Математическая обработка квантовых изображений в бифотонной схеме методом редукции измерения

Д. А. Балакин,[a] А. В. Белинский[б]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 27.03.2020, после доработки 19.05.2020, принята к публикации 23.05.2020.

На основании математического моделирования процесса формирования парных изображений — фантомного и обыкновенного — в новой схеме с квантовой генерацией бифтонов исследованы возможности повышения точности измерений и создания максимально щадящего режима облучения объекта. Показано, что дифракция и неединичная квантовая эффективность датчиков при обычном формировании фантомных изображений приводят к пропуску части информации, переносимой фотонами в объектном канале. Формирование и регистрация в объектном канале изображения исследуемого объекта позволяет ослабить влияние на результат измерений этих факторов при использовании для обработки пары полученных изображений разработанного варианта метода редукции измерения к виду, свойственному измерениям распределения прозрачности объекта.

Ключевые слова: редукция измерения, фантомные изображения, мультиплексирование, обработка изображений.
УДК: 519.25. PACS: 07.05.Pj, 42.50.Ex.

ВВЕДЕНИЕ

Фантомные изображения [1–4] — один из вариантов решения проблемы изучения чувствительных к свету объектов, прямое оптическое наблюдение которых затруднено. Для формирования фантомных изображений необходим источник коррелированных световых пучков, один из которых взаимодействует с объектом, а другой — нет (см. рис. 1, *а*). При этом в объектном канале детектор дает информацию только о полной интенсивности прошедшего излучения. Сопряженный пучок не взаимодействует с объектом, но регистрируется ПЗС-матрицей, допуская измерение пространственной корреляционной функции интенсивности между двумя каналами.

Одним из важных доводов в пользу использования квантовых фантомных изображений является создание максимально щадящих условий освещения исследуемого объекта, когда воздействие излучения на объект (иногда необратимое) минимально [5, 6]. Особенно это важно при облучении живых существ, например рентгеновским излучением.

Дифракция фотонов в объектном канале и в восстанавливающем канале происходит независимо, причем при соответствующих друг другу условиях регистрации фантомное изображение в большей степени, чем обычное, размыто вследствие дифракции [7–9]. Кроме того, если для обычных изображений требуется лишь регистрация взаимодействовавшего с объектом фотона, при формировании фантомных изображений необходима регистрация пары фотонов, т. е. среднее число зарегистрированных фотонов пропорционально квадрату квантовой эффективности датчиков, если она одинакова у всех датчиков.

Из этих соображений следует, что фотоны в объектном канале несут информацию, которая не регистрируется при обычном получении фантомных изображений. Мы предлагаем [10] новое схемное решение (см. рис. 1, *б*) для извлечения этой информации. В объектном канале вместо интегрирующего детектора (как в обычной схеме формирования фантомных изображений) используется матрица фотоприемников, на которой строится обыкновенное изображение исследуемого объекта с помощью оптического объектива. Таким образом, регистрируются два изображения: фантомное и обычное. Первое, фантомное, имеет за счет использования схемы совпадений низкий уровень шума, связанного с «посторонними» причинами (шумовыми фотонами и т. д.), но по указанной выше причине сформировано относительно небольшим числом фотонов, что приводит как к относительно низкой яркости, так и к относительно высокому уровню шума фотоотсчетов и шума, связанного со случайностью срабатывания детекторов, а также оно в большей степени размыто вследствие дифракции. Второе, обычное, напротив, в полном объеме содержит шум, обусловленный «посторонними» причинами, но более ярко, и у него относительно ниже уровень шума фотоотсчетов и шума из-за случайности срабатывания детекторов, а также оно слабее размыто из-за дифракции.

Компьютерная обработка полученной пары изображений с помощью математического метода редукции измерения и реализующих его алгоритмов дает возможность снизить минимально требуемое число фотонов, пронизывающих объект, и повысить качество изображения.

1. МЕТОД РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЯ

1.1. Общие положения

При освещении объекта минимальным числом фотонов требуется, чтобы математические методы и алгоритмы обработки измерений не только обеспечивали минимальную погрешность, но и давали возможность использовать всю доступную исследователю информацию об объекте. Это позволяют сделать математический метод редукции измерения и реализующие его алгоритмы.

