

СТАТЬИ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Существование стационарного погранслоного решения в уравнении реакция—диффузия с сингулярным граничным условием Неймана

Н. Н. Нефедов,^a Н. Н. Дерюгина^b

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 22.06.2020, после доработки 07.07.2020, принята к публикации 14.07.2020.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения типа реакция—диффузия с сингулярно-возмущенным краевым условием Неймана в замкнутой, односвязной двумерной области. С физической точки зрения задача описывает процессы с интенсивным потоком через границу заданной области. Доказано существование, построена асимптотика и установлены условия устойчивости по Ляпунову стационарного решения. Асимптотика решения построена с использованием классического алгоритма Васильевой с применением метода Люстерника—Вишика. Доказательство существования и устойчивости решения проведено с использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные задачи, уравнения реакция—диффузия, пограничные слои, асимптотические методы, дифференциальные неравенства.

УДК: 519.6. PACS: 02.60.Lj, 02.90.+p.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений параболического и эллиптического типов возникают в качестве описания различных процессов физики, химии, биофизики и в других прикладных задачах. В монографии Пао [1] были рассмотрены разные типы эллиптических задач и описаны их возможные применения. Физическому применению соответствующих математических моделей посвящена также обширная монография [2]. Ряд интересных физических приложений можно найти в [3, 4]. В приложениях такие уравнения широко используются для описания возбудимых пространственно-временных сред и носят название уравнений типа реакция—диффузия—адвекция. Они применяются как для исследования автоволн (аналогов известной реакции Белоусова—Жаботинского), так и для описания стационарных структур, определяющих динамику процесса. Параболические уравнения такого типа выступают в качестве математических моделей в нелинейной теории волн и носят название уравнений типа Бюргерса (см. [5, 6] и ссылки в этих работах). Уравнения типа реакция—диффузия могут описывать процессы с интенсивными источниками; в таком случае при дифференциальном операторе появляется малый параметр. Отличительная черта решения таких задач — переходные слои [7, 8]. Решения целого ряда задач имеют пограничный слой, то есть резкий переход вблизи границы рассматриваемой области.

В настоящей работе рассматривается задача с сингулярным граничным условием второго рода. Работа развивает и обобщает результаты работ [9, 10] на новый класс задач, представляющий интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается уравнение реакция—диффузия с сингулярно-возмущенным краевым условием Неймана в замкнутой, односвязной двумерной области D , ограниченной достаточно гладкой границей ∂D . Ниже будем предполагать, что граница ∂D задана параметрически: $x = \varphi(\theta)$, $y = \psi(\theta)$, где $0 \leq \theta \leq \Theta$ — параметр, при возрастании которого от 0 до Θ точка $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ проходит через каждую точку границы ∂D :

$$\begin{cases} \mathcal{N}u := \varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) = 0, \\ x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x), (x) \in \bar{D}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = \frac{h(x, t)}{\varepsilon}, x \in \partial D, t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D . С физической точки зрения задача описывает процессы с интенсивным потоком через границу заданной области. Данная работа ставит своей целью исследовать стационарное решение задачи (1). Это решение является решением эллиптической краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = \frac{h(x)}{\varepsilon}, \\ (x) \in D. \end{cases} \quad (2)$$

Правая часть граничного условия содержит малый параметр $\varepsilon > 0$, что соответствует наличию на границе ∂D интенсивных источников. Наличие малого параметра делает граничное условие Неймана сингулярным и приводит к наличию у решения более сложного пограничного слоя.

Цель работы — исследовать существование решения с пограничным слоем для задачи (2) и его устойчивость по Ляпунову.

^a E-mail: nefedov@phys.msu.ru

^b E-mail: derunat@gmail.com

Потребуем выполнения следующих условий:

- (A0) $f(u, x, \varepsilon)$ всюду в \bar{D} , $h(x)$ на границе ∂D и $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ при $0 \leq \theta \leq \Theta$ — достаточно гладкие функции.
 (A1) Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет корень $u = u_0(x)$: $f_u(u_0(x), x, 0) > 0$, $x \in \bar{D}$.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

2.1. Локальные координаты

Для описания решения близи ∂D введем в ее достаточно малой окрестности локальные координаты (r, θ) , где r — расстояние от заданной точки внутри этой окрестности до точки на границе ∂D с координатами $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ вдоль нормали к ∂D . Известно, что если граница достаточно гладкая (функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ имеют непрерывные по Гельдеру производные), то в достаточно малой окрестности границы существует взаимно-однозначное соответствие между исходными координатами (x_1, x_2) и локальными координатами (r, θ) , задаваемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(\theta) - r \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \\ x_2 = \psi(\theta) + r \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}. \end{cases}$$

