРЕ

Разброс энергий электронов в пучке учитывается с помощью свертки $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 I(\nu_n + 4\pi n N\varepsilon, \theta)}{d\omega d\Omega\sqrt{2\pi}\sigma_e} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_e^2}} d\varepsilon$ и приводит к уширению линий ОИ; однородные непериодические магнитные компоненты приводят к инфракрасному сдвигу; в неоднородном магнитном поле также может идти вынужденное излучение релятивистских электронов (см., например, [25]). Учет влияния эмиттанса, дифракции и разброса энергии электронов при вынужденном излучении представляет сложную задачу, так как электрон-фотонное взаимодействие более чувствительно к потерям на высших гармониках ОИ, чем на основной частоте. Численные программы решают весь комплекс уравнений движения электронов во взаимодействии с полем излучения, однако они не проясняют физические причины генерации тех или иных гармоник и модификация программ для каждого случая производится программистами. Мы используем феноменологическое описание ЛСЭ [13–19] и коэффициенты Бесселя (4), (5), которые позволяют аналитически описать эволюцию мощности гармоник в практически любом ЛСЭ.

Влияние непериодических компонент поля в ондуляторах стараются свести к минимуму; некоторые численные оценки даны в [26–28]. Физически постоянное магнитное поле уводит электрон с оси ондулятора и вызывает угол изгиба θ_H. Пользователь ОИ на оси видит излучение от электрона под углом

$$\theta_H = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{k}{\gamma}N\sqrt{\kappa^2 + \rho^2},$$

индуцированным поперечными непериодическими компонентами $H_x = H_0\rho$, $H_y = H_0\kappa$, которые приводят к появлению в экспоненте интеграла излучения дополнительных непериодических слагаемых. Форма линии спектра ОИ вместо функции $\operatorname{sinc}(\nu_n/2)$ описывается в этом случае обобщенной функцией Эйри:

$$S(\nu_n, \eta, \beta) \equiv \int_0^1 d\tau e^{i\left(\nu_n \tau + \eta\tau^2 + \beta\tau^3\right)} \quad (10)$$

и ее производной. Углы θ и φ входят в аргументы функции $S(\nu_n, \beta, \eta)$:

$$\eta = \frac{4\pi^2 N^2 nk\gamma\theta}{(1 + k^2/2)}(\kappa\cos\varphi - \rho\sin\varphi),$$

$$\beta = (2\pi nN + \nu_n)\frac{(\gamma\theta_H)^2}{1 + k^2/2}.$$

Интенсивность ОИ тогда записывается следующим образом (ср. (2)):

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \cong \frac{e^2N^2\gamma^2k^2}{c(1+k^2/2)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 I_n^2,$$
$$I_n^2 = \left(S(\nu_n,\eta,\beta)(f_n^1+f_n^2)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{k}\gamma\theta_H 2\frac{\partial S\left(\nu_n,\eta,\beta\right)}{\partial\nu_{\rm n}}J_n^n\right)^2. \quad (11)$$

Непериодическое поле H_d приводит к возникновению четных гармоник ОИ на оси ондулятора. Им соответствует второе слагаемое $\frac{\sqrt{3}}{k}\gamma\theta_H\frac{2\partial S}{\partial\nu_{\rm n}}J_n^n$ в I_n (11). Легко увидеть в I_n (11) соответствующий коэффициент Бесселя f_n^3 четных гармоник за счет поля H_d: с учетом $2\max[\partial S_{\nu_{\rm n}}]=1$ имеем:

$$f_n^3 = \frac{\sqrt{3}}{k}\gamma\theta_H 2\max\left[\frac{\partial S}{\partial\nu_{\rm n}}\right]J_n^n = 4\pi N\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\max\left[\frac{\partial S}{\partial\nu_{\rm n}}\right]J_n^n = \frac{\sqrt{3}}{k}\gamma\theta_H J_n^n. \quad (12)$$

Коэффициент Бесселя $f_n^3\propto\gamma\theta_H$ (12) четных гармоник, индуцированных полем H_d, с точностью до множителя $2>1.73$ и замены $\theta\to\theta_H$ выглядит как коэффициент Бесселя $f_{n;x,y}^2\propto 2\gamma\theta J_n^n/k$ угловой части в (4), (5). Связь угла θ_H с полем H_d такова: $H_d[G]=\frac{107.1\sqrt{3}\gamma\theta_H}{2\pi L_u[m]}$. Эффект поля H_d накапливается по длине ондулятора $L=\lambda_u N$. Для плоского, спирального и эллиптического ондуляторов выражения для коэффициентов Бесселя $f_{n;x,y}^{1,2}$ (4), (5) и обобщенных функций $J_n^m\left(\xi_i\right)$ (6)–(9) сильно упрощаются, но общая структура выражения (11) для интенсивности ОИ сохраняется: слагаемые $\propto S$ и $\propto\partial S/\partial\nu_{\rm n}$ в (11) отвечают соответственно нечетным и четным гармоникам. В отсутствии непериодической магнитной компоненты, $\kappa{=}\rho{=}0$, имеем

$$S(\nu_n,0,0)\big|_{H_d\to 0}\to e^{i\nu_n/2}\,\mathrm{sinc}(\nu_n/2).$$

Рассмотрим некоторые свойства обобщенных функций Эйри. Вместо интегрального представления (10) можно записать представление в виде рядов обобщенных полиномов Эрмита:

$$S(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^nH_n(x,-iy,-z)}{(n+1)!}.$$

Полиномы Эрмита трех переменных $H_n(x,y,z)$ в свою очередь записываются через суммы полиномов Эрмита двух переменных $H_n(x,y)$:

$$H_n\left(x,y,z\right)=n!\sum_{r=0}^{[n/3]}\frac{z^{n-3r}}{(n-3r)!r!}H_n\left(x,y\right); \quad (13)$$

полиномы Эрмита двух переменных определены в виде следующих сумм [29]:

$$H_n\left(x,y\right)=n!\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{x^{n-2r}\,y^r}{(n-2r)!\,r!} \quad (14)$$