[a] E-mail: balakin_d_a@phys.msu.ru
[б] E-mail: belinsky@phys.msu.ru

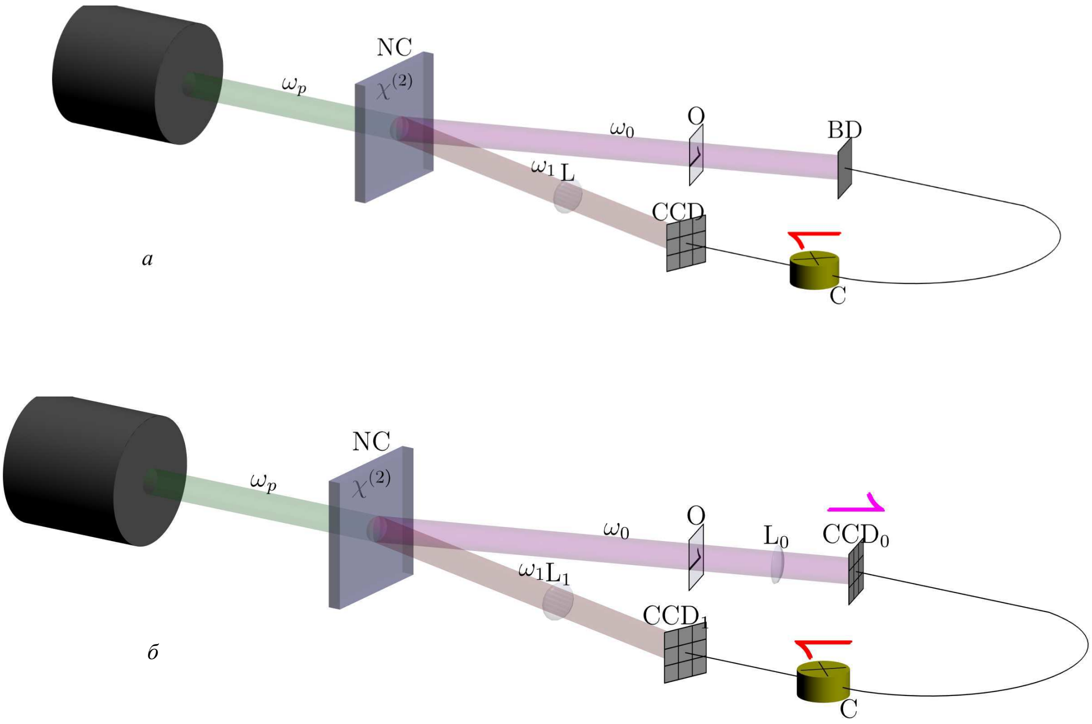


Рис. 1. а — Классическая схема формирования фантомных изображений: NC — нелинейный кристалл; ω_p — накачка; ω_1 и ω_2 — пучки запутанных пар фотонов (пучки расходятся вследствие использования неколлинеарного процесса параметрического рассеяния); O — объект; BD — интегрирующий детектор в объектном канале; L — собирающая линза; CCD — матрица фотодетекторов в восстанавливающем канале; C — коррелятор интенсивностей. *б* — Предлагаемая схема формирования пары квантовых изображений. NC — нелинейный кристалл; ω_p — накачка; ω_1 и ω_2 — пучки запутанных пар фотонов (пучки расходятся вследствие использования неколлинеарного процесса); O — объект, распределение прозрачностей которого обозначено символом $\rightharpoonup$; L_0, L_1 — оптические объективы; CCD_0, CCD_1 — матрицы фотодетекторов в объектном и восстанавливающем каналах; C — коррелятор интенсивностей

Рассмотрим типичную схему измерений, в которой на входе измерительного преобразователя (ИП) формируется измеряемый сигнал f, принадлежащий евклидову пространству $\mathcal{F}$ (см. [11]). ИП преобразует f в принадлежащий евклидову пространству $\mathcal{X}$ сигнал

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

которым в рассматриваемом случае является пара полученных изображений. В (1) $A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ — оператор, моделирующий физические процессы в ИП, определяющие преобразование f в сигнал Af, и далее также обозначающий моделируемый им ИП, ν — погрешность, шум измерения. Результат измерения зависит от характеристик измеряемого объекта, взаимодействующего с ИП и искаженного измерением, а исследователя, как правило, интересуют характеристики объекта, не возмущённого измерением. Их связь моделируется идеальным ИП, заданным оператором $U\colon \mathcal{F} \to \mathcal{U}$, на вход которого поступает тот же сигнал, что и на вход ИП A, но на его выходе сигнал Uf равен интересующей исследователя характеристике объекта исследования. Иными словами, оператор U моделирует регистрацию идеальным (для исследователя) измерительным прибором. Задача редукции состоит в нахождении оператора редукции R_*, для которого $R_*\xi$ наиболее точно оценивает Uf. Если в (1) f — априори произвольный вектор, ν — случайный вектор, принимающий значения в $\mathcal{X}$, имеющий математическое ожидание $\mathbb{E}\nu = 0$ и невырожденный ковариационный оператор Σ_ν: $\forall x \in \mathcal{X}\ \Sigma_\nu x = \mathbb{E}\nu(x,\nu)$, то линейный оператор редукции $R_*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ определяется как минимизирующий максимальную по f среднеквадратичную (с. к.) погрешность интерпретации $R\xi$ как Uf:

$$h(R; U, A, \Sigma_\nu) = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|R\xi - Uf\|^2.$$

Эта погрешность минимальна [11] при

$$R_* = U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}A^*\Sigma_\nu^{-1}, \tag{2}$$

равна

$$h(R_*, U) = \operatorname{tr} U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}U^*, \tag{3}$$

если $U(I - A^-A) = 0$, и равна бесконечности в противном случае. Здесь «$^-$» обозначает операцию псевдообращения.

1.2. Дополнительная информация об объекте и ее использование

Пусть исследователя интересует распределение прозрачности объекта. Значения прозрачностей пикселей принадлежат единичному отрезку, то есть $Uf \in \mathcal{U}_{\rm pr} \overset{\rm def}{=} [0,1]^{\dim\mathcal{U}}$. Это позволяет улучшить оценку линейной редукции (2) следующим образом [12–14]: уточненная оценка определяется как неподвижная точка отображения $\hat{u} \mapsto \Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}\left(\widetilde{R}\begin{pmatrix}\xi\\ \hat{u}\end{pmatrix}\right)$, где $\widetilde{R}$ — оператор линейной несмещённой редукции измерения на ИП

