О полиномах от нескольких переменных и построении ковариантных, ограниченных векторов тока

М. Б. Эпендиев[a]
Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН.
Россия, 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4.

Поступила в редакцию 02.03.2020, после доработки 16.05.2020, принята к публикации 23.05.2020.

Исследуются уравнения, связанные с суммами произведений полиномов от нескольких переменных. Один набор полиномов считается заданным, а другой — искомым. В общем случае задания полиномов получен ряд соотношений для степеней полиномов и детерминантов матриц, составленных из коэффициентов полиномов. На этой основе, с учетом уравнения неразрывности представлен ряд вариантов ковариантных векторов ограниченной плотности тока. Результаты определенно можно считать корректными, если ускорения не слишком велики. Рассмотрен также и случай зависимости вектора тока от переменной, значение которой при переходе к стационарному состоянию зависит от условий такого перехода (если эти условия неизвестны, то в стационарных состояниях возможны те или иные элементы неопределенности).

Ключевые слова: линейная алгебра, полином, матрица, ограниченный вектор тока, задача Кеплера.
УДК: 512, 53.02. PACS: 02.30.Jr.

ВВЕДЕНИЕ

Работа состоит из двух частей — математической и прикладной. В первой выводятся соотношения, связанные с тождественным равенством нулю суммы произведений полиномов от нескольких переменных, в которой один набор полиномов считается заданным, а другой — искомым. Основными целями были расчет степеней и анализ свойств коэффициентов искомых полиномов. При всей обширности соответствующей литературы (см., например, [1–3]) среди доступных работ не нашлось такой, результаты которой можно было бы применить в решении поставленной прикладной проблемы. Поэтому автор (не оспаривая чей-то возможный приоритет), исходя из основ алгебры, сам рассмотрел данную задачу в общем виде.

Прикладная задача посвящена построению ограниченных векторов тока, являющихся ковариантными (релятивистски инвариантными). Для этого в качестве математической основы потребовались результаты первой части.

Релятивистские токи имеют место прежде всего в микроявлениях, и квантовая электродинамика разработала процедуры устранения расходимостей, которые возникают в классических токах [4]. Автор не ожидает, что построение аналогичной процедуры в классической физике немного по иному скажется в квантовой теории. Однако, по крайней мере в математическом плане, имеет смысл анализ возможностей определения ковариантных, ограниченных токов в классической электродинамике.

1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

В интегралах, в которых не указаны пределы, последние равны $\pm\infty$. Верхние символы, если иное не оговорено (или не очевидно), являются индексами, а не степенями. Если латинские индексы повторяются и снизу и сверху, по ним производится суммирование по всем возможным их значениям. Выражение «$A \to B$» означает, что из A следует B. Под тождеством понимается равенство, которое верно для всех доступных значений переменных. Доступной областью вещественных переменных $x^1, x^2, \ldots, x^N$ (иногда такой набор будем обозначать через x) будет все N-мерное арифметическое пространство. В частных производных $Q_{,\alpha}$ символ α есть или сама переменная или ее индекс.

Независимые переменные. Пусть совокупность $(x^1, \ldots, x^N)$ есть априори независимые переменные. Для четкого определения понятия независимости для новых переменных $p_1, \ldots, p_M$ $(1 \leqslant M < N)$ нужно задать два класса функций G_N и G_M (в работе непрерывные и дифференцируемые), где нижний символ определяет число переменных. Тогда функции $p_\alpha(x) \in G_N$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, M)$ являются независимыми переменными, если

$$\forall F \in G_M, F(p_1, \ldots, p_M) \equiv \mathrm{const} = C_0 \to F = C_0. \quad (1)$$

Далее будем считать, что при переходе к новым переменным остается влияние каждой исходной переменной, т. е. не найдется номера k такого, что $p_{\alpha,k} \equiv 0$ при всех α.

Локализованность функции. Будем говорить, что функция $D(x)$ r кратно локализована, если $\lim_{|x_k| \to \infty} |PD| = 0$ для любого полинома $P(x)$ при всех заданных и разных $k = i_1, \ldots, i_r$ (на практике часто считают достаточным, если степень полинома не превышает r). При $r = N$ речь идет о полной локализации (ниже — просто «локализация»). Если же $r = N - 1$, то локализацию можно назвать гиперповерхностной.