и по сути представляют альтернативную запись обычных полиномов Эрмита:

$$H_n(x,y)=(-i)^n y^{n/2}H_n\left(\frac{ix}{2\sqrt{y}}\right)= i^n(2y)^{n/2}He_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2y}}\right).$$

Для (14), (13) можно записать производящие экспоненты полиномов Эрмита:

$$e^{xt+yt^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y),$$
$$e^{xt+yt^2+zt^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n\left(x,y,z\right).$$

Операторные определения полиномов Эрмита (13), (14) заключаются в действии экспоненциальных дифференциальных операторов на мономы x^n:

$$H_n(x,y,z)=e^{y\,\partial_x^2+z\,\partial_x^3}x^n,\quad H_n(x,y)=e^{y\,\partial_x^2}x^n;$$

они раскрывают внутреннюю связь между на первый взгляд не связанными между собой математическими объектами и позволяют глубже понять их физический смысл. Для обобщенной функции Эйри $S\left(\nu_n,\eta,\beta\right)$ (10) операторное соотношение дает связь с функцией sinc:

$$S(\nu_n,\eta,\beta)\equiv\int_0^1 d\tau e^{i\left(\nu_n\tau+\eta\tau^2+\beta\tau^3\right)}= e^{-i\eta\partial_x^2-\beta\partial_x^3}\int_0^1 e^{i\nu_n\tau}d\tau = e^{-i\eta\partial_x^2-\beta\partial_x^3}\left[e^{i\frac{x}{2}}\,\mathrm{sinc}\,\nu_n/2\right].$$

Отметим, что производная $\partial\,\mathrm{sinc}\,\nu_n/\partial\nu_n$ определяет усиление в ЛСЭ [30]; в присутствии непериодического магнитного поля H_d вместо нее возникает $\partial S/\partial\nu_n$ [31]. На оси ондулятора $S(x,y,z)$ (10) упрощается следующим образом:

$$S\left(x,y,z\right)|_{\theta=0}=S\left(x,z\right)=\int_0^1 e^{i\left(x\,\tau+z\,\tau^3\right)}d\tau= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^mH_m\left(x,-z\right)}{(m+1)!}.$$

Форма линий спектра нечетных гармоник в присутствии непериодического поля определяется функцией S; для четных гармоник, возникающих за счет непериодического поля, вклад дает производная $\partial_{\nu_n}S$. Индуцированный полем угол изгиба θ_H входит в аргумент β; угол отклонения от оси θ учитывается в аргументе η. Максимумы функции S и производной $\partial_{\nu_n}S$ таковы: $\max\left[S\right]=1$ и $\max\left[\partial S/\partial\nu_{\rm n}\right]=0.5$ [27, 28]. Углы θ_H и θ могут отчасти компенсировать влияние друг друга на излучение. Для сохранения максимума спектральной линии в резонансе $\nu_n=0$, в экспоненте в (10) требуется выполнение условия

$$\nu_n\approx-\left(\beta+\eta\right), \quad (15)$$

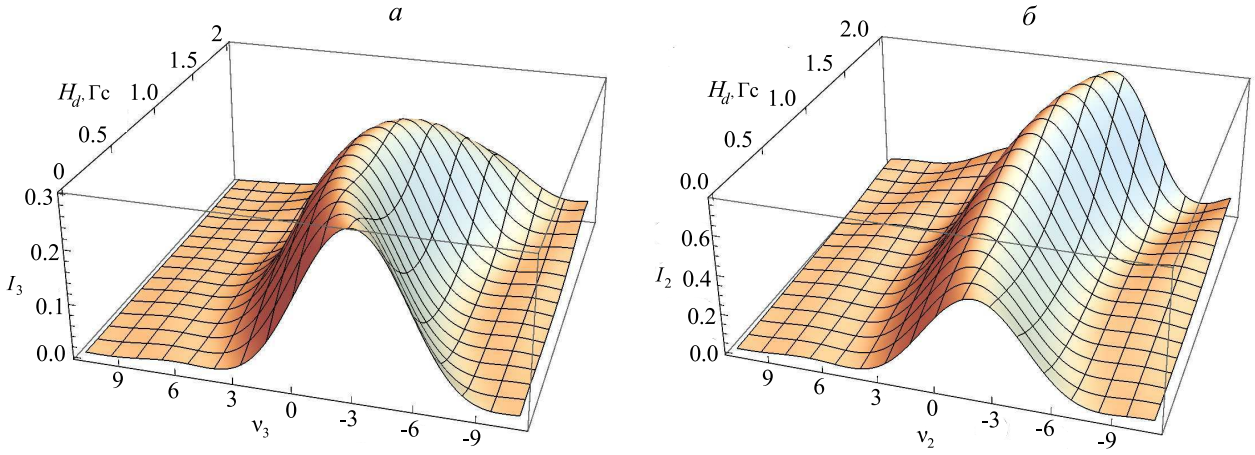

Рис. 1. Линия спектра 3-й гармоники (*а*) и 2-й гармоники (*б*) ондулятора LCLS, $\lambda_u = 3$ см, $k = 3.5$, $N = 113$, $\sigma_e = 0.0003$, $\gamma = 8400$, угол отклонения от оси $\gamma\theta = 0.1$, в зависимости от параметра расстройки ν_n и постоянного поля H_d поперек ондулятора