$\begin{pmatrix} A \\ U \end{pmatrix}$ при шуме, ковариационный оператор которого $\begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 \\ 0 & \Sigma_{R_*\nu} \end{pmatrix}$, $\Sigma_{R_*\nu} = R_* \Sigma_\nu R_*^*$, $\Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{v' \in \mathcal{U}_{\text{pr}}} (v' - v, \Sigma_{R_*\xi}^{-1}(v' - v))$. Иными словами, это отображение комбинирует результат линейной редукции $R_*\xi$ и некоторую оценку интересующей исследователя характеристики $\hat{u}$ как некоррелированные результаты «основного» и фиктивного измерений. Затем выполняется проецирование на $[0,1]^{\dim \mathcal{U}}$ при минимизации расстояния Махаланобиса $\|\Sigma_{R_*\xi}^{-1/2} \cdot\|$, связанного с ковариационным оператором $\Sigma_{R_*\xi} = U(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}U^*$ оценки линейной редукции. Для вычисления оценки используется метод простой итерации, то есть оценка вычисляется с помощью рекуррентного процесса $\hat{u}_{i+1} = \Pi_{\Sigma_{R_*\xi}} \left(\widetilde{R}_{\Sigma_{R_*\xi}} \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{u}_i \end{pmatrix} \right)$, $i = 0, 1, \ldots$, где начальное приближение $\hat{u}_0 = \Pi_{\Sigma_{R_*\xi}}(R_*\xi)$ — проекция результата линейной несмещенной редукции на множество $\mathcal{U}_{\text{pr}}$ возможных значений характеристики. Итерации продолжаются, пока отличие $\hat{u}_{i+1}$ и $\hat{u}_i$ не станет достаточно малым. Сходимость следует из того, что указанное отображение является сжимающим.

Кроме того, пусть исследователь полагает, что прозрачности соседних пикселей, как правило, отличаются слабо. Эта информация часто формализуется [15–20] *разреженностью* распределения прозрачности как вектора Uf в заданном базисе, характеризуемом линейным преобразованием T из «естественного» базиса, т. е. как информация, что в этом базисе значительная часть компонент вектора Uf равна нулю. В [21, 22] предложен алгоритм редукции, позволяющий исследователю учесть такую информацию при обработке мультиплексированных квантовых фантомных изображений. Алгоритм основан на проверке статистических гипотез о равенстве компонент оценки $\hat{u}$ в выбранном базисе нулю (альтернатива — неравенство). Его результат $\hat{u}_{\text{thr}}$ зависит от параметра алгоритма τ, монотонно связанного с максимальной вероятностью отклонить гипотезу, если она верна (вероятностью ошибки первого рода). Выбор этого параметра определяется приемлемым для исследователя компромиссом между подавлением шума и искажением изображения.

Как правило, при обработке фантомных изображений методами сжатых измерений в качестве преобразования, результат применения которого к распределению прозрачностей объекта исследования разрежен, используется дискретное косинусное преобразование (DCT) [15–17]. В работе [23] рассмотрены применения различных преобразований (тождественного преобразования, дискретного вейвлет-преобразования, DCT) и показано преимущество в ряде ситуаций DCT. Тем не менее представляется, что преобразование Хаара может быть предпочтительно в случае распределения прозрачностей, содержащего области слабо изменяющихся прозрачностей с резкими границами, если эти области имеют большие размеры по сравнению с разрешением идеального измерительного преобразователя, а исследователю важно установить положение этих границ. В [22] приведены примеры изображений, для которых это так, и применение преобразования Хаара приводит к лучшим результатам. В связи с выбором базиса также необходимо отметить выбор в качестве базисных функций собственных функций оптической системы [24, 25], приводящий при подходящем Σ_ν к результатам, аналогичным отбору наименее пораженных шумом компонент в собственном базисе измерительно-вычислительного преобразователя (см. [11, § 8.1]).

1.3. Влияние недиагональных элементов ковариационного оператора оценки редукции

При применении предложенного в [21, 22] алгоритма для проверке статистических гипотез о равенстве нулю i-й компоненты $(T\hat{u})_i$ оценки $\hat{u}$ в выбранном для формализации информации о разреженности базисе имел вид

$$|(T\hat{u})_i| < \tau \sqrt{(T\Sigma_{R_*\xi}T^*)_{ii}}. \tag{4}$$

В случае выполнения критерия для i-й компоненты полагалось $(T\hat{u}_{\text{thr}})_i = 0$, а в противном случае — $(T\hat{u}_{\text{thr}})_i = (T\hat{u})_i$. Видно, что в критерии (4) никак не используются недиагональные элементы ковариационного оператора $T\Sigma_{R_*\xi}T^*$. В связи с этим ранее в [22] был поставлен вопрос об использовании недиагональных элементов, чтобы улучшить качество интерпретации. Знание лишь оценки $\hat{u}$ и ковариационного оператора $\Sigma_{R_*\xi}$ сужает класс доступных критериев до критериев вида

$$\|SCT\hat{u}\|^2 < \tau^2 \operatorname{tr} SCT\Sigma_{R_*\xi}T^*C^*S^*, \tag{5}$$

где линейный оператор $C\colon \mathcal{U} \to \mathcal{R}^n$ описывает выбор $n \leqslant \dim \mathcal{U}$ компонент, для которых проверяется гипотеза ($C_{ij} = 1$, если j-я компонента входит в набор проверяемых компонент как его i-й элемент, иначе $C_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, \dim \mathcal{U}$). Отличие ранга C от максимального, n, означает существование компонент изображения, не влияющих на принятие или отклонение гипотезы. Поэтому задача выбора компонент тогда сводится к выбору C, ранг которого (совпадающий с числом единичных матричных элементов) максимален при выполнении условия (5). Линейный оператор $S\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ является параметром критерия, который может зависеть от C, T, $\Sigma_{R_*\xi}$, но не от $\hat{u}$ и который целесообразно выбрать для максимизации числа компонент, для которых условие (5) выполняется. S должен быть невырожденным: если $St = 0$, то изображение $T^{-1}C^-t$ будет при формировании $\hat{u}_{\text{thr}}$ заменено на нулевое вне зависимости от уровня шума, что, очевидно, неприемлемо. Критерий (4) соответствует выбору $S = I$ с точностью до конкретного значения τ, поскольку теперь проверяется гипотеза о наборе компонент.