Единичный вектор касательной \mathbf{k} и единичный вектор нормали \mathbf{n} к ∂D задаются формулами

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\psi_\theta / \varphi_\theta}{\sqrt{1 + \psi_\theta^2 / \varphi_\theta^2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\psi_\theta \\ \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \end{pmatrix}.$$

Переходя к новым переменным, получим для оператора задачи следующее выражение:

$$\mathcal{L} = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + H_\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{H_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{H_\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right),$$

где H_θ и H_r — коэффициенты Ламе:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial r} \right)^2} = 1,$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2}.$$

Введем растянутую переменную $\xi = \frac{r}{\varepsilon}$. Тогда, раскладывая коэффициенты при частных производных в ряды по степеням ε , получим для оператора задачи:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta} \psi_\theta - \psi_{\theta\theta} \varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{L}_i,$$

где \mathcal{L}_i — линейные дифференциальные операторы, содержащие частные производные $\frac{\partial}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Так как локальная координата r вводится как расстояние вдоль внутренней нормали к ∂D , то оператор граничного условия в локальных и растянутых переменных принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial n} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

2.2. Общий вид асимптотики

Асимптотику решения будем строить, используя стандартную схему алгоритма метода пограничных функций (см. [11, 12]), согласно которому искомая функция представляется в виде суммы

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi(\xi, \theta, \varepsilon). \quad (3)$$

В аналогичном виде представляется нелинейность:

$$\begin{aligned} f(u, x, \varepsilon) &= \bar{F} + \Pi f(u, \xi, \theta, \varepsilon) = f(\bar{u}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \\ &+ f\left(\bar{u}(\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon\right) + \\ &+ \Pi(\xi, \theta, \varepsilon), \varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon) - \\ &- f\left(\bar{u}(\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon\right), \\ &\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon). \end{aligned}$$

В этих представлениях $\bar{u}(x, \varepsilon)$ — регулярная часть асимптотики, описывает функцию u вдали от границы ∂D , а $\Pi(\xi, \theta, \varepsilon)$ — погранслоная часть асимптотики, описывает решение вблизи границы ∂D . Оба слагаемых представляются в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$$

$$\Pi(\xi, \theta, \varepsilon) = \Pi_0(\xi, \theta) + \varepsilon \Pi_1(\xi, \theta) + \dots$$

Разложим в ряды по степеням ε \bar{F} и Πf , используя обозначения:

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(\bar{u}_0(x), x, 0), \\ \tilde{f}(\xi, \theta) = f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \Pi_0(\xi, \theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) \\ = f(\bar{u}_0(0, \theta) + \Pi_0(\xi, \theta), 0, \theta, 0), \end{cases}$$

и аналогичные обозначения будем использовать для производных этих функции (старые или новые координаты в представлении для погранслоной части нелинейности можно использовать, учитывая специфику задачи, из соображений удобства).

2.3. Регулярная часть

Подставляя (3) в исходную задачу (2) и разделяя стандартным образом эту задачу на задачи для регулярной и погранслоной частей, получим последовательность задач для определения коэффициентов регулярной и погранслоной частей асимптотического приближения. Для $\bar{u}_0(x)$ получим: $f(\bar{u}_0(x), x, 0) = 0$. С учетом условия (A1) $\bar{u}_0(x) = u_0(x)$. Первый порядок функции регулярной части определяется из уравнения: $\bar{f}_u(x) \bar{u}_1 = -\bar{f}_\varepsilon(x)$. Произвольный порядок функции регулярной части определяется из уравнения вида: $\bar{f}_u(x) \bar{u}_k = F_k(x)$, где $F_k(x)$ — известная на каждом шаге функция, зависящая от коэффициентов регулярной части асимптотического приближения предыдущих порядков.

