Общее гармоническое решение в электродинамике с дилатоном: точное выражение для полей и обобщенная сила Лоренца

О. В. Кечкин,[1,2,a] П. А. Мошарев[3,4,б]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей ядерной физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), факультет № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», кафедра компьютерной математики. Россия, 121552, Москва, Оршанская ул., д. 3*

[3] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына. Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

[4] *Национальный исследовательский университет МЭИ, кафедра высшей математики. Россия, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14*

Поступила в редакцию 10.06.2020, после доработки 04.07.2020, принята к публикации 08.07.2020.

Найдено точное выражение для гармонических полей электродинамики Максвелла с дилатоном в терминах эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов Лежандра. Отдельно рассмотрен случай центральной симметрии полей и получены эффективные заряды всех трех типов: электрический, магнитный и дилатонный. Представлено выражение для обобщенной силы Лоренца, действующей на пробную электрически заряженную частицу в этих полях.

Ключевые слова: электродинамика с дилатоном, точные решения, эллиптические функции.
УДК: 53.01, 537.8. PACS: 11.10.Lm, 11.15.Kc.

ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА С ДИЛАТОНОМ И ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Дилатонное обобщение классической электродинамики Максвелла (дилатон-максвелловская электродинамика, ДМЭ) предсказано различными Теориями Великого объединения, — такими, как многомерная теория Калуцы—Клейна, супергравитация и теория суперструн [1–3]. Это нелинейная теория, в которой, кроме классических электрического и магнитного полей, предсказывается существование еще одного, нового скалярного поля — дилатона, взаимодействие которого с полями классической электродинамики в вакууме описывается лагранжианом следующего вида:

$$L = -\frac{1}{4}\,e^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi, \qquad (1)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля, A_μ — 4-потенциал электромагнитного поля ($\mu,\nu = 0,1,2,3$), ϕ — дилатон, а α — константа связи дилатонного и электромагнитного полей. При значении $\alpha = 0$ дилатон и электромагнитный сектор ДМЭ существуют независимо, не взаимодействуя друг с другом.

Поиск точных решений уравнений данной теории сильно осложнен их нелинейностью. На сегодняшний день получить точные решения удалось только в частном случае стационарных полей. Так, в работах [4–6] изложен метод построения точных решений с использованием теории симметрий, развитой для решения аналогичных задач в Общей теории относительности (ОТО). В работе [7] представлен метод, позволяющий находить точные решения ДМЭ, используя в качестве эталона известные стационарные аксиально-симметричные решения ОТО в вакууме, такие, как решение Керра. Наконец, в работе [8] найдено в квадратурах решение уравнений ДМЭ, описывающее поля, зависящие от одной гармонической функции (общее гармоническое решение), и рассмотрены несколько важных частных случаев. Впервые в этой работе было получено решение, включающее одновременно три ненулевых поля: электрическое, магнитное и дилатонное. Настоящая работа является прямым продолжением этой последней работы, обобщая и дополняя представленные в ней результаты.

В работе [8] было показано, что в случае стационарных полей система (1) описывается эффективным трехмерным лагранжианом

$$\mathcal{L}_3 = -2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2 + \frac{1}{2}e^{2\alpha\phi}(\nabla u)^2,$$

где $v = A_0$ — потенциал электрического поля, u — скалярный потенциал магнитного поля, определяемый соотношением

$$\nabla u = -e^{-2\alpha\phi}\nabla\times\ A.$$

Также было показано, что поля, зависящие от одной гармонической функции $\lambda = \lambda(x^k)$ (где $k = 1,2,3$), то есть $\phi = \phi(\lambda), u = u(\lambda), v = v(\lambda)$ при

$$\Delta\lambda = 0$$

удовлетворяют системе уравнений

$$e^{-2\alpha\phi}v' = C_1, \qquad (2)$$

$$e^{2\alpha\phi}u' = C_2, \qquad (3)$$

$$(\phi')^2 - \frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} - \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} = C_3, \qquad (4)$$

[a] E-mail: kechkin@sinp.msu.ru
[б] E-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru

где штрих означает производную по λ и C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные константы. В этом случае индукция магнитного поля может быть найдена по формуле

$$\mathbf{B} = -C_2 \nabla \lambda.$$

Это выражение полностью исчерпывает физический смысл магнитного потенциала u и позволяет нам в дальнейшем не интересоваться его явным видом.

Общее решение уравнения (4) дается интегралом

$$\lambda = \pm \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_1^2}{4} e^{2\alpha\phi} + \frac{C_2^2}{4} e^{-2\alpha\phi} + C_3}},$$

причем нас интересует результат в форме зависимости $\phi(\lambda)$, то есть функция, обратная к данному интегралу. В работе [8] интеграл был вычислен в трех частных случаях, в которых он выражается через элементарные функции. Это случай $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$, при котором решение описывает систему, содержащую одновременно три нетривиальных поля, а также случаи $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, соответствующие магнитостатике и электростатике в присутствии дилатона. В настоящей работе найдены явные выражения для полей при всех остальных способах выбора параметров C_1, C_2 и C_3.

Выполнив замену переменной $e^{\alpha\phi} = x$, приведем интеграл к виду

$$\lambda = \pm \frac{2}{\alpha |C_2|} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C_1^2}{C_2^2} x^4 + \frac{4C_3}{C_2^2} x^2 + 1}}. \tag{5}$$

Нашей целью является представление этого интеграла в виде нормального эллиптического интеграла Лежандра первого рода. Выбор замены переменной, которая позволит осуществить требуемое преобразование, зависит от входящих в интеграл параметров [9]. В связи с этим рассмотрим три возможных случая.