Теорема. Если ковариационный оператор Σ_ν невырожден, то оптимальный оператор S в критерии (5) равен $(CT\Sigma_\nu T^*C^*)^{-1/2}$. При этом критерий принимает вид

$$((CT\Sigma_{R_*\xi}T^*C^*)^{-1}CT\hat{u}, CT\hat{u}) < n\tau^2.$$

Доказательство. Обозначим $H = CT\Sigma_{R_*\xi}T^*C^*$, $v = CT\hat{u}$. В этих обозначениях условие (5) принимает вид $\|Sv\|^2/\operatorname{tr} SHS^* < \tau^2$. H невырожден, поскольку в противном случае существует такой $t \in \mathcal{R}^n$, что $Ht = 0$, что невозможно, так как $0 = (t, Ht) = (t, CT\Sigma_{R_*\xi}T^*C^*t) = (T^*C^*t, \Sigma_{R_*\xi}T^*C^*t) = \|\Sigma^{1/2}_{R_*\xi}T^*C^*t\|^2$ и T^*C^*t принадлежит ядру $\Sigma^{1/2}_{R_*\xi}$, что противоречит условию. Поэтому без ограничения общности можно положить $S = QH^{-1/2}$, $w = H^{1/2}v$ и преобразовать условие к виду $\|Qw\|^2/\operatorname{tr} QQ^* < \tau^2$. Обозначим $0 < q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_n$ сингулярные числа оператора Q. Поскольку $\operatorname{tr} QQ^* = \sum_{i=1}^n q_i^2$, отношение $\|Qw\|^2/\operatorname{tr} QQ^*$ минимально, если w кратен правому сингулярному вектору, соответствующему q_1. Поскольку S не может зависеть от q, все прочие сингулярные векторы также должны быть кратны q_1, откуда Q кратен единичному оператору. Поскольку критерий (5) не изменяется при умножении S на произвольное ненулевое число, можно положить $Q = I$ и, следовательно, $S = H^{-1/2}$. При этом $\operatorname{tr} SHS^* = \operatorname{tr} H^{-1/2}HH^{-1/2} = n$. □

2. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА СХЕМУ ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть ПЗС-матрица в объектном канале моделируется оператором A_0, а в восстанавливающем канале — A_1. При единичной квантовой эффективности детекторов в объектном и восстанавливающем каналах, если не учитывать дифракцию, схема измерения (1) принимает вид

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} nf + \begin{pmatrix} \nu_{\text{img}} + \nu_\epsilon \\ \nu_{\text{img}} \end{pmatrix},$$

где ξ_0 — результат измерений ПЗС-матрицы в объектном канале, ξ_1 — результат измерения сформированного квантового фантомного изображения, ν_{img} — часть погрешности, обусловленная регистрацией квантовых изображений, ν_ϵ — часть погрешности квантового изображения, сформированного в объектном канале, обусловленная шумовыми фотонами, n — среднее число освещающих объект фотонов. Ковариационный оператор погрешности имеет вид

$$\Sigma_\nu = \begin{pmatrix} A_0S(f)A_0^* + \Sigma_{\nu_\epsilon} & A_0S(f)A_1^* \\ A_1S(f)A_0^* & A_1S(f)A_1^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где оператор $S(f)$ определяется дисперсиями и ковариациями фотоотсчетов, а также единицей измерения показаний датчиков. Например, если статистика фотоотсчетов — пуассоновская, измерения датчиков соответствуют числу фотоотсчетов, то $S(f) = n \operatorname{diag}(f)$. Здесь и далее $\operatorname{diag}(q)$ — матрица, диагональные элементы которой равны соответствующим компонентам q, а остальные — нулю. В этом случае регистрация пространственного распределения интенсивности излучения в объектном канале не позволяет улучшить качество редукции (результат этого измерения не влияет на результат редукции).

2.1. Влияние квантовой эффективности детекторов на схему измерения

При эффективности детектора в объектном канале, равной η_0, и эффективности детектора в восстанавливающем канале, равной η_1, схема измерения принимает вид

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 A_0 \\ \eta_0\eta_1 A_1 \end{pmatrix} nf + \begin{pmatrix} \nu_{\text{img}} + \nu_0 + \nu_\epsilon \\ \nu_{\text{img}} + \nu_0 + \nu_1 \end{pmatrix}.$$

Ковариационный оператор погрешности в этом случае имеет вид

$$\Sigma_\nu = \begin{pmatrix} \eta_0^2 A_0S(f)A_0^* & \eta_0^2\eta_1 A_0S(f)A_1^* \\ A_1S(f)A_0^* & \eta_0^2\eta_1^2 A_1S(f)A_1^* \end{pmatrix} + \\ + \eta_0^2 \begin{pmatrix} \Sigma_{\nu_\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_0(1-\eta_0)\operatorname{diag}(A_0f) & \eta_0(1-\eta_0)\eta_1 \operatorname{diag}(A_0f)A_0^{-*}A_1^* \\ \eta_0(1-\eta_0)\eta_1 A_1A_0^- \operatorname{diag}(A_0f) & \eta_0\eta_1(1-\eta_0\eta_1)\operatorname{diag}(A_1f) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Поскольку оператор линейной редукции имеет вид (2), а погрешность оценки редукции при отсутствии дополнительной информации равна (3), то, если матрицы ПЗС в каналах одинаковы ($A_1 = A_0$), выигрыш погрешности, обусловленный регистрацией изображения в объектном канале, равен

$$\eta_0^{-2} \operatorname{tr} U\Bigg(\eta_0\eta_1^{-1}\Big(A_0^*\big(\eta_0\eta_1 A_0S(f)A_0^* + \\ + (1-\eta_0\eta_1)\operatorname{diag}(A_0f)\big)^{-1}A_0\Big)^{-1} - \\ - \left(\begin{pmatrix} A_0^* & \eta_1 A_0^* \end{pmatrix} \Sigma_\nu^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ \eta_1 A_0 \end{pmatrix}\right)^{-1}\Bigg)U^*,$$

в котором оператор Σ_ν определен выражением (7). Выигрыш по среднему числу фотонов Δn — решение уравнения $h_{\text{obj}}(n) = h_{\text{obj+gi}}(n - \Delta n)$ относительно Δn, в котором $h_{\text{obj}}(n)$ — погрешность результата редукции (при отсутствии априорной информации определяемая выражением (3)) измерения только фантомного изображения в традиционной схеме при среднем числе фотонов n, а $h_{\text{obj+gi}}(n - \Delta n)$ — погрешность результата редукции измерения пары изображений при среднем числе фотонов $n - \Delta n$.

