

Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении

Е. А. Михайлов^a

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 13.06.2020, после доработки 24.06.2020, принята к публикации 27.06.2020.

В настоящий момент одной из наиболее распространенных моделей генерации магнитных полей галактик является планарное приближение в теории динамо. Оно позволяет свести задачу об эволюции магнитного поля к решению системы из двух уравнений для компонент, лежащих в плоскости диска. Как правило, исследование подобных задач осуществляется численно. Вместе с тем в ряде случаев данная система уравнений допускает возможность аналитического решения, которое позволяет ответить на ряд важных принципиальных вопросов. В настоящей работе представлено спектральное разложение решения соответствующей задачи, определены критические значения динамо-чисел для различных мод решения.

Ключевые слова: магнитные поля галактик, теория динамо, спектральное разложение, функции Бесселя.

УДК: 537.84. PACS: 47.65.-d.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время хорошо известно, что ряд галактик обладают крупномасштабными магнитными полями [1–3]. Мысль об их существовании в Млечном Пути впервые возникла при изучении пространственного распределения космических лучей в середине прошлого века: так, если бы магнитных полей не существовало, то заряженные частицы, движущиеся под большим углом к экваториальной плоскости, «прошивали» бы Галактику за достаточно малое время, и мы могли бы принимать лишь те из них, которые приходят из сравнительно небольшой части небесной сферы [4]. Вместе с тем они распределены по ней сравнительно равномерно. Другим свидетельством наличия магнитного поля является спектр синхротронного излучения, которые демонстрирует «завал» в области определенных частот. Такой способ оценки величины космических магнитных полей был впервые предложен Ферми [5], Альфвену и Герлофсоном [6]. Важно также отметить работу В. Л. Гинзбурга [7], которая тоже содержит оценку величины галактического поля с помощью синхротронного излучения. Им же была детально описана идея измерения магнитных полей галактик с помощью измерений фарадеевского вращения поляризованного радиоизлучения [8], которые в настоящее время являются основным методом исследования галактического магнетизма [9–13]. Они позволили получить достаточно подробную информацию о магнитных полях таких объектов, как Млечный Путь, галактики М31, М51 и многих других [13–15].

С теоретической точки зрения генерация магнитных полей галактик так же, как и в случае Солнца, других звезд, планет и т. д., исследуется, как правило, с помощью методов теории динамо, описывающей переход энергии турбулентных движений в энергию магнитного поля [16–18]. Это связано с двумя основными эффектами: альфа-эффектом (который описывает закрученность турбулентных движений

межзвездной среды) и дифференциальным вращением (связанным с тем, что галактический диск вращается нетвердотельно). Они конкурируют с турбулентной диффузией, которая стремится разрушить крупномасштабные структуры поля. По этой причине механизм динамо является пороговым эффектом и может работать лишь в случаях, когда процессы, способствующие генерации магнитного поля, являются более интенсивными, чем диффузия [2].

Для галактик в середине 1990-х годов прошлого века было предложено так называемое планарное приближение (иногда называемое в англоязычной литературе термином «*po-z model*»), которое описывает процесс генерации магнитных полей в тонких дисках (к которым относятся и галактики) [19–21]. Оно сводит задачу поиска магнитного поля к решению системы из двух уравнений, описывающих компоненты магнитного поля, лежащие в плоскости диска. Вертикальная компонента поля считается достаточно малой, а ее частная производная по направлению, перпендикулярному к экваториальной плоскости, может быть выражена с помощью условия соленоидальности магнитного поля.

Отметим, что результаты, которые дает планарное приближение, могут быть использованы для исследования магнитных полей других объектов. Так, в ряде работ было продемонстрировано, что оно дает ряд интересных результатов при изучении магнетизма аккреционных дисков [22], образующихся около массивных тел, таких как черные дыры, нейтронные звезды и белые карлики.

Учитывая бурное развитие вычислительной техники, подавляющее большинство работ, связанных с планарным приближением, использовали численные методы их решения [20, 21, 23–26]. Вместе с тем численное моделирование не дает ответы на все вопросы: так, оно не всегда дает возможность полноценного качественного понимания происходящих процессов. При этом аналитические оценки, как правило, делались только на самом простом уровне. В то же время система уравнений в ряде практически важных случаев может быть решена

^a E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

в виде спектрального разложения по собственным функциям соответствующего оператора [27–29].