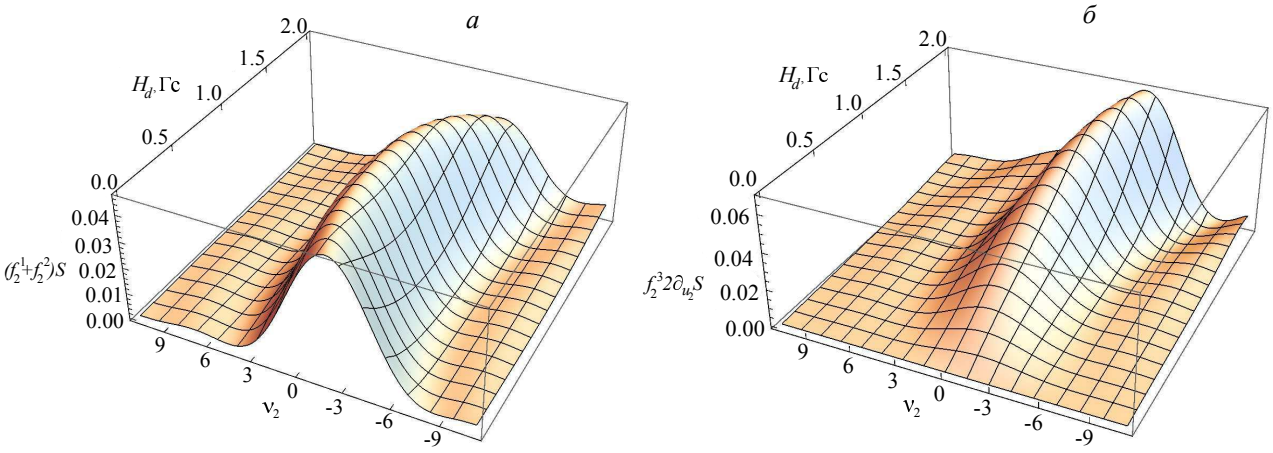

Рис. 2. Вклады в линию спектра 2-й гармоники ОИ ондулятора LCLS, $\lambda_u = 3$ см, $k = 3.5$, $N = 113$, $\sigma_e = 0.0003$, $\gamma = 8400$ с учетом угла отклонения $\gamma\theta = 0.1$ и постоянного поля H_d: первое слагаемое в $I_2(13) \sim S$ (*а*) и второе слагаемое в $I_2(13) \sim \partial S/\partial\nu_n$ (*б*) в зависимости от параметра расстройки ν_n и напряженности постоянного поля

при этом $\nu_n, \beta, \eta \in [-2\pi, 2\pi]$. Например, для ондулятора LCLS [7] компенсация инфракрасного сдвига излучения 3-й гармоники ОИ под углом $\gamma\theta = 0.1$ показана на рис. 1, *а*; максимальная компенсация происходит при $H_d \sim 1$ Гс.

Из (15) следует, что компенсация инфракрасного сдвига, т. е. $\nu_n = 0$, возможна под углом $\theta = \frac{2\pi}{3}\frac{Nk}{\gamma}\frac{\kappa^2+\rho^2}{\rho\sin\varphi-\kappa\cos\varphi}$. Для простоты положим, что присутствует только одна постоянная компонента κ и $\rho = 0$; тогда в направлении вокруг оси $\varphi = \pi$ получаем излучение на обычной частоте резонанса ОИ $\nu_n = 0$ в угол от оси $\tilde{\theta} = \frac{2\pi}{3}\frac{k}{\gamma}N\kappa = \sqrt{3}\theta_H$. Инфракрасный сдвиг резонансов ОИ в присутствии непериодического поля описывается следующим образом:

$$\omega_n = \frac{2n\omega_0\gamma^2}{\left(1+(k^2/2)\right)+(\gamma\theta_{\text{eff}})^2},$$

$$\theta_{\text{eff}}^2 = \theta^2 + \theta_H^2 - \sqrt{3}\theta_H\theta\frac{\rho\sin\varphi - \kappa\cos\varphi}{\sqrt{\kappa^2+\rho^2}}.$$

Таким образом, непериодическое поле κH_0 приводит к изгибу траектории электрона на угол θ_H от оси, а излучение в направлении, параллельном оси ондулятора, распространяется под углом $\theta = -\theta_H$ к направлению движения электрона и имеет резонансы на частотах $\omega_n \approx 2n\omega_0\gamma^2/\left(1+(k^2/2)+0.27(\gamma\theta_H)^2\right)$.

В длинном ондуляторе значимый угол $\gamma\theta_H \approx 0.1$ может быть индуцирован относительно слабым полем. Например, в ондуляторе LCLS [7] длиной $L = 3.4$ м значение $\gamma\theta_H \approx 0.1$ соответствует полю $H_d \approx 1$ Гс, которое вызывает отклонение пучка $\sim$10–20 мкм от оси на длине усиления ЛСЭ $L \approx 1.5$ м. В реальных установках тщательно вычисляют интегралы поля и компенсируют поля. В рентгеновских ЛСЭ полная длина ондуляторов достигает сотни метров. Генерация мощной 2-й гармоники была зарегистрирована в LCLS [6, 8]. Вклады от угла отклонения от оси $\gamma\theta = 0.1$ и от постоянной компоненты поля H_d в линию спектра 2-й гармоники ондулятора LCLS показаны на рис. 2, *а* и *б* соответственно.

Суммарный результат — линия спектра 2-й гармоники — показана на рис. 1, *б*.

3. ПОПРАВКИ ЗА СЧЕТ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА ПУЧКА И БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Начальное отклонение электрона от оси y_0 в пучке конечного размера $\sigma_{x,y}$ приводит к появлению бетатронных колебаний, расщеплению линий спектра и вызывает четные гармоники излучения на оси (см., например, [20–22, 32–34] и др). Частота бетатронных колебаний пропорциональна γ:

$$\omega_\beta = \frac{\sqrt{2}\pi ck\delta}{\lambda_n n\gamma} \cong \frac{2\sqrt{2}\pi c\gamma k\delta}{(1+(k^2/2))\lambda_u};$$