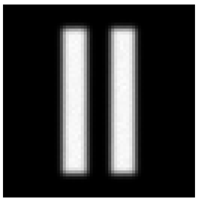
2.2. Влияние дифракции

Обозначим D_i линейный оператор типа свертки, определенный *средним* размытием изображения вследствие дифракции, который преобразует распределение прозрачности объекта f в D_if — результат дифракции на этом объекте. Например, в описанном в [7] случае гауссовых пучков D_i есть оператор гауссова размытия. Индекс i оператора указывает, относится ли оператор к изображению, формируемому в объектном канале ($i = 0$), или к фантомному изображению ($i = 1$). Следовательно, схема измерений принимает вид

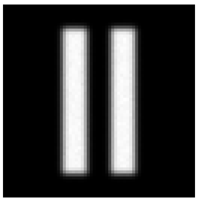
$$\xi = \begin{pmatrix} A_0D_0 \\ A_1D_1 \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu_{\text{img}} + \nu_\epsilon + \nu_{\text{diff},0} \\ \nu_{\text{img}} + \nu_{\text{diff},1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку фотоны в объектном канале и в восстанавливающем канале дифрагируют независимо, общая погрешность имеет ковариационные операторы

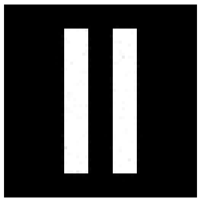
$$\Sigma_\nu = \begin{pmatrix} A_0S(D_0f)A_0^* + \Sigma_{\nu_\epsilon} & A_0D_0S(f)D_1^*A_1^* \\ A_1D_1S(f)D_0^*A_0^* & A_1S(D_1f)A_1^* \end{pmatrix},$$



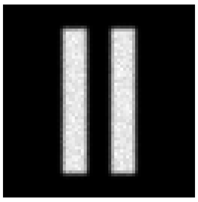
а – Изображение в объектном канале



б – Фантомное изображение



в – Результат редукции, $\chi \approx 0.1$



г – Изображение, сформированное совпадающими фотоотсчетами, $\chi \approx 36$

Рис. 2. Квантовые изображения объекта (рис. 4, *а*): *а* — изображение, зарегистрированное в объектном канале, *б* — фантомное изображение, *в* — результат их редукции и *г* — изображение, сформированное только фотоотсчетами соответствующих друг другу детекторов. Освещение в среднем 10^4 фотонами на пиксель, размер датчиков — 1 пиксель. Приведены значения $\chi = \|u - \hat{u}\|^2$ — квадратов норм отклонений оценок от оцениваемого распределения прозрачностей

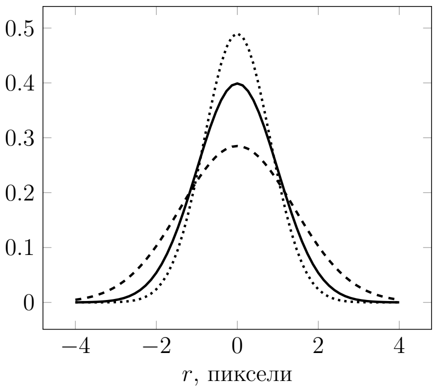


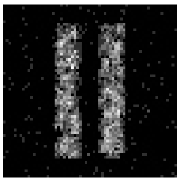
Рис. 3. Радиальная компонента составляющей аппаратной функции, обусловленной дифракцией, для изображения в объектном канале (сплошная линия) и фантомного изображения (пунктир) и их произведение (точечный пунктир), определяющее формирование изображения только фотоотсчетами соответствующих друг другу детекторов. Ширина составляющей аппаратной функции, описывающей дифракцию в объектном канале, — 1 пиксель, ширина составляющей аппаратной функции, описывающей дифракцию фантомного изображения, — 1.4 пикселя

отличающиеся от (6) присутствием описывающих дифракцию операторов D_0 и D_1 в соответствующих блоках.

Заметим, что влияние дифракции на результаты измерений может быть ослаблено и следующим методом, более простым, чем метод редукции измерения. Для его применения требуется единственность моды дифракционного отклонения фотонов и ее совпадение с математическим ожиданием отклонения. Желательно также отсутствие локальных максимумов, кроме центрального, т. е. монотонное убывание аппаратной функции, обусловленной дифракцией, при движении от центра (оптической оси) к периферии при любом направлении движения, поскольку боковые локальные максимумы снижают эффективность метода. Это выполняется в случае гауссовой апертуры или гауссовой структуры световых пучков. Пусть при регистрации фантомного изображения отбрасываются фотоотсчеты, при которых в объектном канале соответствующий фотон был зарегистрирован несоответствующим детектором. Поскольку наиболее вероятны малые отклонения точек попаданий фотонов в детекторы от их средних положений, а дифракционные отклонения фотонов в объектном и восстанавливающем каналах независимы, то при размере датчиков 1 пиксель аппаратная функция, определяющая формирование такого изображения, оказывается квадратом обычной аппаратной функции, благодаря чему влияние дифракции оказывается ослабленным, (см. рис. 3). Пример такой регистрации показан на рис. 2. Преимущества этого метода — его простота и независимость от аппаратной функции (вид аппаратной функции не используется и, следовательно, может быть неизвестен). Вместе с тем повышение пространственного разрешения достигается за счет увеличения требуемого числа фотонов (чем больше вызванный дифракцией разброс точек, в которых фотоны регистрируются датчиками, по отношению к размеру датчика, тем большее число фотонов требуется), а полное подавление влияния дифракции невозможно даже при сколь угодно большом числе освещающих фотонов и отсутствии посторонних шумов. Ср. рис. 2, *в* и *г*, где метод редукции изображения позволяет синтезировать оценку (ценой некоторого увеличения погрешности), на которой влияние дифракции устранено, а вышеописанный метод позволяет лишь ослабить размытие, связанное с дифракцией.