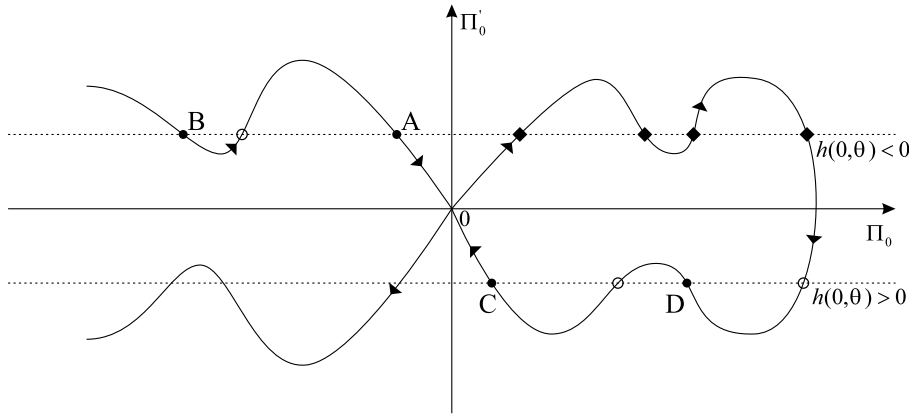


Рисунок. Пример фазовой плоскости задачи (4) при фиксированном θ

2.4. Погранслоинная часть

Задача для нулевого порядка погранслоинной части решения имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} = f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \Pi_0, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0), \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = h(0, \theta), \\ \Pi_0(\infty, \theta) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Задача (4) — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (θ играет роль параметра), которое можно проанализировать на фазовой плоскости (Π_0, Π'_0) (рисунок).

Точка $(0, 0)$ на фазовой плоскости — точка покоя типа седла. Задача (4) имеет решение, если прямая $\Pi'_0 = h(0, \theta)$ пересекает сепаратрису, идущую в точку $(0, 0)$. Из анализа фазовой плоскости видно, что таких решений может быть несколько. Ниже показано, если при $\xi = 0$ значение (Π_0, Π'_0) , $0 \leq \theta \leq \Theta$ попадает в точки A, B, C, D , то, двигаясь от них по сепаратрисе к точке $(0, 0)$, можно получить решение задачи (4). Сформулируем условия отбора решений:

(A2) Уравнение

$$\pm \left(2 \int_0^s f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \sigma, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) d\sigma \right)^{1/2} = h(0, \theta)$$

для каждого фиксированного θ имеет корень $s = s(\theta)$ такой, что $f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + s(\theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) > 0$ при $s(\theta) > 0$ и $f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + s(\theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) < 0$ при $s(\theta) < 0$.

Отметим, что точки, обозначенные на рисунке квадратиками для $\Pi_0(0, \theta) > 0$, соответствуют решениям с немонотонным пограничным слоем, так как, двигаясь от этих точек по сепаратрисе к седлу $(0, 0)$, производная Π_0 переходит через нулевое значение и меняет знак. Исследование таких типов решений, а также решений, которые соответствуют точкам, обозначенным на рисунке незакрашенными кружками, в данной работе не проводится.

Задача для первого порядка погранслоинной части имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_1 = G_1(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{\partial \bar{u}_0(0, \theta)}{\partial r}, \\ \Pi_1(\infty, \theta) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} G_1(\xi, \theta) = & (\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) \times \\ & \times \left(\bar{u}_1(\varphi(\theta), \psi(\theta)) - \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_1} \Big|_{(\varphi(\theta), \psi(\theta))} + \right. \\ & \left. + \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_2} \Big|_{(\varphi(\theta), \psi(\theta))} \right) - \\ & - \tilde{f}_{x_1}(\xi, \theta) \cdot \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \tilde{f}_{x_2}(\xi, \theta) \cdot \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \tilde{f}_\varepsilon(\xi, \theta) + \\ & + \bar{f}_{x_1}(x) \cdot \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} - \bar{f}_{x_2}(x) \cdot \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} - \\ & - \bar{f}(x)_\varepsilon - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta} \psi_\theta - \psi_{\theta\theta} \varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}}. \end{aligned}$$

Решение этой задачи может быть получено явно:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi, \theta) = & \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \left(-\frac{\partial \bar{u}_0(0, \theta)}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_1(\chi, \theta) d\chi \right) - \\ & - z(\xi, \theta) \int_0^\infty \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_1(\chi, \theta) d\chi d\eta, \end{aligned}$$

где $z(\xi, \theta) = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi}$.

Используя предложенную схему, можно построить асимптотику произвольного порядка (k):

$$U_k = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + \Pi_i(\xi)).$$

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

3.1. Существование решения

Для доказательства существования решения используем схему асимптотического метода дифференциальных неравенств (см., например, [7, 18] и ссылки в этих работах). Для этого построим в области \bar{D} верхнее и нижнее решение задачи (2) — $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$. Для удобства напомним определение этих функций:

(B1): $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$, для $x \in \bar{D}$.