В настоящей работе представлено решение задачи о генерации магнитного поля в осесимметричном случае в виде суммы соответствующего функционального ряда. Исходя из вида решения приводятся значения критического динамо-числа, которое уточняется с учетом вычисленных собственных значений. Результаты сравниваются с тем, что можно получить исходя из более простых соображений (с использованием так называемого локального приближения, не учитывающего диссипации в плоскости галактического диска) [27]. Также обсуждается вопрос о возможности генерации магнитного поля, не обладающего осевой симметрией.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАНАРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Галактическое магнитное поле по современным представлениям состоит из двух основных компонент. Первая имеет характерный масштаб изменения, соответствующий размеру турбулентных ячеек (в случае галактик это около 50–100 пк) [2]. Кроме того, в галактике присутствует так называемая крупномасштабная составляющая \mathbf{V} , которую можно получить в результате усреднения по соответствующим масштабам. Ее эволюция описывается с помощью так называемого уравнения Штеенбека–Краузе–Рэдлера [28] (или уравнения динамо среднего поля):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) + \nabla (\alpha \mathbf{V}) + \eta \Delta \mathbf{V},$$

где \mathbf{V} — крупномасштабная составляющая скорости, α — коэффициент, отвечающий за альфа-эффект (характеризует закрученность мелкомасштабных движений), η — коэффициент турбулентной диффузии [20].

Будем использовать цилиндрическую систему координат, в которой расстояние r — расстояние до оси вращения галактики, φ — азимутальный угол, а ось z соответствует оси вращения галактики. В простейшем случае можно описать магнитное поле, решая задачу в прямоугольном цилиндре $0 < r < R$, $-h < z < h$, где R — радиус галактики, h — ее полутолщина. Для магнитного поля возможно считать, что его значение на оси вращения и на границе данного цилиндра равняется нулю [21].

Согласно планарному приближению основную роль играют компоненты магнитного поля B_r и B_φ , лежащие в плоскости диска. Их зависимость от вертикальной координаты в осесимметричном случае предполагается следующей [21]:

$$B_r(r, \varphi, z, t) = B_r(r, 0, 0, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right),$$

$$B_\varphi(r, \varphi, z, t) = B_\varphi(r, 0, 0, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).$$

В таком случае векторный оператор Лапласа может быть переписан следующим образом:

$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{1}{4h^2} \mathbf{V} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{V} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{V} - \frac{1}{r^2} \mathbf{V}.$$

Для коэффициента, характеризующего альфа-эффект, можно считать, что он зависит только от

расстояния до экваториальной плоскости и может быть описан при помощи следующей модели [21]:

$$\alpha(z) = \alpha_0 \frac{z}{h},$$

где α_0 — типичное значение параметра, связанного с альфа-эффектом.

Если считать, что крупномасштабная скорость связана только с вращением галактики вокруг своей оси, то для нее можно записать следующее выражение [21]:

$$\mathbf{V} = r\Omega \mathbf{e}_z,$$

где Ω — угловая скорость вращения галактики.

Кроме того, удобно измерять расстояния в единицах R , а времена в единицах $\frac{h^2}{\eta}$. В таком случае с учетом предположений, высказанных выше, векторное уравнение Штеенбека–Краузе–Рэдлера можно свести к системе из двух скалярных уравнений [20]:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} \right\}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}. \quad (2)$$

В данной системе уравнений введены безразмерные коэффициенты: $R_\alpha = \frac{\alpha_0 h}{\eta}$ описывает альфа-эффект, $R_\omega = -r \frac{h^2}{\eta} \frac{d\Omega}{dr}$ характеризует дифференциальное вращение, а $\lambda = \frac{h}{R}$ описывает диссипацию магнитного поля в плоскости диска. Для большого числа объектов можно полагать, что они мало меняются с расстоянием до оси вращения объекта. Их значения имеют следующий порядок [20]:

$$R_\alpha = O(1), \quad R_\omega = O(10), \quad \lambda = O(10^{-2}).$$

Отметим, что с учетом использованной замены переменных, наша область будет описываться значениями $0 < r < R$ и $-h < z < h$. В качестве граничных условий можно использовать такие [20, 21]:

$$B_r|_{z=\pm h} = B_r|_{r=0} = B_r|_{r=R} =$$

$$= B_\varphi|_{z=\pm h} = B_\varphi|_{r=0} = B_\varphi|_{r=R} = 0.$$

В простейшем случае можно получить базовые оценки возможности генерации магнитного поля, пренебрегая слагаемым, связанным с оператором Лапласа (полагая $\lambda = 0$.) В таком случае задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений [30]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r;$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi.$$