Основная задача. Пусть функция $D(x)$ является локализованной и

$$q^i D_{,i} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \quad (2)$$

где $q^i(x)$ — искомый набор полиномов степени n (здесь и далее степенем набора полиномов называем максимум степеней отдельных полиномов).

Если $D(x)$ не сводится к функции от меньшего числа переменных, то из (2) следует тривиальное решение $q^i \equiv 0$. При $D = D(p_1, \ldots, p_M)$, где $M < N$,

[a] E-mail: m010148@mail.ru

нетривиальное решение (далее — просто «решение») надо искать из системы однородных уравнений $q^i p_{\alpha,i} \equiv 0$ $(\alpha = 1, \ldots, M)$. Если же речь идет об интегралах по параметру s и p_α зависят от этого параметра, то вместо (2) имеем $q^i D_{,i} + \dot{D} \equiv 0$ $\left(\dot{(\ldots)} = \frac{d(\ldots)}{ds}\right)$ и приходим к неоднородной системе уравнений $q^i p_{\alpha,i} + \dot{p}_\alpha \equiv 0$.

Обозначения для коэффициентов полиномов. В разложении полинома

$$p(x) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{b_l} P_{b_l} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_l} \tag{3}$$

k — степень полинома, а $b_l = [i_1, i_2, \ldots, i_l]$ — расстановка l индексов по порядку неубывания (b_0 означает отсутствие индекса). Число вариантов b_l равно C^l_{N-1+l} , а число всех коэффициентов C^k_{N+k} $(C^n_N = \frac{N!}{(N-n)!n!})$.

2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА И СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть задана матрица полиномов $p_{\alpha i}(x)$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, M$ — номер строки, а $i = 1, 2, \ldots, N$ — номер столбца, и $M < N$. Предположим еще, что строки этой матрицы являются линейно независимыми.

2.1. Однородные уравнения

Обозначая степень набора полиномов $p_{\alpha i}$ через m, рассмотрим тождество

$$p_{\alpha i} q^i \equiv 0. \tag{4}$$

Степень набора искомых полиномов q^i обозначим через n. Тождество (4) можно записать в виде системы линейных уравнений для коэффициентов искомых полиномов. При этом число уравнений $P = P(n) = MC^N_{N+n+m}$, а число искомых коэффициентов $Q = Q(n) = NC^N_{N+n}$. Обозначим через Z^b коэффициенты полиномов q^i, где b — номер комплекса индексов (i, b_l) $(l = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда из (3) имеем

$$\sum_{b=1}^{Q} P_{gb} Z^b \equiv 0 \quad (g = 1, \ldots, P). \tag{5}$$

Здесь g — номер комплекса индексов (α, b_l), где $0 \leqslant l \leqslant (n+m)$. При $m = 0$ разность $(Q - P)$ всегда больше 0. Поэтому далее везде $m \geqslant 1$.

Матрица P_{gb} зависит от коэффициентов полиномов $p_{\alpha i}$ и в общем случае имеет прямоугольный вид $(P \times Q)$. Ниже мы запишем эту матрицу в случае, когда $p_{\alpha i}(x) = C_{\alpha i} + C_{ai(k)} x^k$. Опуская индексы, обозначим $C_{\alpha i}, C_{ai(k)}$ в виде матриц $C, C_{(k)}$, которые и будут элементами P_{gb} при $m = 1$:

$$P_{gb} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & A_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & B_{n-1} & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_n & A_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & B_{n+1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здесь A_l — диагональная матрица $(l \times l)$ с элементами C, а $B_l = C_{(k)}$ (в соответствующих местах), если $b_l = [b_{l-1}, k]$ и $B_l = 0$ иначе.

Непосредственно из (3) нетрудно получить информацию о возможных степенях полиномов q^i.

Теорема 1. Минимальная степень решений уравнения (3) при всех $M < N$ в общем случае равна $n = n_0 = mM$ (общий случай означает, что найдется набор полиномов $p_{\alpha i}$ такой, что n не может быть меньшим n_0).