(B2): $\mathcal{L}(\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}(\alpha)$ для $x \in \bar{D}$.

(B3): $\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} \leq h(x) \leq \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D}$.

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию $(n+1)$ -го порядка построенной асимптотики:

$$\begin{cases} \alpha(x, \varepsilon) = U_n + \varepsilon^{n+1} (\bar{u}_{n+1}(x) - \gamma + \\ + \Pi_{n+1}(\xi, \theta) + \Pi_\alpha(\xi, \theta)), \\ \beta(x, \varepsilon) = U_n + \varepsilon^{n+1} (\bar{u}_{n+1}(x) + \gamma + \\ + \Pi_{n+1}(\xi, \theta) + \Pi_\beta(\xi, \theta)). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\gamma > 0$. Функции $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ определяются из задач, аналогичных (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_\alpha}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_\alpha = G_\alpha(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\delta, \\ \Pi_\alpha(\infty, \theta) = 0; \\ \frac{\partial^2 \Pi_\beta}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_\beta = G_\beta(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \delta, \\ \Pi_\beta(\infty, \theta) = 0, \end{cases}$$

где $G_\alpha(\xi, \theta) = -\gamma(\tilde{f}(\xi, \theta)_u - \bar{f}(x)_u) + Ae^{-\kappa\xi}$, $G_\beta(\xi, \theta) = -\gamma(\tilde{f}(\xi, \theta)_u - \bar{f}(x)_u) - Ae^{-\kappa\xi}$. Можно показать, что для функции $\Pi_0(\xi, \theta)$ выполняется экспоненциальная оценка $|\Pi_0(\xi, \theta)| \leq Ce^{-\kappa\xi}$, где $C > 0$ и $\kappa > 0$. Отсюда следует экспоненциальная оценка выражения $(\tilde{f}(\xi, \theta)_u - \bar{f}(x)_u)$ и, следовательно, можно подобрать такие числа A и κ , что G_α будет положительной, а G_β — отрицательной экспоненциально убывающими функциями.

Функции $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ определяются в явном виде с помощью формул, аналогичных формуле для $\Pi_1(\xi, \theta)$:

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(\xi, \theta) &= \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \delta + \\ &+ \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_\alpha(\chi, \theta) d\chi - \\ &- z(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_\alpha(\chi, \theta) d\chi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\beta(\xi, \theta) &= \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} (-\delta) + \\ &+ \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_\beta(\chi, \theta) d\chi - \\ &- z(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_\beta(\chi, \theta) d\chi d\eta. \end{aligned}$$

Стандартным образом устанавливается, что для $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ справедливы экспоненциальные оценки. Несложно также показать, что в силу условия (A2) $\Pi_\alpha(\xi, \theta) < 0$, $\Pi_\beta(\xi, \theta) > 0$, что обеспечивает условие упорядоченности верхнего и нижнего решений (B1).

Проверим теперь выполнение условия (B2). Подставим выражения для верхнего и нижнего решений (6) в исходный оператор задачи (2). Имеем:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\alpha(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} (G_\alpha + \bar{f}_u(x)\gamma) + O(\varepsilon^{n+2}), \\ \mathcal{L}\beta(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} (G_\beta - \bar{f}_u(x)\gamma) + O(\varepsilon^{n+2}). \end{cases}$$

В силу условия (A1), положительности G_α и отрицательности G_β условие (B2) выполнено.

Для проверки выполнения условия (B3) подставим (6) в граничный оператор задачи (2).

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} &= h(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= h(x) - \varepsilon^n \delta + O(\varepsilon^{n+1}) < h(x), \\ \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D} &= h(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= h(x) + \varepsilon^n \delta + O(\varepsilon^{n+1}) > h(x). \end{aligned}$$

Таким образом, для функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ выполнены все условия (B1)–(B3). Из результатов работ по теоремам сравнения (см., например, [1]) следует, что существует решение задачи (2), для которого выполняется неравенство: $\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$ при $x \in \bar{D}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A0)–(A2). Тогда при достаточно малом ε для выбранной согласно условию (A2) функции $\Pi_0(\xi, \theta)$ существует соответствующее ей решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2) с пограничным слоем вблизи ∂D , для которого функция $U_n(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью ε^{n+1} при $x \in \bar{D}$.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Метод дифференциальных неравенств позволяет также доказать асимптотическую устойчивость по Ляпунову решения (3) как стационарного решения параболической задачи (1). Для этого строятся нестационарные верхнее и нижнее решения задачи (1) в виде $\bar{\alpha}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))$, $\bar{\beta}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))$, где $\lambda(\varepsilon) > 0$ достаточно мало. Очевидно, что $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. Можно показать, что $\mathcal{N}_\varepsilon \bar{\beta} < 0$ и $\mathcal{N}_\varepsilon \bar{\alpha} > 0$. Доказательство