Поиск решения в виде $B_r = B_{r0} \exp(\gamma t)$, $B_\varphi = B_{\varphi0} \exp(\gamma t)$ приводит к задаче поиска собственных значений матрицы 2×2 , которые выражаются так:

$$\gamma = -\frac{\pi^2}{4} \pm \sqrt{R_\alpha R_\omega}.$$

В таком случае решение системы уравнений выражается при помощи формул:

$$B_r = \frac{1}{2} \left(B_r(0) - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} B_\varphi(0) \right) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(B_r(0) + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} B_\varphi(0) \right) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} \right) \right),$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \left(B_r(0) - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} B_\varphi(0) \right) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} \right) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \left(B_r(0) + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} B_\varphi(0) \right) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} \right) \right).$$

В подобных задачах удобно ввести так называемое динамо-число $D = R_\alpha R_\omega$. Учитывая, что на большом расстоянии от оси вращения $\frac{\partial \Omega}{\partial r} \approx -\frac{\Omega}{r}$ для параметра, характеризующего альфа-эффект, можно полагать, что $\alpha_0 = \frac{\Omega l^2}{h}$ (l — характерный размер турбулентной ячейки), а для коэффициента турбулентной диффузии имеет место оценка $\eta = \frac{1}{3} l v$ (где v — дисперсия скоростей турбулентных движений), для динамо-числа можно получить следующую оценку:

$$D = \frac{9h^2 \Omega^2}{v^2}. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что γ может принимать неотрицательные значения только при условии, когда

$$D > D_{cr} = \frac{\pi^4}{16}. \quad (4)$$

Учитывая, что (3) содержит величины, которые могут быть измерены в астрономических наблюдениях, для большого числа галактик можно получить разумные оценки возможности генерации в них магнитных полей. Вместе с тем как наблюдения, так и численное решение уравнений магнитной гидродинамики показывают, что для устойчивой генерации магнитных полей необходимы большие значения динамо-числа, нежели требует выражение (4). Все это обуславливает необходимость более анализа решений более полной системы уравнений (1), (2).

2. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С точки зрения поиска решений системы уравнений (1)–(2) удобно ввести следующие вспомогательные функции:

$$y(r, t) = \frac{B_\varphi \sqrt{R_\alpha} - B_r \sqrt{R_\omega}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}}, \quad (5)$$

$$z(r, t) = \frac{B_r \sqrt{R_\omega} + B_\varphi \sqrt{R_\alpha}}{\sqrt{R_\alpha R_\omega}}. \quad (6)$$

Уравнения для данных функций можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -z \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \right\}. \quad (8)$$

Граничные условия для данной задачи выглядят следующим образом:

$$y(0, t) = y(1, t) = z(0, t) = z(1, t) = 0.$$

Начальные условия можно получить с помощью перехода от начальных данных для \mathbf{B} по формулам (5), (6).

Как и во многих других случаях, можно искать решение уравнения (7) в виде:

$$y(r, t) = \tilde{y}(r) \exp(pt),$$

где $\tilde{y}(r)$ — функция, зависящая только от координаты, а p — некоторый параметр, который можно найти в ходе решения задачи на собственные значения:

$$p\tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \lambda^2 \left\{ \frac{d^2 \tilde{y}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{y}}{dr} - \frac{\tilde{y}}{r^2} \right\}.$$

Данное уравнение удобно переписать в форме

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{y}}{dr^2} + r \frac{d\tilde{y}}{dr} + r^2 \tilde{y} \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right) - \tilde{y} = 0.$$

Введем следующую замену переменной:

$$x = \frac{r}{\lambda} \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p \right)^{1/2}.$$

В таком случае для функции \tilde{y} можно будет записать следующее уравнение:

$$x^2 \frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2} + x \frac{d\tilde{y}}{dx} + (x^2 - 1) \tilde{y} = 0.$$

Решением данного уравнения будут функции Бесселя и Неймана первого порядка [30]. С учетом того, что функция Неймана обращается в бесконечность в нуле, граничным условиям удовлетворяет только функция Бесселя:

$$\tilde{y}_n(r) = J_1(x) = J_1 \left(\frac{r}{\lambda} \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_n \right)^{1/2} \right).$$