Доказательство. В силу линейной независимости строк ранг матрицы $p_{\alpha i}$ равен M. Пронумеруем столбцы так, чтобы степень определителя Δ матрицы $p_{\alpha\beta}$, где $\beta = 1, 2, \ldots, M$, была максимальной среди базисных миноров. Тогда решение уравнения (4) можно записать в виде

$$q^\gamma = -\sum_{\alpha=M+1}^{N} \Delta^\gamma_\alpha Y^\alpha, \quad q^\alpha = Y^\alpha \Delta, \qquad 1 \leqslant \gamma \leqslant M, \quad M+1 \leqslant \alpha \leqslant N, \tag{7}$$

где Δ^γ_α — определитель матрицы $P_{\alpha\beta}$, в которой γ-й столбец заменен на α-й, а Y^α — произвольные функции. Так как в общем случае полином Δ может быть неприводимым, все эти функции должны быть полиномами, чтобы считать все q^i полиномами. Степень полинома Δ в общем случае равна mM, поэтому $n \geqslant mM$. Теорема доказана. □

Следствие 1. Ранг матрицы P_{gb} в (4) меньше $Q(n_0)$.

Теперь обратимся к квадратным вариантам матриц P_{gb}, когда

$$R(n) = Q(n) - P(n) = 0. \tag{8}$$

Теорема для таких случаев доказывается с помощью **теоремы 1**. Мы это сделаем так, чтобы попутно получить информацию о знаке или равенстве нулю $R(n)$. Для этого будем считать $n = z$ непрерывной, положительной переменной. Из (8) следует уравнение для разности двух факториальных полиномов от этой переменной:

$$f(z) = NP_m(z) - MP_m(N+z) = 0, \qquad P_m(y) = \prod_{k=1}^{m} (y+k). \tag{9}$$

Определим еще функцию, где и m можно считать непрерывной величиной:

$$f_1(z, m) = \frac{f(z)}{P_m(z)} = N - M \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{m}{z+k}\right). \tag{10}$$

Очевидно, что f, f_1 и R эквивалентны по знаку или равенстве нулю.

Лемма 1. Уравнение $f(z) = 0$ имеет один и только один корень $z_0 > 0$.

Так как $f(0) < 0$ и $f(\infty) > 0$, то существует корень $z_0 > 0$. А так как $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=z_0} > 0$, то этот корень единственный.

Лемма 2. Если $f(z_0) = 0$, то $z_0 > z_{0m} = mM - 1$.

Достаточно доказать, что $f(z_{0m}) < 0$. Считая m непрерывной величиной и обозначая $f_2(m) = f_1(mM-1, m)$, нетрудно убедиться, что $f_2(1) < 0$ и $\frac{\partial f_2}{\partial m}\big|_{m\geqslant 1} < 0$. Отсюда следует, что $f_2(m) < 0$ при всех $m \geqslant 1$.

Следствие 2. Если корень уравнения (9) есть целое число n, то $n \geqslant mM$.

Теорема 2. Однородная система (5) имеет решение и при $Q = P$.

Доказательство. Согласно **теореме 1** все значения $n \geqslant n_0$ представляют решение уравнения (3). Из *следствия 2* следует, что целый корень уравнения (10) больше или равен n_0. Это значит, что и при равенстве числа уравнений числу неизвестных однородная система уравнений (5) имеет решение. □

Следствие 3 (частный аналог *следствия 1*). Определители квадратных вариантов матриц P_{gb} (в том числе и (6)) равны нулю.

В более узком классе полиномов $p_{\alpha i}$ возможны решения и при $n < n_0$. Например, если степень полиномов p_{1i} равна m, а остальные имеют степень $m-1$, то степень полинома Δ уменьшается и $n \geqslant (mM - M + 1)$ (в частности, при $m = 1$ имеем $n \geqslant 1$ при всех $M < N$). Это значит, что соответственно уменьшается и ранг матриц P_{gb}.