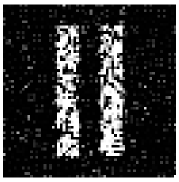
Эффективность по числу фотонов вышеописанного метода равна $\sum\limits_j (A_0 D_0)_{ji} (A_1 D_1)_{ji}$, если показания датчиков измеряются «в фотонах», то есть соответствуют числу фотоотсчетов. Индекс i, по которому

а – Распределение прозрачности объекта исследования *u*
$\| u \|^2 = 768$

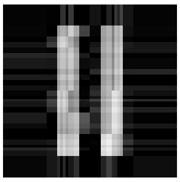


б – Изображение, полученное матрицей в объектном канале

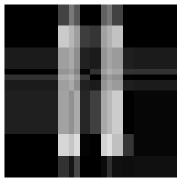
в – Фантомное изображение (ФИ)



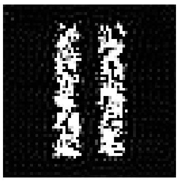
г – Редукция без информации о разреженности,
$\chi \approx 266$



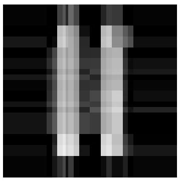
д – Редукция при информации о разреженности,
$\tau = 0.1$, $\chi \approx 133$



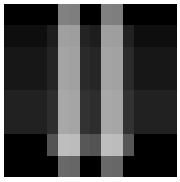
е – Редукция при информации о разреженности,
$\tau = 0.2$, $\chi \approx 161$



ж – Редукция ФИ без информации о разреженности,
$\chi \approx 290$



з – Редукция ФИ при информации о разреженности,
$\tau = 0.1$, $\chi \approx 142$



и – Редукция ФИ при информации о разреженности,
$\tau = 0.2$, $\chi \approx 206$

Рис. 4. Квантовые изображения объекта (*а*), 64×64 пикселя: *б* — изображение, зарегистрированное в объектном канале, *в* — фантомное изображение и результаты их обработки методом редукции: обработка обоих изображений (*г*) без использования информации о разреженности и (*д*, *е*) при наличии такой информации для двух значений параметра алгоритма τ; (*ж*–*и*) обработка только фантомного изображения теми же методами

не производится суммирование, характеризует пиксель объекта, с которым взаимодействуют рассматриваемые фотоны в объектном канале. Зависимость от него обусловлена тем, что условия регистрации, вообще говоря, различны в центре апертуры и на ее краю. Среднее по i значение эффективности равно $(A_0 D_0, A_1 D_1)/\dim \mathcal{F}$, где скалярное произведение операторов — скалярное произведение Гильберта–Шмидта, а размерность $\dim \mathcal{F}$ пространства $\mathcal{F}$, как говорилось выше, равна числу пикселей объекта исследования.

В заключении раздела отметим, что при учете как неединичной квантовой эффективности датчиков, так и дифракции схема измерения принимает вид

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 A_0 D_0 \\ \eta_0 \eta_1 A_1 D_1 \end{pmatrix} n f + \\ + \begin{pmatrix} \nu_{\text{img}} + \nu_0 + \nu_\epsilon + \nu_{\text{diff},0} \\ \nu_{\text{img}} + \nu_0 + \nu_1 + \nu_{\text{diff},1} \end{pmatrix},$$

а ковариационный оператор погрешности —

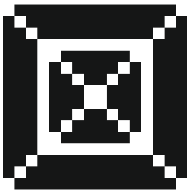
$$\Sigma_\nu = \begin{pmatrix} \eta_0^2 A_0 S(D_0 f) A_0^* & \eta_0^2 \eta_1 A_0 D_0 S(f) D_1^* A_1^* \\ A_1 D_1 S(f) D_0^* A_0^* & \eta_0^2 \eta_1^2 A_1 S(D_1 f) A_1^* \end{pmatrix} + \\ + \eta_0^2 \begin{pmatrix} \Sigma_{\nu_\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_0(1-\eta_0)\operatorname{diag}(A_0 D_0 f) & \eta_0(1-\eta_0)\eta_1 \operatorname{diag}(A_0 D_0 f) A_0^{-*} A_1^* \\ \eta_0(1-\eta_0)\eta_1 A_1 A_0^- \operatorname{diag}(A_0 D_0 f) & \eta_0\eta_1(1-\eta_0\eta_1)\operatorname{diag}(A_1 D_1 f)) \end{pmatrix}.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

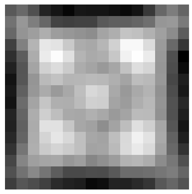
3.1. Моделирование неединичной квантовой эффективности детекторов

На рис. 4 показаны результаты компьютерного моделирования и последующей обработки квантовых изображений методом редукции измерения при помощи описанного в [21, 22] алгоритма. При моделировании предполагалось, что в обоих каналах расположены одинаковые матрицы, датчики в которых имеют размер, втрое превышающий размер пикселя объекта, каждый пиксель объекта освещается в среднем 1 фотоном, среднее количество шумовых фотонов, не взаимодействующих с объектом, но попадающих на матрицу в объектном канале, — 0.1 фотон на пиксель объекта, а квантовые эффективности датчиков в объектном канале и в восстанавливающем канале равны 0.4.