Чтобы удовлетворить правому граничному условию при $r = 1$, необходимо потребовать следующего:

$$J_1 \left(\frac{1}{\lambda} \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_n \right)^{1/2} \right) = 0.$$

Таким образом, для определения коэффициента p_n мы можем получить такое выражение:

$$\frac{1}{\lambda} \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - p_n \right)^{1/2} = j_{1,n},$$

где $j_{1,n}$ — n -й нуль функции Бесселя первого порядка. Для p_n мы в таком случае можем получить

$$p_n = -\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \lambda^2 (j_{1,n})^2.$$

Сама функция \tilde{y} будет выглядеть так:

$$\tilde{y}_n(r) = J_1(r j_{1,n}).$$

Тогда решение для функции $y(r, t)$ можно записать в виде следующего ряда:

$$y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \tilde{y}_n(r) \exp(p_n t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r j_{1,n}) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right) \right).$$

Коэффициенты Y_n можно определить исходя из начальных условий:

$$y(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \tilde{y}_n(r),$$

$$Y_n = \frac{\int_0^1 y(r, 0) J_1(r j_{1,n}) dr}{\int_0^1 (J_1(r j_{1,n}) dr)^2} = \frac{2 \int_0^1 y(r, 0) J_1(r j_{1,n}) dr}{(J_1'(r j_{1,n}) dr)^2}.$$

Для функции $z(r, t)$ можно аналогично искать решение в виде:

$$z(r, t) = \tilde{z}(r) \exp(q t),$$

Это приводит нас к следующему уравнению:

$$q \tilde{z} = -\tilde{z} \sqrt{R_\alpha R_\omega} + \lambda^2 \left\{ \frac{d^2 \tilde{z}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \tilde{z}}{dr} - \frac{\tilde{z}}{r^2} \right\}.$$

Это такая же задача на собственные значения, решение которой выражается так:

$$\tilde{z}_n(r) = J_1(r j_{1,n}),$$

где

$$q_n = -\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,n})^2.$$

Полное решение выражается так [27]:

$$z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \tilde{z}_n(r) \exp(q_n t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r j_{1,n}) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right) \right).$$

Для коэффициентов можно получить, что

$$Z_n = \frac{\int_0^1 z(r, 0) J_1(r j_{1,n}) dr}{\int_0^1 (J_1(r j_{1,n}) dr)^2} = \frac{2 \int_0^1 y(r, 0) J_1(r j_{1,n}) dr}{(J_1'(r j_{1,n}) dr)^2}.$$

С целью удобства представления решения можно построить его приближение. Напомним, что при достаточно больших значениях переменной x функция Бесселя выражается так [27]:

$$J_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

Она обратится в нуль при

$$x_n - \frac{3\pi}{4} = \pi n - \frac{\pi}{2}.$$

Тогда для нулей функции Бесселя можно приближенно получить, что

$$j_{1,n} \cong x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n = \pi \left(n + \frac{1}{4} \right).$$

Решение в таком случае представляется в форме:

$$y(r, t) \cong \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1 \left(\pi \left(n + \frac{1}{4} \right) r \right) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2 \right) \right).$$

Учитывая, что производная тогда выглядит

$$J_1'(j_{1,n}) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)}},$$

коэффициенты разложения будут такими:

$$Y_n \approx \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right) \int_0^1 y(r, 0) J_1(r j_{1,n}) dr.$$

Решение для другой функции переписывается так:

$$z(r, t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1 \left(\pi \left(n + \frac{1}{4} \right) r \right) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2 \right) \right),$$

где:

$$Z_n \approx \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right) \int_0^1 z(r, 0) J_1(r j_{1,n}) dr.$$

Для решения исходной задачи о магнитном поле можно тогда записать следующее выражение:

$$B_r(r, t) = -\sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r j_{1,n}) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right) \right) + \sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r j_{1,n}) \times \exp \left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
 B_\varphi(r, t) = & \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r j_{1,n}) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right)\right) + \\
 & + \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r j_{1,n}) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,n})^2\right)\right).
 \end{aligned}$$

В приближенном варианте это может быть переписано так:

$$\begin{aligned}
 B_r(r, t) \cong & -\sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1\left(\pi \left(n + \frac{1}{4}\right) r\right) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right)\right) + \\
 & + \sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1\left(\pi \left(n + \frac{1}{4}\right) r\right) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right)\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_\varphi(r, t) \cong & \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1\left(\pi \left(n + \frac{1}{4}\right) r\right) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right)\right) + \\
 & + \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1\left(\pi \left(n + \frac{1}{4}\right) r\right) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right)\right).
 \end{aligned}$$