аналогичных неравенств представлено, например, в работах [10] и [17]. При этом в качестве $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ можно взять модификацию асимптотики первого порядка — $\alpha_1(x, \varepsilon)$ и $\beta_1(x, \varepsilon)$. Таким образом, для решений, описанных теоремой 1, доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову с областью притяжения по крайней мере $[\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A0)–(A2). Тогда каждое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2), существование которого гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$ и, следовательно, $u(x, \varepsilon)$ — единственное решение задачи (2) в этой области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен новый класс задач с сингулярно возмущенным граничным условием второго рода. Построена формальная асимптотика произвольного порядка точности, получены условия на оператор задачи, обеспечивающие существование устойчивого решения с пограничным слоем. Доказательство существования и устойчивости решения проведено по схеме асимптотического метода дифференциальных решений. В работе также выделены условия, реализующие наличие немонотонного пограничного слоя, что определяет возможный вектор дальнейших исследований в данной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00327).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pao C. // *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Springer Science Business Media, 1993.
2. Volpert V. // *Elliptic Partial Differential Equations*. Birkhauser, 2011.

3. Жуковский К. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 1. С. 45. (Zhukovsky K. V. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 2018. **73**, N 1. P. 45.)
4. Жуковский К. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 3. С. 18. (Zhukovsky K. V. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 2016. **71**, N 3. P. 237.)
5. Руденко О. В. // ДАН. 2016. **471**, № 6. С. 451.
6. Нефедов Н. Н., Руденко О. В. // ДАН. 2018. **478**, № 3. С. 274.
7. Nefedov N. // *Diff. Eq.* 2000. **36**, N 2. С. 298.
8. Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т., Орлов А. О. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 6. С. 3. (Nefedov N., Levashova N., Orlov A. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 2018. **73**, N 6. P. 565.)
9. Butuzov V., Nefedov N., Recke L., Schneider K. // *Int. Journ. of Bifurcation and Chaos*. 2014. **24**, N 8.
10. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2020. № 2. С. 15. (Nefedov N., Nikulin E. I. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 2020. **75**, N 2. P. 116.)
11. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. // Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
12. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. Высш. школа. М., 1990.
13. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2010. **268**. С. 268.
14. Nefedov N., Recke L., Schneider K. // *Journal of Mathematical Analysis and Application*. 2013. **405**, N 1. P. 90.
15. Nefedov N., Sakamoto K. // *Hiroshima Mathematical Journal*. 2003. **33**, N 3. P. 391.
16. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. **4**, № 3. С. 799.
17. Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О. // *Журнал вычислительной математики и математической физики* **59**, № 4. С. 76.
18. Nefedov N. // *Lecture Notes in Computer Science*. 2013. **8236**. P. 62.
19. Nefedov N., Rudenko O. // ДАН. 2018. **97**. С. 99.

The Existence of a Boundary–Layer Stationary Solution to a Reaction–Diffusion Equation with Singularly Perturbed Neumann Boundary Condition

N. N. Nefedov^a, N. N. Deryugina^b

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: ^anefedov@phys.msu.ru, ^bderunat@gmail.com.

This paper considers an initial–boundary value problem for a reaction–diffusion equation with a singularly perturbed Neumann boundary condition in a closed, simply connected two–dimensional domain. From a physical point of view, the problem describes processes with an intensive flow through the boundary of a given area. The existence of a stationary solution is proved, its asymptotic is constructed, and the Lyapunov stability conditions for it are established. The asymptotics of the solution are constructed by the classical Vasilieva algorithm using the Lusternik–Vishik method. The existence and stability of the solution are proved using the asymptotic method of differential inequalities.

Keywords: singularly perturbed elliptic problems, reaction–diffusion, boundary layer, asymptotic methods, differential inequalities.

PACS: 02.60.Lj, 02.90.+p.

Received 22 June 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 5. Pp. 409–414.

Сведения об авторах

1. Нефедов Николай Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой; тел.: (495) 939-48-59, e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
2. Дерюгина Наталья Николаевна — аспирант; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: derunat@gmail.com.