$\delta = 1$ для обычного плоского ондулятора и $\delta = \sqrt{1+d^2+d_1^2+d_2^2}$ для мультипериодического поля (1). Для релятивистских электронов $\gamma \gg 1$ и ω_β значительно ниже, чем резонансы ОИ $\omega_n \cong \frac{4\pi cn\gamma^2}{(1+(k^2/2))\lambda_u}$: $\frac{\omega_\beta}{\omega_n} \cong \frac{k\delta}{\sqrt{2}n\gamma} \propto \frac{1}{\gamma}$. В рентгеновских ЛСЭ используют ультрарелятивистские пучки с $\gamma \approx 10^3$–10^4 и расщепление линий ОИ происходит на очень малую величину $\sim 1/\gamma$; численные оценки даны в следующем разделе, где анализируется излучение конкретных ЛСЭ [6–10]. Влияние бетатронных колебаний на ОИ двухчастотного плоского ондулятора было исследовано в [35]. В случае мультипериодического поля (1) физика бетатронных колебаний принципиально не меняется: расщепление спектральных линий описывается рядами, содержащими коэффициенты Бесселя (4) и (5), факторизованные обобщенными функциями Бесселя $\tilde{J}_p(\zeta,\xi)$:

$$f_n^{1,2} \to \sum_p \tilde{J}_p(\xi,\zeta)\, f_n^{1,2},$$
$$\tilde{J}_p(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(pq - \zeta\sin q - \xi\sin 2q)\, dq. \tag{16}$$

$\tilde{J}_p(\zeta,\xi)$ зависят от θ и от начального отклонения y_0 электрона в пучке от оси:

$$\zeta = \frac{2\pi\theta y_0}{n\lambda_n} = \frac{4\pi\theta y_0\gamma^2}{\lambda_u(1+(k^2/2))},$$
$$\xi = \frac{\pi^2 y_0^2 k\delta}{2n\gamma\sqrt{2}\lambda_u\lambda_n} = \frac{\pi^2\gamma y_0^2 k\delta}{\sqrt{2}\lambda_u^2(1+(k^2/2))}. \tag{17}$$

Бетатронные осцилляции, как и непериодические магнитные компоненты, вызывают генерацию четных гармоник ОИ, в том числе на оси ондулятора. Они имеют поляризацию, ортогональную основной поляризации излучения плоского ондулятора; соответствующие коэффициенты Бесселя получаются в результате вычислений, похожих на проведенные в [35]. В результате имеем

$$f_{n,p;y}^4 \cong \frac{\sqrt{2}\pi y_0\delta}{\lambda_u} J_n^n(\xi_i)\left(\tilde{J}_{p+1}(\zeta,\xi) - \tilde{J}_{p-1}(\zeta,\xi)\right), \tag{18}$$

где ζ,ξ определены в (17), а $J_n^m(\xi_i)$ и ξ_i определены в (6)–(9). В пределе плоского двухчастотного ондулятора $H_y = H_0(\sin(k_\lambda z) + d\sin(pk_\lambda z))$ без учета непериодического магнитного поля, но с учетом бетатронных осцилляций, коэффициенты и функции Бесселя $f_n^{1,2,4}$ (4), (5), (6), (16), (18) сводятся к результатам работы [35]. Основной вклад в генерацию четных гармоник обычно дает субгармоника с $p = 0$: $f_{n=2,4,p=0;y}^4 \sim 10^{-2}$; вклад бетатронных колебаний обычно не превосходит вклада расходимости пучка в (4), (5); эти вклады малы по сравнению с вкладом нечетных гармоник: $f_{n=5,3,1}^{1,2} \sim 0.15$–$0.8$.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ГАРМОНИК В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ЛСЭ

В экспериментах ЛСЭ LCLS с излучением на длинах волн $\lambda = 1.5$ нм и $\lambda = 0.15$ нм целевое отклонение пучка в установке составляло 5 мкм, а имевшиеся методы контроля и регулировки давали точность 50 мкм [6–8]. При отклонении электронов с энергией $E = 13.6$ ГэВ всего на ~ 10 мкм от оси на длине усиления $L_g \sim 3$ м получаем значительный угол $\theta\gamma \approx 0.1$. В ЛСЭ LEUTL с излучением на длинах волн $\lambda = 385$ нм и $\lambda = 530$ нм пучок имел размеры ~ 0.2 мм, что на порядок больше, чем в ЛСЭ LCLS. Ниже мы проанализируем влияние размеров пучка и различных других факторов на мощность гармоник ЛСЭ. Для этого используем откалиброванную по экспериментам аналитическую модель ЛСЭ [14], в которой дополнительно учтем осцилляции мощности в режиме насыщения, угол электрон-фотонного взаимодействия с излучением от других электронов в пучке конечного эмиттанса и бетатронные колебания.

В экспериментах LCLS [7, 8] ЛСЭ состоит из 33 ондуляторных секций длиной 3.4 м каждая, ондуляторы с постоянными магнитами имеют период $\lambda_u = 3$ см и параметр $k = 3.5$, электронный ток имеет силу 1–3.5 кА. В эксперименте с $\lambda_1 = 1.5$ нм были зарегистрированы 1-я, 2-я и 3-я гармоники. Мы приводим наше моделирование этого эксперимента (см. таблицу и рис. 3 для электронов с энергией $E = 4.3$ ГэВ, случай $E = 13.6$ ГэВ не приводим для краткости). Значения параметра Пирса, коэффициентов Бесселя и мощности гармоник для пучка *центрированного на оси* и с учетом его **отклонения на 12 мкм** на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 1.5$ м, выделены в таблице соответственно *курсивом* и **полужирным** шрифтом для наглядности.

Эволюция мощности гармоник ЛСЭ по длине ондуляторов показана цветными линиями на рис. 3; экспериментальная мощность гармоник показана цветными зонами и штриховыми линиями в области насыщения справа на рис. 3 с учетом разброса измерений [8]. При центровке пучка с точностью 5 мкм с заданным в эксперименте эмиттансом мы получили значения мощности 3-й и 5-й гармоник несколько выше измеренных, а мощность 2-й гармоники — ~ 5 кВт — оказалась на два порядка ниже измеренной. Бетатронные колебания дают пренебрежимо малые коэффициенты Бесселя 2-й гармоники, $f_{n,p;y}^4 \sim 2\times 10^{-3}$, по сравнению угловым вкладом счет эмиттанса: $f_{2;y} \sim 0.025$. Расщепление линий спектра практически отсутствует: $\tilde{J}_{p=-1,0,1}(\xi,\zeta) \simeq \{0.1, 0.98, 0.1\}$. В эксперименте [6–8] траектории электронов с энергией $E_e = 4.3$ ГэВ уходят с оси на ~ 10–15 мкм

