

Запаздывающие потенциалы в дробной электродинамике

А. В. Псху, С. Ш. Рехвиашвили^a

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.
КБР, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89А.

Поступила в редакцию 25.02.2020, после доработки 23.03.2020, принята к публикации 10.04.2020.

Для системы уравнений макроскопической электродинамики с дробными производными Капуто по времени получено общее выражение для запаздывающих потенциалов. Получен аналог потенциалов Лиенара–Вихерта. Все выражения содержат нелокальное (распределенное по времени) запаздывание, которое учитывает временную дисперсию в системе.

Ключевые слова: классическая электродинамика, дробное интегро-дифференцирование, эффект памяти, временная дисперсия, запаздывающие потенциалы, потенциалы Лиенара–Вихерта.

УДК: 537.8. PACS: 41.20.-q.

ВВЕДЕНИЕ

В [1, 2] был предложен вариант «дробной» электродинамики материальных сред, основанный на применении дробной производной Капуто по времени. Из результатов этих работ следует, что введение дробной производной в уравнения Максвелла позволяет *a priori* учесть диссипативные процессы. В последующих работах [3, 4] на основе данного подхода был проанализирован обобщенный случай материальной среды с пространственно-временной дисперсией, зависящей от времени по степенному закону. Показано, что среды этого типа обладают фрактальными свойствами по временной переменной. Отметим также, что в ряде более поздних работ по данной тематике (например, в [5–7]) фактически были воспроизведены результаты из [1, 2].

Среди других подходов к электродинамике с дробными производными можно отметить подходы из [8–10]. В [8, 9] показано, что электромагнитные поля в диэлектрических средах описываются дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка по времени, если восприимчивость этих сред описывается дробно-степенной зависимостью. В [10] сформулированы «дробные» аналоги теорем Грина, Стокса и Гаусса. Исходя из этого выведены новые волновые уравнения с дробной производной по пространственной переменной.

В целом, однако, приходится констатировать, что применение дробных производных в электродинамике пока не находит широкого применения. Основным препятствием здесь является отсутствие ясной физической интерпретации дробных интегро-дифференциальных операторов и диффузионно-волновых уравнений в частных производных дробного порядка. Последние достижения в разработке дробных и фрактальных моделей в электродинамике представлены в [11].

В настоящей работе развиваются идеи работ [1, 2]. Получена формула Кирхгофа для обобщенного диффузионно-волнового уравнения и с ее помощью найдена общая форма для запаздывающего скалярного и векторного потенциалов. Найден дробный аналог потенциалов Лиенара–Вихерта. На основе полученных результатов обсуждается физический смысл дробного интегро-дифференцирования в электродинамике материальных сред.

ТЕОРИЯ

В дробной электродинамике [1, 2] ключевым понятием является результирующий электрический ток, который определяется с помощью дробной производной Капуто

$$I(t) = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} Q(t), \quad 1/2 < \alpha \leq 1, \quad (1)$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} Q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{dQ(t')}{dt'} \right) \frac{dt'}{(t-t')^{\alpha}},$$

где Q — суммарный заряд свободных и связанных частиц, τ — некоторое характерное время, например время релаксации неравновесных носителей заряда, t — безразмерное (отнесенное к τ) время, $\Gamma(1-\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. При $\alpha = 1$ из (1) следует классическое определение электрического тока. При $1/2 < \alpha < 1$, согласно представлениям из [1, 12, 13], имеется некоторая диссипативная среда с памятью. Формулу (1) можно трактовать как уравнение состояния линейной динамической системы или материальной среды со степенной импульсной переходной функцией, которая задает временную дисперсию. Если количество заряженных частиц сохраняется, то можно считать, что происходит их движение частиц с эффективной скоростью

$$\mathbf{v}_{\alpha}(t) = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{r}(t) = \frac{1}{\tau \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d\mathbf{r}(t') dt'}{dt'} \frac{dt'}{(t-t')^{\alpha}}.$$