Отметим, что слагаемые в решении, отвечающие $z(r, t)$, соответствуют отрицательным собственным значениям q_n . Это означает, что со временем они будут затухать. Кроме того, можно отметить, что $p_1 > p_2 > \dots > p_n > p_{n+1} > \dots$, поэтому со временем ключевую роль будет играть первое слагаемое, и приближенное решение можно представить так:

$$\begin{aligned}
 B_r(r, t) \approx & -\frac{5}{4} \pi^2 \sqrt{R_\alpha} \times \\
 & \times \left\{ \int_0^1 y(r, 0) J_1\left(\frac{5}{4} \pi r\right) dr \right\} J_1\left(\frac{5}{4} \pi r\right) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{25}{16} \lambda^2 \pi^2\right)\right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_\varphi(r, t) \approx & \frac{5}{4} \pi^2 \sqrt{R_\omega} \times \\
 & \times \left\{ \int_0^1 y(r, 0) J_1\left(\frac{5}{4} \pi r\right) dr \right\} J_1\left(\frac{5}{4} \pi r\right) \times \\
 & \times \exp\left(t \left(-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{25}{16} \lambda^2 \pi^2\right)\right). \quad (10)
 \end{aligned}$$

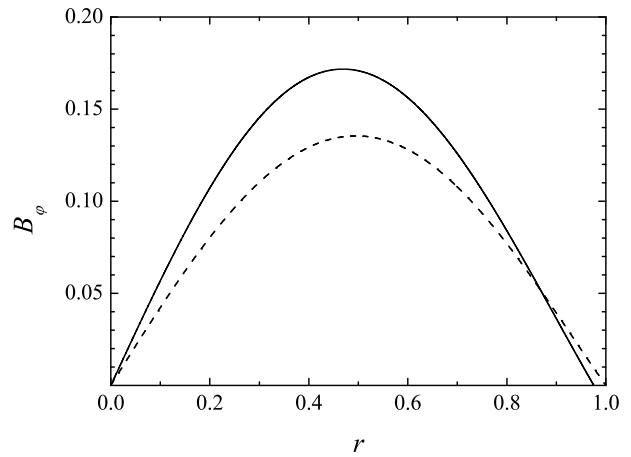


Рисунок. Зависимость азимутальной компоненты магнитного поля от расстояния до оси вращения при $t = 5$. Сплошная линия показывает результат, даваемый приближенной формулой, пунктирная — численное решение

Проверим, насколько результат, даваемый приближенными формулами (9), (10), соответствует решению исходной задачи. На рисунке показана азимутальная компонента магнитного поля, даваемая введенным приближением, и численный результат при $R_\alpha = 1$, $R_\omega = 10$, $\lambda = 0.05$ и следующих начальных условиях:

$$B_r(r, 0) = 0,$$

$$B_\varphi(r, 0) = 0.01 \cdot \sin(\pi r).$$

Можно отметить, что результаты оказываются достаточно близки друг к другу.

Совершенно очевидно, что хотя бы одно растущее решение имеется в том случае, когда

$$p_1 > 0.$$

Это приводит к следующему выражению:

$$-\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \lambda^2 (j_{1,1})^2 > 0.$$

Для динамо-числа мы приходим к такому условию:

$$D > \left(\frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 (j_{1,1})^2\right)^2.$$

Учитывая приближенное значение $j_{1,1}$, это означает, что

$$D_{cr} \cong \frac{\pi^4}{16} (1 + 25\lambda^2)^2.$$

Так, для $\lambda = 0.05$ значение D_{cr} увеличивается с 6.09 до 6.47, что является достаточно значимым изменением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе было построено спектральное разложение для решения задачи о генерации магнитного поля в галактиках и других объектах, имеющих форму диска. В рамках задачи предполагалось, что магнитное поле является осесимметричным и описывается с помощью планарного приближения.

Вычислены критические значения динамо-числа, основанные на величинах собственных значений соответствующего дифференциального оператора.