Таблица. Некоторые данные моделирования LCLS FEL с $\lambda = 1.5$ нм

Параметры пучка: энергия электронов $E = 4.3$ ГэВ, $\gamma = 8400$, мощность электронного пучка $P_E = 4.29$ ТВт, ток $I_0 = 1$ кА, плотность тока $J = 3.34 \times 10^{11}$ А/м^2, сечение пучка $\Sigma = 2\pi\sigma_x\sigma_y = 3.0 \times 10^{-9}$ м^2, эмиттанс $\gamma\varepsilon_{x,y} = 0.4$ мкм, фокус $\beta = 10$ м, размер пучка $\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon\beta} \approx 22$ мкм, расходимость $\theta_{\text{div}} = \sqrt{\varepsilon/\beta} \approx 2.2$ мкрад, разброс энергий электронов $\sigma_e = 0.3 \times 10^{-3}$				
Параметры ондулятора: $k = 3.5$, $\lambda_u = 3$ см, $N = 113$, длина секции 3.4 м				
Параметры ЛСЭ: длина насыщения $L_s \approx 26$ м, длина усиления $L_{\text{gain}} \approx 1.45$ м, размер фотонного пучка $\sigma_{\text{photon}} \equiv \sigma_\gamma \approx \sqrt{\sigma_{x,y}\sqrt{\lambda_1 L_g/4\pi}} \cong 17$ мкм				
Номер гармоники ЛСЭ	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$
Коэффициент Бесселя с учетом ухода пучка с оси на 12 мкм на длине 1.5 м Коэффициент Бесселя f_n для пучка на оси	0.742 0.744	**0.060** *0.025*	**0.330** *0.338*	**0.220** *0.229*
Параметр Пирса $\tilde{\rho}_n$ с учетом ухода пучка с оси на 12 мкм на длине 1.5 м Параметр Пирса $\tilde{\rho}_n$ для пучка на оси	0.0012 0.0012	**0.0002** *0.0001*	0.0007 0.0007	0.0005 0.0006
Длина волны гармоники λ_n, нм	1.5	0.75	0.5	0.3
Мощность насыщения с учетом ухода пучка на 12 мкм на длине 1.5 м, $P_{F,n}$, Вт Мощность насыщения для пучка на оси $P_{F,n}$, Вт	7.5×10^9 7.8×10^9	$\mathbf{3.2 \times 10^6}$ 4×10^3	$\mathbf{1.2 \times 10^8}$ 2×10^8	$\mathbf{1.0 \times 10^7}$ 2×10^7

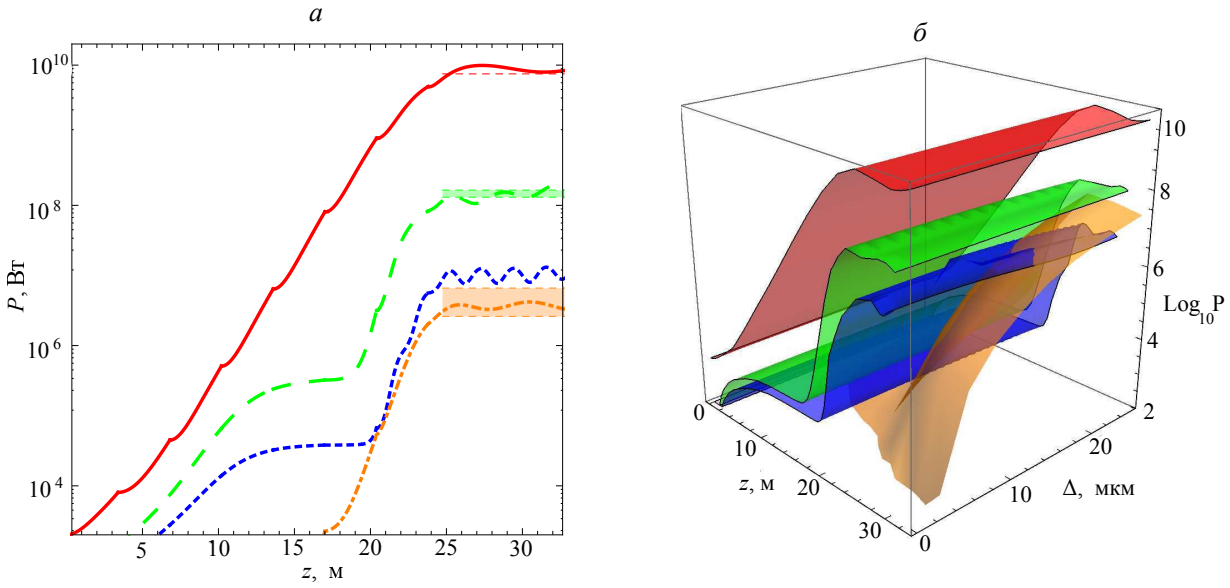

Рис. 3. Эволюция мощности гармоник ЛСЭ в эксперименте LCLS с $E = 4.3$ ГэВ, $\lambda_1 = 1.5$ нм, $\sigma_e = 0.3 \times 10^{-4}$, $I_0 = 1$ кА. Гармоники: $n = 1$ — красная (сплошная), $n = 2$ — оранжевая (штрихпунктирная), $n = 3$ — зеленая (штриховая), $n = 5$ — синяя (пунктирная) линии и поверхности соответствующего цвета. Экспериментальные диапазоны измеренных мощностей — цветные зоны между штриховыми линиями: $P_3 \approx 2\%$–2.5% P_1, $P_2 \approx 0.04\%$–0.1% P_1, $P_1 = E_{\text{ph}}/\tau_{\text{ph}} \sim 7.5$ ГВт, $E_{\text{ph}} = 1$–2 мДж, $\tau_{\text{ph}} = 0.1$–0.3 пс