Если изначально принять определение (1), то это приводит к системе уравнений Максвелла вида [1, 2]:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} \mathbf{D}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

которая в обобщенной калибровке Лоренца сводится к диффузионно-волновым уравнениям для скалярного и векторного потенциалов

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{(c\tau)^2} \partial_{0t}^{2\alpha} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{(c\tau)^2} \partial_{0t}^{2\alpha} \mathbf{A} = -\mu \mu_0 \mathbf{j}. \quad (5)$$

^a E-mail: rsergo@mail.ru

В (2)–(5) использованы стандартные обозначения, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — скорость света в вакууме.

Уравнения (4), (5) представимы в единой форме

$$\partial_{0t}^{2\alpha} u(r, t) - v^2 \Delta u(r, t) = f(r, t), \quad (6)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $v = c\tau/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — постоянная с размерностью длины. Под функцией $u(\mathbf{r}, t)$ подразумевается скалярный или векторный потенциал; функция $f(\mathbf{r}, t)$ выражается через объемную плотность заряда или тока в соответствии с (4) и (5). Пользуясь результатами [14], решение задачи Коши

$$u(\mathbf{r}, 0) = u_1(\mathbf{r}), \quad u_t(\mathbf{r}, 0) = u_2(\mathbf{r})$$

для уравнения (6) получаем в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{v^2} \int_V \left[u_1(\mathbf{r}') D_{0t}^{2\alpha-1} \Gamma_{2\alpha,3} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{v}, t \right) + \right. \\ & \left. + u_2(\mathbf{r}') D_{0t}^{2\alpha-2} \Gamma_{2\alpha,3} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{v}, t \right) \right] d^3 \mathbf{r}' + \\ & + \frac{1}{v^2} \int_0^t \int_V f(\mathbf{r}', t') \Gamma_{2\alpha,3} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{v}, t - t' \right) d^3 \mathbf{r}' dt'. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь D_{0t}^β означает оператор Римана—Лиувилля

$$D_{0t}^\beta g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(t') dt'}{(t-t')^\beta}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Формула (7) представляет собой аналог формулы Кирхгофа для уравнения (6). Фундаментальное решение $\Gamma_{2\alpha,3}(\mathbf{r}, t)$ есть

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\alpha,3}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|t} \phi \left(-\alpha, 0; -\frac{|\mathbf{r}|}{t^\alpha} \right), \quad (8) \\ \phi(-\alpha, 0; z) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(-\alpha k)}, \end{aligned}$$

где $\phi(-\alpha, 0; z)$ — функция Райта.

Далее рассмотрим случай, когда $u_1(\mathbf{r}) = u_2(\mathbf{r}) = 0$. С учетом (8) после простых преобразований (7) принимает вид

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi v^2} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \\ & \times \int_0^t \frac{f(\mathbf{r}', t-t')}{t'} \phi \left(-\alpha, 0; -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{vt'^\alpha} \right) dt' d^3 \mathbf{r}' \end{aligned}$$

или

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi v^2} \int_V \frac{\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \int_0^t \frac{f(\mathbf{r}', t-t')}{t'} \phi \left(-\alpha, 0; -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{vt'^\alpha} \right) dt'$$

— задает распределенное (нелокальное, «размазанное» во времени) запаздывание. Из свойств функции Райта ([14, лемма 27]) следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \begin{cases} f \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right), & t > \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}, \\ 0, & t < \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}. \end{cases}$$

Поэтому при $\alpha \rightarrow 1$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} u(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi v^2} \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_V \frac{\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ = & \frac{1}{4\pi v^2} \int_V \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v) d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{aligned}$$

то есть при $\alpha = 1$ потенциал (9) переходит в классический запаздывающий потенциал. Таким образом, (9) дает общую форму для запаздывающих потенциалов (скалярного и векторного) в дробной электродинамике с уравнениями (2), (3).