2.2. Неоднородное уравнение

В неоднородном уравнении, обобщающем (4),

$$p_{\alpha i} q^i = g_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, M) \tag{11}$$

полиномы $g_\alpha(x)$ заданы и имеют степень $(m+1)$. При этом все предыдущие результаты о степенях полиномов q^i остаются в силе, если удовлетворяется стандартное условие: ранг расширенной матрицы (т. е. матрицы P_{gb}, к которой добавлена соответствующая группа столбцов из коэффициентов полиномов g_α) должен быть равен рангу матрицы P_{gb}. Это говорит о том, что полиномы g_α как-то должны быть связаны с полиномами $p_{\alpha i}$. Явно это просматривается в записи общего решения (11), подобного (7):

$$\begin{gathered} q^\gamma = \frac{\Delta^\gamma}{\Delta} - \sum_{\alpha=M+1}^{N} \Delta^\gamma_\alpha Y^\alpha, \quad q^\alpha = Y^\alpha \Delta; \\ 1 \leqslant \gamma \leqslant M, \quad (M+1) \leqslant \alpha \leqslant N, \end{gathered} \tag{12}$$

где Δ^γ — определитель матрицы $p_{\alpha\beta}$, в которой γ-й столбец заменен на столбец g_α. Как видим из (12), если все q^i — полиномы, то Δ должен быть делителем всех полиномов Δ^γ. Это возможно, так как степени полиномов Δ^γ больше степени полинома Δ.

Мы рассмотрели задачу в общем виде. В действительности во многих практических случаях (в какой-то мере и в нижеследующем приложении) в этом особой необходимости нет. Например, при $m = 2$ первым целым корнем уравнения (8) будет $n = 13$ (при $M = 3$, $N = 6$ или 35). Ясно, что полиномы такой степени малоинтересны в практике. Тем не менее, общие случаи предпочтительнее, так как не все частные случаи можно формализовать так, чтобы не было никаких сомнений в правильности результатов.

3. ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА

В классической физике утверждается (и достаточно обоснованно), что релятивистская теория не описывает протяженные элементарные частицы (см. [5, §15]). Автор не собирается опровергать физическое основание этого положения, но полагает, что, хотя бы в математическом плане, имеет смысл довести классическую электродинамику до большего совершенства. Кроме того, следует иметь в виду и следующие соображения.

1. Во-первых, речь не о размазанности частицы как таковой, а о том, что уже в классической теории можно определиться с процедурой устранения расходимости вектора тока.
2. Современное понимание физического вакуума не исключает того, что сам заряд может представляться размазанной плотностью, локализация которой обязана неким внутренним силам.
3. И, наконец, нельзя отвергать и следующую гипотезу: возможно, что не элементарный заряд (в форме вектора тока) является источником ЭМП (электромагнитного поля), а ЭМП есть «источник» ограниченного вектора тока. Пока экспериментально не доказано, например, что механическая масса электрона отлична от нуля, с этой гипотезой нужно считаться.

Оставляя в стороне вопрос о степени правдоподобности этих соображений, подчеркнем, что окончательная оценка за квантовой теорией (или ее модификацией). Здесь же рассмотрим различные варианты ограниченных векторов тока так, чтобы в математическом плане все было безупречно.

Итак, пусть $N = 4$ и $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{r})$ (скорость света считается равной 1). Стационарность в узком смысле касается только объекта в целом. А вот стационарность в широком смысле касается и внутренних процессов. В таких случаях вектор тока покоящей частицы определяется локализованной (и ограниченной) плотностью заряда $\mu(\mathbf{r})$:

$$J^k = (J^0, \mathbf{J}), \quad J^0 = \mu(\mathbf{r}), \quad \mathbf{J} = 0 \tag{13}$$

(при стационарности в узком смысле в (13) $J^0 = J^0(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{J} = \mathbf{J}(t, \mathbf{r})$).

Если частица движется со скоростью $\mathbf{v}$, то

$$\begin{gathered} J^0 = \mu(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{J} = \mathbf{v}\mu(\mathbf{r}'), \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} - (t - (\mathbf{u}r)/(1+u^0))\mathbf{u}, \end{gathered} \tag{14}$$

где u^k — 4-вектор скорости: $u^0 = (1 - v^2)^{-1/2}$, $\mathbf{u} = u^0\mathbf{v}$.

Ни в (13), ни в (14) ковариантность (релятивистская инвариантность) явно не проявляется. Поэтому имеет смысл записать J^k в интегральной форме:

$$\begin{gathered} J^k = \int q^k(X, s) D(X, s) ds, \\ X^k = x^k - f^k(s), \quad f^k = u^k s, \end{gathered} \tag{15}$$

где q^k — 4-вектор, D — скаляр, s — интервал (также скаляр).