на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 1.5$ м [6, 7]; это отклонение сравнимо с шириной фотонного пучка. При центровке пучка с точностью ~ 12 мкм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 1.5$ м [7] получаем из нашего расчета мощность 2-й гармоники, соответствующую измеренной — оранжевая линия и область на рис. 3, и мощности нечетных гармоник также в пределах погрешности [8]. При этом $\theta \approx 8$ мкрад, $\theta\gamma \approx 0.07$, а расщепление линий спектра за счет бетатронных колебаний, $\tilde{J}_{p=-2,1,0,1,2}(\xi,\zeta)|_{y_0=\sigma_{x,y}} \approx \{0.05, 0.3, 0.9, 0.3, 0.05\}$, мало даже на краях электронного пучка. Отклонение $\delta\lambda$ субгармоник p от резонанса $\lambda_1 = 1.5$ нм ничтожно: $\delta\lambda \approx \lambda k/\sqrt{2}\gamma \approx 0.45$ пм. В сумме для субгармоник $p = 0, \pm1, \pm2$ с учетом расстояния между ними имеем спектральную ширину $\Lambda \sim 1.8$ пм, $\Lambda/\lambda \sim 0.1\%$. Оценка спектральной плотности до насыщения $\Delta\lambda/\lambda \approx \sqrt{\rho/N_{\text{tot}}}$ дает значение, близкое к параметру Пирса ρ: $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.1\% \sim \rho \sim 1/N_{\text{tot}}$, где N_{tot} — полное число периодов; экспериментальная спектральная плотность ~ 0.1–1% [7]. Итак, все излучаемые субгармоники $p = 0, \pm1, \pm2$ находятся в пределах ширины спектрального диапазона и взаимодействуют с электронами пучка в ЛСЭ. Отметим, что для отклонения электрона на угол $\gamma\theta_H = 0.07$ на длине $L_g = 1.5$ м требуется постоянное поле напряженности $H_d \approx 1.4$ Гс, которое обычно компенсируется.

Рассмотрим теперь эксперимент с ЛСЭ LEUTL [9] с ондулятором с $k = 3.1$, $\lambda_u = 3.3$ см, $\beta = 1.5$ м, энергией электронов $E = 255$ МэВ, разбросом энергии $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$, эмиттансом $\gamma\varepsilon = 7Pi$ мкм рад и током $I_0 = 184$ А, с UV-A-излучением на длине

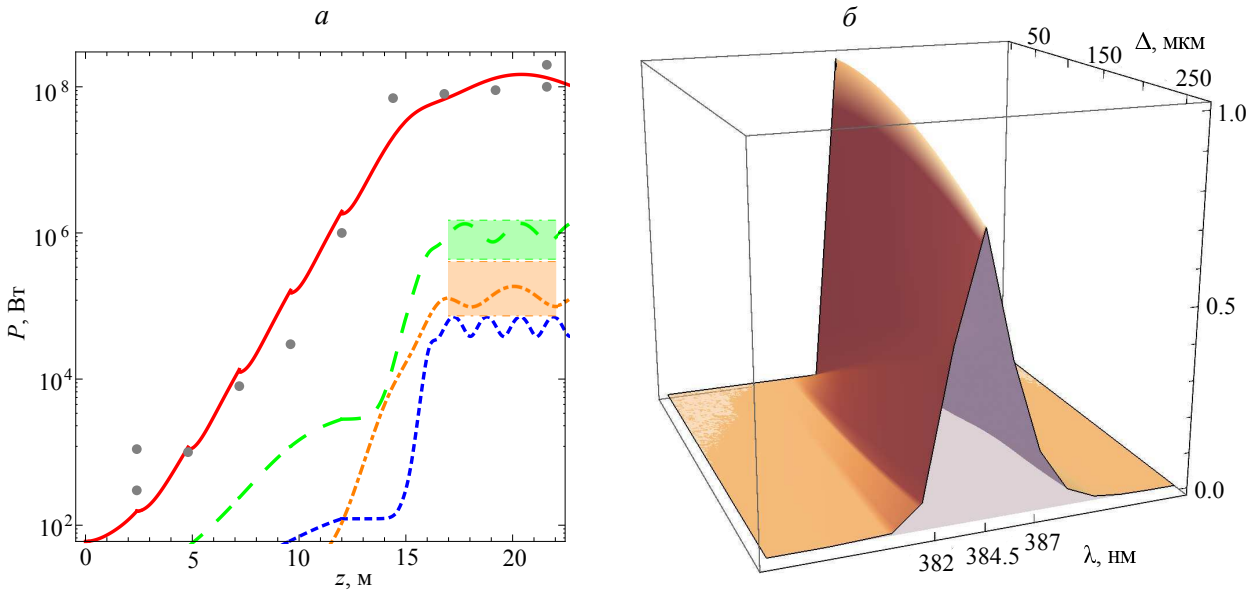

Рис. 4. а — Эволюция мощности гармоник ЛСЭ в эксперименте LEUTL FEL с $E = 255$ МэВ, $\lambda_1 = 385$ нм, $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$, $I_0 = 184$ А. Гармоники: $n = 1$ — красная (сплошная), $n = 2$ — оранжевая (штрихпунктирная), $n = 3$ — зеленая (штриховая), $n = 5$ — синяя (пунктирная) линии и поверхности соответствующего цвета. Экспериментальные диапазоны измеренных мощностей насыщения обозначены цветными зонами; оценка [9] мощности гармоник: $P_3 \approx 0.3\%{-}1\%\ P_1$, $P_2 \approx 0.07\%{-}0.4\%\ P_1$; экспериментальные значения основного тона P_1 отмечены точками; *б* — ширина линии излучения в зависимости от расстояния y_0 электрона от оси