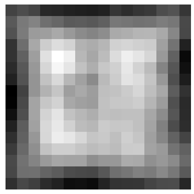
Как отмечалось выше, параметр алгоритма τ отражает приемлемый для исследователя компромисс



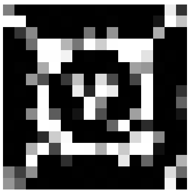
а – Распределение прозрачности объекта исследования *u* $\| u \|^2 = 64$



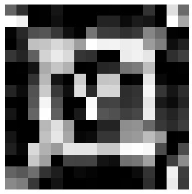
б – Изображение, полученное матрицей детекторов в объектном канале



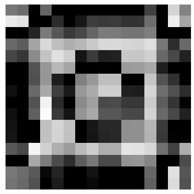
в – Фантомное изображение (ФИ)



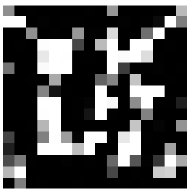
г – Редукция без информации о разреженности, $\chi \approx 31.3$



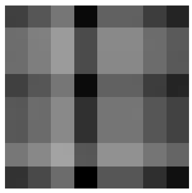
д – Редукция ФИ при информации о разреженности, $\tau = 0.005$, $\chi \approx 25.9$



е – Редукция ФИ при информации о разреженности, $\tau = 0.01$, $\chi \approx 26.7$



ж – Редукция ФИ без информации о разреженности, $\chi \approx 47.8$



з – Редукция ФИ при информации о разреженности, $\tau = 0.005$, $\chi \approx 47.7$

и – Редукция ФИ при информации о разреженности, $\tau = 0.01$, $\chi \approx 47.6$

Рис. 5. Квантовые изображения объекта (*а*), 32×32 пикселя: *б* — изображение, зарегистрированное в объектном канале, *в* — фантомное изображение и результаты их обработки методом редукции: обработка обоих изображений (*г*) без использования информации о разреженности и (*д, е*) при наличии такой информации для двух значений параметра алгоритма τ; (*ж–и*) обработка только фантомного изображения теми же методами

между подавлением шума и искажением изображения. Чем больше значение τ, тем в большей степени подавляется шум, но при этом также постепенно усиливается искажение деталей изображения (ср., например, рис. 4, *з* и 4, *и*, где при увеличении τ происходит размытие изображения щели). Значение $\tau = 0$ соответствует как отсутствию связанного с использованием информации о разреженности распределения прозрачности дополнительного подавления шума, так и неискажению изображения, т. е. оно эквивалентно отсутствию информации о разреженности распределения прозрачности объекта. Значения τ, использованные на рис. 4, выбраны так, чтобы на рис. 4, *д* искажения были бы еще не заметны, а на рис. 4, *е* — уже заметны.

Уровень шума оценки, построенной только по фантомному изображению, больше, чем построенной по обоим изображениям. Поэтому размытие при одинаковых значениях параметра алгоритма τ, отвечающего за баланс между размытием важных деталей изображения и подавлением шума, больше для оценки, построенной только по фантомному изображению.

Наконец, локализация шума, обусловленного использованием полученного в объектном канале изображения, отличается от локализации шума, связанного с неединичной эффективностью детекторов. В то время как распределение по площади изображения шума, связанного с шумовыми фотонами, как правило, не зависит от объекта, распределение по площади изображения шума, связанного с неэффективностью детекторов, напрямую от него зависит, так как чем больше фотонов попадает на датчик, тем больше дисперсия числа его срабатываний. Поэтому изменение параметра τ по-разному влияет на искажение деталей изображения, расположенных в областях с различной средней яркостью.

3.2. Моделирование влияния дифракции

На рис. 5 показаны результаты компьютерного моделирования формирования пары изображений с учетом дифракции и последующей обработки как пары изображений, так и только фантомного изображения. В отличие от предыдущего раздела, каждый пиксель объекта освещается в среднем 30 фотонами, среднее количество шумовых фотонов, не взаимодействующих с объектом, но попадающих на матрицу в объектном канале, — 3 фотона на пиксель объекта, квантовые эффективности датчиков единичны (чтобы исследовать дифракционные эффекты в чистом виде), ширина составляющей аппаратной функции, описывающей дифракцию в объектном канале, — 1 пиксель, ширина составляющей аппаратной функции, описывающей дифракцию фантомного изображения, — 1.4 пикселя.

Видно, что при обработке только фантомного изображения результат либо сильно зашумлен (рис. 5, *ж*), либо сильно размыт (рис. 5, *з, и*). Напротив, результаты обработки пары изображений содержат основные детали изображения объекта, а использование информации о разреженности позволило несколько улучшить передачу диагональных линий (рис. 5, *е*).

Основной причиной большего, чем в случае неединичной эффективности датчиков, влияния регистрации дополнительного изображения в объектном канале, является независимость вызванных дифракцией отклонений фотонов в объектном и восстанавливающем каналах. Обусловленные же неединичной эффективностью датчиков шумы фантомного изображения и изображения, зарегистрированного в объектном канале, имеют существенно положительную корреляцию (пропуск фотона в объектном канале влечет отбрасывание соответствующего фотона в восстанавливающем канале), что уменьшает информативность дополнительного изображения.