Однако объявить величины тензорами (скалярами, векторами...) это одно, а построить их — другое. Практика предоставляет ограниченное число величин, из которых можно строить тензоры. Ниже мы остановимся на трех вариантах, связанных с наличием (или отсутствием) пространственной симметрии (временная ось определяется стационарными состояниями).

1. Сферическая симметрия — нет выделенных направлений.
2. Цилиндрическая симметрия — выделено одно направление.
3. Симметрия отсутствует — выделены все три направления (точнее два, так как третье следует автоматически).

В последнем случае задаются три взаимно ортогональных орта $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда в (13) $\mathbf{r} = \sum_\alpha x^\alpha \mathbf{e}_a$. Таким образом, для движущего заряда к u^k добавляются еще три 4-вектора (и все четыре взаимно ортогональны) N^k_α:

$$N^0_\alpha = (\mathbf{u}\mathbf{e}_\alpha), \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + (\mathbf{u}\mathbf{e}_\alpha)\mathbf{u}/(1+u^0), \\ (N_\alpha, N_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

В результате определяются четыре скаляра $\tau = (u, X)$, $z_\alpha = (N_\alpha, X)$ (здесь и далее $(\alpha, b) = (\alpha^k b_k)$) и в (15) $D = D(\tau, z_1, z_2, z_3)$. Полагая в (15) $q^k = u^k$, приходим к (14), где $\mu(\mathbf{r}) = \int D(\tau, \mathbf{r})d\tau$. Следует иметь в виду, что одна из величин z_α является псевдоскаляром и зависимость истинных тензоров от этой величины должна быть четной (например, ниже $\delta = \sum_{\alpha=1}^3 z_\alpha^2$).

Обобщение на общий случай движения заключается в следующем: $f^k(s)$ — заданная траектория некоторой точки объекта (центра масс, ...); векторы N^k_α определяются в соответствии с (16), где 4-вектор $u^k = \dot{f}^k = df^k/ds$. При этом (15) можно записать в виде:

$$J^k = \int \tilde{J}^k(x, s)ds, \\ \tilde{J}^k = q^k(X, u, \dot{u}, \dots)D(X, u, \dot{u}, \dots). \tag{17}$$

Здесь $D(X, \dots)$ — локализованная скалярная функция, а вектор $\tilde{J}^k$ определен с точностью до слагаемого вида $\frac{d}{ds}(P^k D)$, где векторы P^k является полиномом от $X^k = x^k - f^k(s)$. Отметим, что теперь к предыдущим добавляются новые векторы и скаляры: $\dot{u}^k, \dots$; $y = (\dot{u}, X), \dots$.

Далее, не ограничивая общность (см. ниже (28)), будем считать, что

$$q^i = Q^i + Q^i_k X^k, \quad Q^k_k = 0 \to q^i_{,i} = 0. \tag{18}$$

Здесь коэффициенты зависят от s (через $u, \dot{u}, \dots$) и могут быть рассчитаны для тех или иных наборов независимых переменных в D исходя из уравнения неразрывности $J^i_{,i} \equiv 0$, которое для (17) можно записать в виде

$$q^i D_{,i} + \dot{D} = 0. \tag{19}$$

Отсюда сразу видно следующее: если старшая степень производной от скорости в D равна n, то она же в q^i равна $(n+1)$.

В случаях, когда $D = D(p_1, \dots, p_M)$, где $M < N$, а независимые переменные p_α являются скалярными функциями, из (19) следует тождество типа (11)

$$p_{\alpha,i}q^i + \dot{p}_\alpha \equiv 0 \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant M) \tag{20}$$

(с некоторыми оговорками (20) имеет смысл и при $M = N$). Далее p_α являются полиномами 2-й степени от X. Очевидно, что здесь имеет место и условие линейной независимости полиномов $p_{\alpha,i}$, которое требовалось в (4). При расчете q^i учтем три обстоятельства.

1. Если $\dot{u}^k > 0$ (при всех k) , то $q^k = u^k = \mathrm{const}$.
2. Набор переменных p_α определяется конкретной практической ситуацией (в частности, той или иной пространственной симметрией).
3. Результаты при данном наборе переменных имеют место и для меньшего числа переменных, если последние являются функциями лишь данных. Но обратное неверно. Поэтому мы будем записывать q^i лишь для того набора независимых переменных, из вида которых они и получены.