волны $\lambda_1 = 385$ нм. Размеры пучков электронов $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм и фотонов $\sigma_\gamma \approx 0.2$ мм были на порядок больше, чем в LCLS [6], угол расходимости составлял $\theta \approx 170$ мкрад, т. е. много больше, чем в LCLS. Поэтому в эксперименте LEUTL можно было бы ожидать существенного влияния бетатронных колебаний в широком пучке. Однако расщепления линий ОИ из-за бетатронных колебаний оказывается малым. С учетом эмиттанса и бетатронных колебаний теоретическая мощность 2-й гармоники получается примерно на порядок меньше, чем в эксперименте LEUTL. Для объяснения измеренной мощности нужно учесть значительный угол взаимодействия излучения с электронами в широком пучке размером $\sigma_\gamma \sim 0.2$ мм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 0.9$ м: $\bar{\theta} \approx \sigma_\gamma / L_{\text{gain}} \approx 2.3 \times 10^{-4}$ рад, $\gamma\bar{\theta} \approx 0.12$; угол $\bar{\theta}$ больше расходимости $\theta \approx 170$ мкрад. С учетом угла $\bar{\theta}$ электрон-фотонного взаимодействия появляется заметное расщепление $\tilde{J}_{p=-2,-1,0,1,2} = \{0.07, 0.47, 0.75, 0.41, 0.16\}$ на три основных субгармоники. Они расположены близко друг к другу: $\delta\lambda/\lambda \approx k/\sqrt{2}\gamma \sim 0.004 \ll 1$, т. к. $\gamma = 500 \gg 1$. Коэффициенты Бесселя x- и y-поляризаций таковы: $f_{n=1,2,3,4,5;x} \approx \{0.75, 0.14, 0.31, 0.15, 0.18\}$, $f_{n=1,2,3,4,5;y} \approx \{0.006, 0.027, 0.010, 0.016, 0.012\}$; для четных гармоник эти коэффициенты Бесселя больше по сравнению со случаем, когда учитывается только расходимость пучка. Коэффициент Бесселя 2-й гармоники в x-поляризации значительно больше вклада бетатронных колебаний (18) и углового вклада в продольной y-поляризации: $f^{\beta}_{n=2,p} \sim f_{n=2,y} \approx 0.02{-}0.04$, $f_{n=2,x} \approx 0.14 \gg f_{n=2,y} \sim f^{\beta}_{n=2,p} \approx 0.03$. С учетом вышесказанного моделируемая мощность всех гармоник в эксперименте LEUTL оказывается в пределах измерений [9, 10] (рис. 4, *а*).

Оценим теоретическую ширину линии спектра с учетом расщепления на субгармоники; она вычислена с использованием обобщенных функций Бесселя и Эйри и представлена на рис. 4, *б*. Учитывая три основные субгармоники (рис. 4, *б*), получаем $\lambda_{p=0,\pm1} \approx 384.6 \pm 1.7$ нм, ширина спектра $\Lambda \sim 3$ нм в согласии с данными [9] в режиме экспоненциального роста основного тона ЛСЭ. Вблизи насыщения имеем сужение спектра до $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.2\% \sim \rho$ в согласии с [9].

Мы провели подробный анализ также в отношении эксперимента LEUTL с $\lambda = 530$ нм: все результаты мощности и спектра [9, 10] подтверждаются нами теоретически. Мы не приводим их для краткости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено теоретическое исследование генерации гармоник ОИ с учетом внеосевых эффектов и гармоник поля обобщенного эллиптического ондулятора. Получены аналитические выражения для интенсивности и спектра ОИ в терминах обобщенных функций Бесселя и Эйри. При этом аналитически учтено влияние конечного размера пучка электронов и описано расщепление линий спектра, а также учтено влияние расходимости и разброса энергии электронов и исследовано влияние непериодических компонент магнитного поля. Результаты для формы линий спектра и интенсивности ОИ получены явно в интегральной форме. Они учитывают все основные потери в реальных установках и использованы нами для исследования эволюции мощности гармоник в ЛСЭ.

Смоделирована и изучена генерация гармоник в рентгеновском диапазоне в ЛСЭ LCLS и в UV-A диапазоне в эксперименте LEUTL. Развитая нами теория позволила выделить и проанализировать

вклады каждой составляющей в ОИ. Используя аналитические выражения для спектра и коэффициентов Бесселя, мы показали, что в реальных ЛСЭ гармоники поля ондулятора, расходимость пучка и бетатронные колебания сами не могут вызывать 2-ю гармонику излучения с измеренной в экспериментах мощностью. Причины генерации четных гармоник в разных экспериментах разные. Зарегистрированное в LCLS отклонение траекторий электронов от оси на $\Delta \sim 12$ мкм на длине усиления ЛСЭ $L_g \sim 1.5$ м сравнимо с шириной фотонного пучка. Это приводит к существенным угловым вкладам, учтенным нами аналитически, и вызывает 2-ю гармонику ЛСЭ, а также несколько ослабляет нечетные гармоники. Они расщеплены на субгармоники на расстоянии $\delta\lambda \sim 0.45$ пм, $\delta\lambda/\lambda \approx k/\sqrt{2}\gamma \sim 0.03\%$, полная спектральная ширина линии $\lambda = 1.5$ нм, $\Lambda/\lambda \sim 0.1\%$, сравнима с параметром Пирса: $\rho \sim 1\times10^{-3}$. Электроны пучка взаимодействуют со всеми субгармониками $p = 0, \pm1, \pm2$ в пределах спектрального диапазона. Результаты моделирования очень хорошо описывают мощность гармоник в эксперименте LCLS. В ЛСЭ LEUTL учет расходимости и бетатронных колебаний в широком пучке $\sigma_{x.y} \sim 0.26$ мм дает мощность 2-й гармоники излучения на порядок ниже измеренной. Для объяснения экспериментальных значений мощности 2-й гармоники нами учтен значительный эффективный угол электрон-фотонного взаимодействия $\gamma\bar{\theta} \approx 0.12$ в фотонном пучке размером $\sigma_\gamma \sim 0.2$ мм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 0.9$ м. В результате теоретическая мощность гармоник и спектральная ширина согласуются с экспериментом.

Таким образом, развитая нами теория излучения в ЛСЭ согласуется с экспериментами. Проведенный на ее основе анализ генерации гармоник с использованием явных аналитических выражений позволил учесть, выделить и проанализировать все вклады в генерацию каждой гармоники излучения. Мы выяснили физические причины возникновения гармоник в разных условиях в различных ЛСЭ. Наш аналитический формализм применим к любому ЛСЭ. Он позволяет исследовать и анализировать излучение в работающих и строящихся ЛСЭ и изучать влияние характеристик пучков и поля ондуляторов на ОИ. Это может быть использовано для определения качества пучков и ондуляторов, их юстировки и разработки новых ЛСЭ с заданными характеристиками излучения.