Отметим, что, хотя галактики и обладают спиральной структурой, по современным представлениям осесимметричная модель для галактического магнитного поля является вполне разумной. С одной стороны, измерения магнитного поля показывают, что области наибольшего магнитного поля вовсе не обязательно соответствуют спиральным рукавам [32], с другой — генерация магнитного поля, зависящего от азимутального угла, должна соответствовать большим значениям динамо-числа и происходить несколько медленнее, чем осесимметричной моды.

Показано, что результаты данной работы не противоречат данным численного моделирования. Вместе с тем они могут быть использованы для качественного анализа магнитного поля и его оценки в различных галактических объектах.

Автор выражает благодарность Д. Д. Соколову за обсуждение данной статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-02-00085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beck R., Brandenburg A., Moss D. et al. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1996. **34**. P. 155.
2. Arshakian T., Beck R., Krause M., Sokoloff D. // Astron. Astrophys. 2009 **494**. P. 21.
3. Beck R., Chamandy L., Elson E., Blackman E.G. // Galaxies. 2019. **8**. P. 4.
4. Бочкарев Н. Г. // Магнитные поля в космосе. М., 2011.
5. Fermi E. // Phys. Rev. 1949. **75**. P. 1169.
6. Alfven H., Herlofson N. // Phys. Rev. 1950. **78**. P. 616.
7. Ginzburg V. // Symposium — International Astronomical Union. 1959. **9**. P. 589.
8. Гинзбург В. Л. // Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1960.
9. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // Магнитные поля в астрофизике. М., 2006.
10. Manchester R. N. // Astrophys. J. 1972. **172**. P. 43.
11. Brentjens M. A., de Bruyn A. G. // Astron. Astrophys. 2005. **441**. P. 1217.
12. Van Eck C. L., Brown J. C., Shukurov A., Fletcher A. // Astrophys. J. 2015. **799**. P. 35.
13. Андреасян П. П., Михайлов Е. А., Андреасян А. П. // Астрон. журн. 2020. **97**. С. 179.
14. Beck R. // Astron. Astrophys. 1982. **106**. P. 121.
15. Mathewson D. S., van der Kruit P. C., Brouw W. N. // Astron. Astrophys. 1972. **17**. P. 468.
16. Моффат Г. К. // Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М., 1980.
17. Паркер Е. // Космические магнитные поля, их образование и проявления: в двух частях. М., 1982.
18. Соколов Д. Д. // УФН. 2015. **185**. С. 643.
19. Subramanian K., Mestel L. // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1993. **265**. P. 69.
20. Moss D. // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1995. **275**. P. 191.
21. Phillips A. // Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn. **94**. P. 135.
22. Moss D., Sokoloff D., Suleimanov V. // Astron. Astrophys. **588**. P. A18.
23. Михайлов Е. А., Соколов Д. Д., Ефремов Ю. Н. // Письма в Астрон. журн. **38**. С. 611.
24. Moss D. // Astronomy & Geophysics. 2012. **53**. P. 5.23.
25. Михайлов Е. А. // Письма в Астрон. журн. 2014. **40**. С. 445.
26. Moss D., Sokoloff D. // Astron. Astrophys. 2017. **598**. P. A72.
27. Садовничий В. А. // Теория операторов. М., 1986.
28. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Крацов В. В. // Лекции по математической физике. М., 1993.
29. Тихонов А. Н., Самарский А. А. // Уравнения математической физики. М., 1999.
30. Михайлов Е. А., Пушкарев В. В. // Астрофиз. бюлл. 2018. **73**. С. 431.
31. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. // Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., 1984.
32. Beck R. // Astron. Astrophys. 2007. **470**. P. 539.

The Spectral Decomposition of the Solution of the Problem of Generating Galactic Magnetic Fields in the No-z Approximation

E. A. Mikhailov

Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.

One of the most popular models for the generation of magnetic fields in galaxies is the no-z approximation in dynamo theory. It allows one to reduce the problem of the evolution of the magnetic field to solving a system of two equations for components that lie in the plane of the galactic disk. Usually, the study of such problems is carried out numerically. Moreover, in some cases, this system of equations gives us an opportunity to find an analytical solution, which makes it possible to answer a number of important fundamental questions. In this paper, a spectral decomposition of the solution of the corresponding problem is presented and the critical values of the dynamo numbers for various modes of the solution are determined.

Keywords: magnetic fields of galaxies, dynamo theory, spectral decomposition, Bessel functions.
PACS: 47.65.-d.

Received 13 June 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 5. Pp. 420–426.

Сведения об авторе

Михайлов Евгений Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.