В заключении раздела отметим, что небольшой размер области, попадание фотона в которую приводит к срабатыванию конкретного датчика, по сравнению с размерами изображения, приводит в рассмотренном в разд. 3.1 случае к разреженности оператора A, что позволяет ускорить вычисления, особенно в случае применения итеративных, а не прямых методов решения систем линейных уравнений для вычисления результата редукции. К сожалению, к случаю, рассмотренному в этом разделе, это не относится: дифракция приводит к тому, что возможно произвольное отклонение фотона (пусть и с малой вероятностью), из-за чего оператор A не является разреженным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненное математическое и компьютерное моделирование показало, что учет дополнительных факторов (дифракции и неединичной квантовой эффективности датчиков) при формировании фантомных изображений приводит к пропуску части информации. Формирование и регистрация дополнительного изображения в объектном канале позволяет получить дополнительную информацию, а затем использовать ее при обработке фантомного изображения, в частности методом редукции измерения, к виду, свойственному измерениям оптических характеристик объекта, для уменьшения погрешности формируемой оценки. Это позволяет совместить преимущества обычных и фантомных изображений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belinskii A. V., Klyshko D. N.* // J. Exp. Theor. Phys. 1994. **78**, N 3. P. 259.
2. *Pittman T. B., Shih Y. H., Strekalov D. V., Sergienko A. V.* // Physical Review A. 1995. **52**, N 5. P. R3429.
3. *Strekalov D. V., Sergienko A. V., Klyshko D. N., Shih Y. H.* // Physical Review Letters. 1995. **74**, N 18. P. 3600.
4. *Shapiro J. H., Boyd R. W.* // Quantum Inf. Process. 2012. **11**, N 4. P. 949.
5. Квантовое изображение. Под ред. М. К. Колобова. Пер. под ред. А. С. Чиркина. М., 2009. (Quantum imaging. Ed. by M. I. Kolobov. 2007.)
6. *Basset M. G., Setzpfandt F., Steinlechner F.* et al. // Laser & Photonics Reviews. 2019. **13**, N 10. P. 1900097.
7. *Белинский А. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 5. С. 3. (*Belinsky A. V.* // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 5. P. 447.)
8. *Moreau P.-A., Morris P. A., Toninelli E.* et al. // Scientific Reports. 2018. **8**, N 1. P. 13183.
9. *Moreau P.-A., Toninelli E., Morris P. A.* et al. // Optics Express. 2018. **26**, N 6. P. 7528.
10. *Балакин Д. А., Белинский А. В.* // Квантовая электроника. 2019. **49**, № 10. С. 967. (*Balakin D. A., Belinsky A. V.* // Quantum Electronics. 2019. **49**, N 10. P. 967.)
11. *Пытьев Ю. П.* Методы математического моделирования измерительно–вычислительных систем. 3 изд. М., 2012.
12. *Балакин Д. А., Пытьев Ю. П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 2. С. 3. (*Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P.* // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, N 2. P. 101.)
13. *Балакин Д. А., Пытьев Ю. П.* // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2018. № 5. С. 1850301.
14. *Балакин Д. А., Белинский А. В., Чиркин А. С.* // ЖЭТФ. 2017. **152**, № 2. С. 252. (*Balakin D. A., Belinsky A. V., Chirkin A. S.* // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2017. **125**, N 2. P. 210.)
15. *Morris P. A., Aspden R. S., Bell J. E. C.* et al. // Nat. Commun. 2015. **6**. P. 5913.
16. *Shi X., Huang X., Nan S.* et al. // Laser Phys. Lett. 2018. **15**, N 4. P. 045204.
17. *Gong W., Han S.* // Sci. Rep. 2015. **5**, N 1. P. 9280.
18. *Zerom P., Chan K. W. C., Howell J. C., Boyd R. W.* // Phys. Rev. A. 2011. **84**, N 6. P. 061804.
19. *Katz O., Bromberg Y., Silberberg Y.* // Appl. Phys. Lett. 2009. **95**, N 13. P. 131110.
20. *Li J., Gao W., Qian J.* et al. // Sensors. 2019. **19**, N 1. P. 192.
21. *Балакин Д. А., Белинский А. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2019. № 1. С. 10. (*Balakin D. A., Belinsky A. V.* // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2019. **74**, N 1. P. 8.)
22. *Balakin D. A., Belinsky A. V., Chirkin A. S.* // Quantum Information Processing. 2019. **18**, N 3. P. 80.
23. *Du J., Gong W., Han Sh.* // Opt. Lett. 2012. **37**, N 6. P. 1067.
24. *Kolobov M. I., Beskrovnyy V. N.* // Optics Communications. 2006. **264**, N 1. P. 9.
25. *Piché K., Leach J., Johnson A. S.* et al. // Optics Express. 2012. **20**, N 24. P. 26424.

Mathematical Processing of Quantum Images in a Biphoton Setup via Measurement Reduction

D. A. Balakin[a], **A. V. Belinsky**[b]

Department of Mathematical Modeling and Computer Science, Faculty of Physics,
Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]*balakin_d_a@physics.msu.ru*, [b]*belinsky@physics.msu.ru*.

We investigate the possibilities of increasing the measurement accuracy and creating the least-damaging regime of object illumination by mathematical simulation of the process of generating paired images, that is, a ghost image and a regular image, using a new scheme with quantum biphoton generation. It is shown that diffraction and non-unit quantum efficiency of the sensors in traditional ghost imaging cause missing some information carried by the object arm photons. Forming an image of the studied object in the object arm and registering it makes it possible to weaken the influence of these factors on the measurement result when using the developed version of the method of measurement reduction to the form that is typical for measuring the transparency distribution of the object for processing a pair of obtained images.

Keywords: measurement reduction, ghost images, multiplexing, image processing
PACS: 07.05.Pj, 42.50.Ex.
Received 27 March 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 4. Pp. 295–303.

Сведения об авторах

1. Балакин Дмитрий Александрович — мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: balakin_d_a@physics.msu.ru.
2. Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@physics.msu.ru.