Автор благодарит профессора А. В. Борисова за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McNeil B. W. J., Thompson N. R.* // Nature Photonics. 2010. **4**. P. 814.
2. *Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S.* // Rev. Mod. Phys. 2016. **88**. P. 015006.
3. *Margaritondo G., Ribic P. R.* // J. Synchrotron Rad. 2011. **18**. P. 101.
4. *Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V.* The Physics of Free Electron Lasers, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
5. *Bonifacio R., Pellegrini C., Narducci L.* // Opt. Comm. 1984. **50**. P. 373.
6. *Emma P.* // First lasing of the LCLS X-ray FEL at 1.5 E, TH3PBI01, Proceedings of PAC09, Vancouver, BC, Canada, 2009.
7. *Emma P., Akre R., Arthur J.* et al. // Nature. Photonics. 2010. **4**. P. 641.
8. *Ratner D., Brachmann A., Decker F. J.* et al. // Phys. Rev. ST-AB. 2011. **14**. P. 060701.
9. *Milton S. V., Gluskin E., Arnold N. D.* et al. // Science. 2001. **292**. P. 2037.
10. *Biedron S. G.* et al. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A. 2002. **483**. P. 94.
11. *Henderson J. R.* et al. // New J. Phys. 2016. **18**. P. 062003.
12. *Zhukovsky K.* // J. Optics. 2018. **20**, N 9. P. 095003.
13. *Zhukovsky K.* // Results in Physics. 2019. **13**. P. 102248.
14. *Zhukovsky K.* // J. Synchrotron Rad. 2019. **26**. P. 1481.
15. *Жуковский К. В., Калитенко А. М.* // Изв. вузов. Физика. 2019. **62**, № 2. С. 153.
16. *Жуковский К. В.* // Изв. вузов. Физика. 2019. **62**, № 6. С. 109.
17. *Жуковский К. В.* // ЖТФ. 2019. **89**, № 3. С. 426.
18. *Жуковский К. В., Калитенко А. М.* // ЖТФ. 2020. **90**, № 8. С. 12.
19. *Жуковский К. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2019. № 5. С. 60. (*Zhukovsky K. V.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2019. **74**, N 5. P. 480.)
20. *Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Черенков П. А.* // УФН. 1989. **157**, № 3. С. 389.
21. *Багров В. Г., Бисноватый-Коган Г. С., Бордовицын В. А.* и др. Теория излучения релятивистских частиц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
22. *Винокуров Н. А., Левичев Е. Б.* // УФН. 2015. **185**. С. 917.
23. *Alexeev V. I., Bessonov E. G.* // Nucl. Instr. Meth. A. 1991. **308**. P. 140.
24. *Калитенко А. М., Жуковский К. В.* // ЖЭТФ. 2020. **157**, № 1. С. 1.
25. *Соколов А. А. Жуковский В. Ч., Коровин Ю. А.* // ЖЭТФ. 1966. **51**. С. 1829. (*Sokolov A. A., Zhukovskii V. Ch., Korovin Yu. A.* // J. Exp. Theor. Phys. 1967. **24**, N 6. P. 1233.)
26. *Jeevakhan H., Mishra G.* // Opt.Comm. 2015. **335**. P. 126.
27. *Zhukovsky K.* // J. Electromagn. Waves Appl. 2014. **28**, N 15. P. 1869.
28. *Zhukovsky K.* // Prog. Electromagn. Res. B. 2014. **59**. P. 245.
29. *Gould H. W., Hopper A. T.* // Duke Math. J. 1962. **29**. P. 51.
30. *Madey J. M. J.* // J. Appl. Phys. 1971. **42**. P. 1906.
31. *Zhukovsky K. V.* // J. Math. Anal. Appl. 2017. **446**. P. 628.
32. *Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е.* // ЖЭТФ. 1972. **61**, № 4. С. 1371.
33. *Sokolov A. A., Shishanin O. E.* // Soviet Phys. J. 1972. **15**. P. 225
34. *Bagrov V. G., Khalilov V. R., Sokolov A. A.* et al. // Ann. Phys. 1973. **485**. P. 1.
35. *Prakash B., Huse V., Gehlot M.* et al. // Optik. 2016. **127**. P. 1639.

Analysis of the Influence of Nonperiodic Magnetic Fields and Off-Axis Effects on the Radiation of X-Ray FEL and Other FELs

K. Zhukovsky

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, dept. of theoretical physics. Moscow 119991, Russia. E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

Undulator radiation (UR) in an undulator with field harmonics in two orthogonal planes is theoretically studied taking nonperiodic magnetic components and off-axis effects into account. New analytical expressions for the UR spectrum and UR intensity are written explicitly in terms of the generalized Bessel function and Airy function. In limiting cases, they describe the radiation of a two-frequency planar undulator, a helical undulator, and an elliptical undulator. The influence of the finite size of the electron beam, the emittance, electron beam deflection from the axis, the spread of the electron energy, and the influence of the constant components of the magnetic field are taken into account analytically. The expressions make it possible to distinguish the contributions of each field component and characteristics of the beam and undulator to the generation of UR harmonics. The phenomenological FEL model is used to study the evolution of harmonic power in the FEL experiments of LCLS and LEUTL. The influence of the beam parameters and undulator parameters on the harmonic generation is analyzed. The theoretical results of the power and radiation spectrum of the FEL are in agreement with experiments. It is shown that the second harmonic in the X-ray FEL of LCLS can be due to the beam deflection from the axis by $\sim$12 μm, and the second harmonic in the UV-A FEL of LEUTL is due to wide ($\sim$0.2 mm) beams of electrons and photons.

Keywords: undulator, harmonic generation, magnetic field, free-electron laser.
PACS: 41.60 m, 41.60.Ap, 41.60.Cr.
Received 16 April 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 4. Pp. 285–294.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.