В целях физической интерпретации формулы (9) представляет интерес высчитать с ее помощью запаздывающие потенциалы в простейшем случае движущегося точечного заряда. В этом случае имеем

$$f = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)), \quad (10)$$

где $\mathbf{r}_e(t)$ — радиус-вектор траектории движения заряда. Подставляя (10) в (9) и выполняя интегрирование по пространственной переменной, находим

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi v^2} \int_0^t \frac{1}{(t-t')|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \times \\ & \times \phi \left(-\alpha, 0; -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|}{v(t-t')^\alpha} \right) dt'. \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (11) представляет собой аналог формул Лиенара—Вихерта для потенциалов поля, создаваемого точечным электрическим зарядом, который движется по заданной траектории. Для векторного потенциала подынтегральное выражение в (11) необходимо умножить на $\mathbf{v}_\alpha(t')$.

Из (11) при $\alpha \rightarrow 1$ могут быть получены классические выражения для скалярного и векторного потенциалов Лиенара—Вихерта. Чтобы это показать, введем функцию

$$\eta(t') = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|}{v(t-t')}, \quad t' \in (0, t).$$

Для производной имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t')}{dt'} = & \frac{1}{v(t-t')} \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|}{(t-t')} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')) \cdot \tau D_{0t'}^{1-\alpha} \mathbf{v}_\alpha(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Сделаем замену $\xi = \eta(t')$. Тогда имеем

$$\frac{dt'}{(t-t')|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|} = \frac{d\xi}{\xi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')| - \frac{\tau}{v}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')) \cdot D_{0t'}^{1-\alpha} \mathbf{v}_\alpha(t)}.$$

Таким образом, получаем

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi v^2} \int_{\eta(0)}^{\infty} \left[\frac{\phi(-\alpha, 0; -\xi(t-t')^{1-\alpha})}{\xi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')| - \frac{\tau}{v}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')) \cdot D_{0t'}^{1-\alpha} \mathbf{v}_\alpha(t)} \right]_{t'=\eta^{-1}(\xi)} d\xi, \quad (12)$$

$$\eta(0) = \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(0)|}{vt}.$$

С учетом свойств функции Райта ([14, лемма 27]) при $\alpha \rightarrow 1$ из (12) получаем

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi v^2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')| \left(1 - \frac{\tau}{v} \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t') \right)}, \quad (13)$$

где $\mathbf{v}(t') = (1/\tau) d\mathbf{r}_e(t')/dt'$, $\mathbf{n}(t') = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t'))/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')$. Формула (13) с точностью до известных множителей дает потенциалы Лиенара—Вихерта [15, с. 211].

Для неподвижного заряда ($\mathbf{v}_\alpha = 0$) интеграл в (12) вычисляется в аналитическом виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\phi(-\alpha, 1; -\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e|}{vt^\alpha})}{4\pi v^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_e|}. \quad (14)$$

Для (14) выполняются условия

$$u(\mathbf{r}, 0) = 0,$$

$$u(\mathbf{r}, \infty) = \frac{1}{4\pi v^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_e|}.$$

Полученный результат интерпретируется следующим образом. Если в диэлектрическую среду в некоторую точку, задаваемую радиусом-вектором $\mathbf{r}_e$, поместить заряд, то стационарное электрическое поле на расстоянии $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e|$ от него будет постепенно устанавливаться с ростом t , причем скорость этого процесса зависит от параметра α . В диэлектрике такое явление может быть связано с поляризацией или «диффузией» поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые получена обобщенная формула для запаздывающих потенциалов в электродинамике с уравнениями Максвелла, которые содержат дробные производные по времени. Показано, что интегральную форму запаздывающих потенциалов можно привести к известному виду, если в качестве эффективной плотности заряда взять свертку реальной плотности заряда или тока с функцией Райта (9). Это фактически означает, что введение в электродинамике дробных производных по времени эквивалентно принятию осредненной

по времени специальным образом плотности заряда или тока. Такое осреднение интерпретируется как учет диссипации в некоторой диэлектрической среде.