Возможные варианты функции D разобьем на два типа: D не зависит от ускорения и D зависит от ускорения. В первых случаях имеем:

1. Нет симметрии: $D = D(\tau, z_1, z_2, z_3)$ и непосредственно из (19) получим

$$q^i_{(1)} = (1-y)u^i + \sum_{\alpha=1}^3 \dot{z}_\alpha N^i_\alpha, \quad \dot{z}_\alpha = (\dot{N}_\alpha, X). \tag{21}$$

2. Цилиндрическая симметрия: $D = D(\tau, \delta, z_3)$, $\delta = \tau^2 - (X, X)$ и (20) дает

$$q^i_{(2)} = (1-(W,X))u^i + \tau W^i + \dot{z}_3 N^i_3 - z_3 \dot{N}^i_3, \\ W^i = \dot{u}^i + (N_3, \dot{u})N^i_3. \tag{22}$$

3. Сферическая симметрия: $D = D(\tau, \delta)$ и из (20) имеем

$$q^i_{(3)} = (1-y)u^i + \tau\dot{u}^i \quad (y = (\dot{u}, X)). \tag{23}$$

4. Если $D = D(\delta_1)$, $\delta_1 = C\delta^2 - (X, X)$, $C = \mathrm{const} > 1$, то

$$q^i = (1 + c_0 y)u^i + (c_0 C + C - c_0)\tau\dot{u}^k, \tag{24}$$

где c_0 — произвольная константа. Отметим, что $q^i_{(2)} = \langle q^i_{(1)} \rangle_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$ и $q^i_{(3)} = \langle q^i_{(2)} \rangle_{\mathbf{e}_3}$ (при усреднении учитываются соотношения между $\mathbf{e}_\alpha$).

Зависимость D от ускорения рассмотрена в следующих вариантах.

1. Сдвиг времени: $D = D(\tau - L(s)y, \delta)$ (L — скалярная функция) и

$$q^i = (1 - y + \dot{L}y + L\dot{y} - \lambda\tau L)u^i + \tau\dot{u}^i, \\ \lambda = (u, \ddot{u}) = -(\dot{u}, \dot{u}) \equiv 0. \tag{25}$$

2. Деформация сферической симметрии: $D = D(\tau, \delta + \omega y^2)$ и

$$q^i = (1-y)\gamma u^i + \frac{1}{\gamma}\left(\tau + \omega\dot{y} + \frac{1}{2}y\dot{\omega}\right), \\ \gamma = (1 + \omega\lambda)^{1/2}, \tag{26}$$

где $\omega(s)$ — скалярная функция такая, что $(1+\omega\lambda)>0$.

3. В случае трех переменных зависимость от y в «чистом» виде (т. е. $D = D(\tau,\delta,y)$) требует $\dot\lambda = 0$. Поэтому $D = D(\tau,\delta,z)$, $z=(b,X)$, а

$$q^i = u^i + \dot z b^i - z\dot b^i, \quad b^i = \dot u^i/\sqrt{\lambda}. \tag{27}$$

Величина z может быть переменной и в (24), (25) при $L \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $\omega \sim \frac{1}{\lambda}$. Но эта величина однозначно определена лишь при $\lambda \neq 0$. Если же $\dot u^k \to 0$, то z представляет неопределенность типа 0/0, т. е., в зависимости от того, как ускорение стремится к нулю, эта величина может по разному зависеть от X. В частности, в процессах рассеяния, когда $\lim_{s\to\pm\infty}\lambda = 0$, в предельных (начальных и конечных) состояниях токи могут быть неопределенными.

Отметим, что варианты (23), (25), (26) подробно исследованы в [6, 7]. А в [8, 9] довольно сложным образом пришли к (25), предполагая, что движение имеет специальный характер.

В общем случае тока мы можем в (17) представить q^i конечной суммой

$$q^i = \sum_\alpha q^i_\alpha C_\alpha(X,s), \tag{28}$$

где все q^i_α удовлетворяют условию (18). Тогда J^i является аналогичной суммой векторов, каждый из которых можно рассчитать приведенной выше процедурой (в частности, ток может являться и суммой каких-либо векторов, полученных выше, и каждое слагаемое будет иметь свой физический смысл). В математическом плане здесь все в порядке. Вопросы возникают, когда нужно строить векторные и скалярные функции: может понадобиться слишком много векторов и скаляров, зависящих от s так, чтобы они имели смысл при $\dot u^i > 0$. А чрезмерное количество таких величин вряд ли может быть характерным на практике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты (особенно (21)–(24)) могут быть не корректными при слишком больших ускорениях. Так, если вектор тока представляет реальный объект и размеры области локализации недостаточно малы, то нужно учесть, что скорость распространения внешнего воздействия конечна и не все элементы объекта ускоряются одинаковым образом (а именно этим объясняется то, что абсолютно твердых тел в теории относительности не бывает). В классическом понимании это означает, что нужно учесть внутренние силы, как фактор, влияющий на степень локализации объекта при его ускоренном движении. Например, траектория элемента объекта зависит от его местоположения и задается в неявном виде:

$$f^i(s,x) = F^i(s,X), \quad X^i = x^i - f^i. \tag{29}$$

Сейчас трудно судить, насколько варианты (29) помогут описать реальность. Отметим только то, что анализ этих вариантов сопряжен с серьезными математическими трудностями.

Если же ЭМП является «источником» тока, то возникает иная ситуация. Образно говоря, вся «ответственность» ложится на ЭМП. Например, можно считать, что фотоны слишком высоких частот это нечто качественно иное, чем фотоны невысоких частот.

Маловероятно, что приведенный классический анализ в количественном плане чем-то поможет квантовой теории (хотя при учете зависимости D от y вероятность может быть больше). Но качественные выводы могут пролить свет на некоторые «туманные» обстоятельства в квантовых методах. Рассмотрим простейший пример релятивистской классической механики, в котором учитывается размазанность плотности заряда.

Речь идет о релятивистском варианте задачи Кеплера (см. Приложение), в которой учитывается размазанность кулоновского потенциала. В квантовой механике нулевые моменты импульса не описываются: в квазиклассическом пределе $|\mathbf{M}| = (l+\frac{1}{2})h$ (см. [10, 11]). В классической механике эффект релятивизма заключается в том, что траектория перестает быть замкнутой. При этом для кулоновского потенциала при $|\mathbf{M}| \to 0$ получаются физически бессмысленные результаты [12]. Иная ситуация, когда кулоновское поле размазано. Случай $|\mathbf{M}| = 0$ приводит к качественно иному типу движения, а главное — период колебаний в два раза больший, чем в стандартном решении задачи Кеплера. Возможно, что именно это имеет отношение к тому, что нулевые моменты находятся вне внимания квантовой механики.

Автор благодарен профессору МГУ А. В. Борисову за консультацию и помощь в работе.

Приложение А

Задача Кеплера (ниже все энергии поделены на массу частицы).

Точечная частица с полной энергией E движется вокруг размазанного притягивающего центра и энергия взаимодействия равна

$$V(r) = -\alpha\left[\frac{1}{r}\int_0^r r^2\mu(r)dr + \int_r^\infty r\mu(r)dr\right], \quad \alpha>0,$$

где $\mu(r)$ — локализованная и ограниченная функция такая, что

$$\int_0^\infty r^2\mu(r)dr = 1, \quad V_0 = \int_0^\infty r\mu(r)dr > 0.$$

Степень локализации определим величиной σ_0 (далее будем считать, что $\sigma_0 \sim \alpha$). При $r \gg \sigma_0$ имеем кулоновское приближение, а при $r \ll \sigma_0$

$$V \cong -\alpha\left(V_0 - \frac{\mu(0)}{6}r^2\right), \quad \left|\frac{\mu(0)}{6}r^2\right| \ll V_0. \tag{A1}$$

Из релятивистских уравнений $\dot u^0 = -(\mathbf{u}\nabla)V$, $\dot{\mathbf{u}} = -u^0\nabla V$ получим

$$u^0 = E - V, \quad \mathbf{u}^2 = (E-V)^2 - 1,$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{ru}] = M_z \mathbf{e}_z, \quad \dot{\varphi} = \frac{M_z}{r^2},$$