Известно, что при наличии частотной дисперсии волновое уравнение уже может не допускать записи вида (6) при $\alpha = 1$. В нашем случае, как отмечено в [3, 4], имеется временная дисперсия, которая приводит к понятию дробной производной в уравнениях Максвелла и запаздывающим потенциалам вида (9). Из свойств (9) следует, что запаздывающие потенциалы в дробной электродинамике, как это и требуется, удовлетворяют принципу причинности: изменение полей в точке наблюдения запаздывает по отношению к изменению источников этих полей поля в некоторой другой точке пространства на время, необходимое для распространения возмущения. При этом запаздывание в данном случае учитывает диссипацию за счет феноменологического параметра α .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-51-45005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов А. Н., Потапов А. А., Рехвиашвили С. Ш. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 4. С. 9. (Bogolyubov A. N., Potapov A. A., Rekhviashvili S. Sh. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2009. **64**, N 4. P. 365.)
2. Боголюбов А. Н., Потапов А. А., Рехвиашвили С. Ш. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 3. С. 54. (Bogolyubov A. N., Potapov A. A., Rekhviashvili S. Sh. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2010. **65**, N 2. P. 150.)
3. Боголюбов А. Н., Кобликов А. А., Смирнова Д. Д., Шапкина Н. Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 5. С. 13. (Bogolyubov A. N., Koblikov A. A., Smirnova D. D., Shapkina N. E. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2012. **67**, N 5. P. 423.)
4. Боголюбов А. Н., Кобликов А. А., Смирнова Д. Д., Шапкина Н. Е. // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 12. С. 50.
5. Gomez J. F., Rosales J. J., Bernal J. J. et al. // arXiv:1108.6292v1 [math-ph] 31 Aug. 2011.
6. Rosales J. J., Gomez J. F., Guia M., Tkach V. I. // LFNM 2011, International Conference on Laser & Fiber-Optical Networks Modeling, 2011, 4–8 September, Kharkov, Ukraine. P. 1–3.
7. Nasrolahpour H. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2013. **18**. P. 2589.
8. Дубинов А. Е., Селемир В. Д. В кн.: Фракталы в прикладной физике. Арзамас-16: ВНИИЭФ, 1995. С. 5–19.
9. Тарасов В. Е. // ТМФ. 2009. **158**, № 3. С. 419.
10. Tarasov V. E. // Annals of Physics. 2008. **323**. P. 2756.
11. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Tarasov V. (Ed.) Volume 5: Applications in Physics, Part B, De Gruyter: Berlin, Germany, 2019.
12. Олемской А. И., Флат А. Я. // УФН. 1993. **163**, № 12. С. 1.
13. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005.
14. Псху А. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. **73**, № 2. С. 141.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973.

Retarded Potentials in Fractional Electrodynamics**A. V. Pskhu, S. Sh. Rehviashvili^a***Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik 360000, Russia.**E-mail: ^arsargo@mail.ru.*

A general expression is obtained for retarded potentials for a system of equations of macroscopic electrodynamics with fractional Caputo derivatives with respect to time. An analog of the Lienard–Wiechert potentials is obtained. All expressions contain a nonlocal (time-distributed) delay, which takes the temporal dispersion in the system into account.

Keywords: classical electrodynamics, fractional integro-differentiation, memory effect, time dispersion, retarded potentials, Lienard–Wiechert potentials.

PACS: 41.20.-q.

Received 25 February 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 4. Pp. 316–319.

Сведения об авторах

1. Псху Арсен Владимирович — доктор физ.-мат. наук, зав. отделом.
2. Рехвиашвили Серго Шотович — доктор физ.-мат. наук, зав. отделом; e-mail: rsargo@mail.ru.