где $M_z = \text{const} > 0$, а $\varphi(s)$ — полярный угол в плоскости (x, y). При $E < 1$ движение финитное и пределы изменения r даются равенством $\kappa^2 = (E - V)^2 - 1 - M_z^2/r^2 = 0$. В кулоновском приближении это дает

$$r_{1,2} = \frac{1}{\chi}\left[\alpha E \mp \sqrt{\alpha^2 - \chi M_z^2}\right], \qquad \text{(A2)}$$
$$\chi = 1 - E^2, \quad r_1 \leqslant r_2.$$

Из (A2) видим, что при $M_z < \alpha$ имеется лишь один положительный корень r_2. Для нахождения второго нужно учесть представление (A1). Так, полагая, что $(E + \alpha V_0) > 1$, имеем при $M_z \ll \alpha$

$$r_1 \cong M_z/((E + \alpha V_0)^2 - 1)^{1/2}.$$

Рассмотрим величины

$$\varphi_1 = M_z \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \kappa}, \quad T_1 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{u^o dr}{\kappa}, \quad T = \frac{2\pi T_1}{\varphi_1}.$$

Здесь T условно можно назвать временем, за которое частица совершает полный оборот вокруг центра. Однако при учете релятивизма это время зависит от начала отсчета (угла или расстояния). Но если эта зависимость слабая, то в первом приближении T можно считать периодом. При $M_z \gg \alpha$ (кулоновское приближение), полагая $(1 - E) = \varepsilon_0 \ll 1$, имеем

$$\varphi_1 = \frac{\pi M_z}{(M_z^2 - \alpha^2)^{1/2}}, \quad T_1 = \frac{\pi\alpha(E + \chi)}{\chi^{3/2}},$$
$$T = \frac{2T_1(M_z^2 - \alpha^2)^{1/2}}{M_z} \cong \frac{2\pi\alpha}{(2\varepsilon_0)^{3/2}} = T_c.$$

Если же $M_z > 0$, то в первом приближении получим

$$\varphi_1 \cong \frac{\pi}{2}, \quad T_1 \cong \frac{\pi\alpha E}{\chi^{3/2}}, \quad T \cong 2T_c.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
2. *Проскуряков И. В., Мишина А. П.* Высшая алгебра. Физматгиз, 1962.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М: Наука—Физматлит. 1999.
4. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский А. П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
6. *Эпендиев М. Б.* // Вестн. Моск. ун-та Физ. Астрон. 2014. № 6. С. 40. (*Ependiev M. B.* // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2014. 69, N 6. P. 474.)
7. *Ependiev M. B.* // J. Modern Phys. 2015. **5**. P. 601.
8. *Nodvik J. S.* // Ann. Phys. 1964. **28**. P. 225.
9. *Spohn H.* // arXiv:math-ph/9908024v1. 1999.
10. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Наука, 1965.
11. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч.* // Квантовая механика. М.: Наука, 1979.
12. *Эпендиев М. Б.* // Теоретические основы физики. 2 изд. М.—Ижевск: ИКИ, 2018.

On Multivariate Polynomials and Construction of Covariant Bounded Current Vectors

M. B. Ependiev

Blagonravov Institute of Machines Science of the Russian Academy of Sciences (IMASH).
Moscow 101990, Russia.
E-mail: m010148@mail.ru.

Equations related to the sums of the products of multivariate polynomials are studied. One set of polynomials is considered as determined and the other is sought. In the general case of defining polynomials, a series of relationships is obtained for the degrees of polynomials and determinants of matrices composed of polynomial coefficients. On the basis of these relationships and the continuity equation, a number of variants of covariant vectors of limited current density are presented. The results can definitely be considered correct if the accelerations are not too large. The case where the current vector depends on the variable whose value at transition to the stationary state is dictated by the conditions under which such a transition is treated (if these conditions are unknown, then particular elements of uncertainty are possible in the stationary states).

Keywords: linear algebra, polynomial, matrix, bounded current vector, Kepler problem
PACS: 02.30.Jr.
Received 02 March 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 4. Pp. 309–315.

Сведения об авторе

Эпендиев Магомед Бухадиевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 423-10-97, e-mail: m010148@mail.ru.