1. ПЕРВЫЙ КЛАСС РЕШЕНИЙ

Рассмотрим случай $4C_3^2 - C_1^2 C_2^2 > 0$, $C_3 < 0$. Для сокращения записи введем обозначения

$$\sqrt{\frac{-C_1^2}{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}} = A,$$

$$\frac{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}} = k^2.$$

Выполнив замену переменной

$$A\, x = z,$$

можно привести интеграл (5) к виду

$$\pm \frac{\alpha A |C_2|}{2} \lambda + \Lambda_0 = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \tag{6}$$

где Λ_0 — произвольная константа интегрирования. Правая часть полученного выражения представляет собой нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Обращением этого интеграла является одна из функций Якоби, известная под названием эллиптического синуса [10]:

$$z = \mathrm{sn}\left(\pm \frac{\alpha A |C_2|}{2} \lambda + \Lambda_0, k\right).$$

Теперь, производя обратную замену переменных, получим явное выражение для дилатонного поля согласно формуле

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{A} \cdot \mathrm{sn}\left(\pm \frac{\alpha A |C_2|}{2} \lambda + \Lambda_0, k\right). \tag{7}$$

Константу интегрирования Λ_0 можно зафиксировать, наложив естественное условие исчезновения поля ϕ при стремлении к нулю функции λ. Подставив значения $\phi = 0$ и $\lambda = 0$ в выражение (7), получим уравнение для определения константы Λ_0 следующего вида:

$$\mathrm{sn}\,(\Lambda_0, k) = A.$$

Учитывая тот факт, что эллиптический синус является обращением нормального эллиптического интеграла Лежандра первого рода, получим явное выражение для константы Λ_0:

$$\Lambda_0 = \int\limits_0^A \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \tag{8}$$

Далее решим уравнение (2) и найдем потенциал электрического поля $v(\lambda)$. Для этого необходимо вычислить интеграл следующего вида:

$$v(\lambda) = \frac{C_1}{A^2} \int\limits_0^\lambda \mathrm{sn}^2\left(\pm \frac{\alpha A |C_2|}{2} \lambda + \Lambda_0, k\right) d\lambda.$$

Пределы интегрирования выбраны здесь таким образом, чтобы сразу удовлетворить условию $v \to 0$ при $\lambda \to 0$. Это выражение может быть приведено к эквивалентной форме

$$v(\lambda) = -\frac{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1} \lambda \pm$$
$$\pm \frac{2\sqrt{-2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \int\limits_{\Lambda_0}^{\tau} \mathrm{dn}^2\,(\tau, k)\, d\tau,$$

где $\mathrm{dn}(\tau, k)$ — еще одна эллиптическая функция Якоби и введено обозначение $\tau = \pm \frac{\alpha A |C_2|}{2} \lambda + \Lambda_0$. Последний интеграл путем замены переменной $\mathrm{dn}^2(\tau, k) = 1 - k^2 y^2$ может быть приведен к виду нормального эллиптического интеграла Лежандра II рода согласно формуле

$$\int\limits_0^\tau \mathrm{dn}^2(\tau, k) d\tau = \int\limits_0^y \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} dy,$$

что позволяет нам записать окончательное выражение в следующем виде:

$$v(\lambda)=-\frac{2C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{C_1}\lambda\pm$$
$$\pm\frac{2\sqrt{-2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}}{\alpha C_1}\int\limits_A^{\mathrm{sn}(\tau,k)}\frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}dy.$$

Особый интерес для изучения представляют поля, создаваемые центрально-симметричным источником. Они описываются формулами, которые получаются при подстановке вместо функции λ общего центрально-симметричного решения уравнения Лапласа с нулевой асимптотикой на бесконечности — кулоновского потенциала $\lambda=\frac{q}{r}$, где q — произвольная константа. Подставляя это выражение для функции λ в формулы для потенциалов v и ϕ и раскладывая далее потенциалы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$ до первого порядка включительно, получим эффективные заряды для каждого из полей: электрический $q_e=C_1q$, магнитный $q_m=C_2q$ и дилатонный $q_\phi=\pm\frac{\sqrt{4C_3+C_1^2+C_2^2}}{2}q$. В терминах зарядов введенные ранее величины записываются следующим образом:

$$A=\sqrt{\frac{-2\,q_e^2}{4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2+\sqrt{(4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2)^2-4\,q_e^2q_m^2}}},$$

$$k^2=\frac{4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2+\sqrt{(4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2)^2-4\,q_e^2q_m^2}}{4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2-\sqrt{(4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2)^2-4\,q_e^2q_m^2}},$$

$$\tau=\pm\frac{\alpha A|q_m|}{2}\cdot\frac{1}{r}+\Lambda_0.$$

Соответствующие выражения для полей выглядят в этом случае так:

$$e^{\alpha\phi}=\frac{1}{A}\cdot\mathrm{sn}\,(\tau,k),$$

$$v(\lambda)=-\frac{4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2+\sqrt{(4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2)^2-4\,q_e^2q_m^2}}{2q_e}\frac{1}{r}\pm$$
$$\pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4\,q_\phi^2+q_e^2+q_m^2+\sqrt{(4q_\phi^2-q_e^2-q_m^2)^2-4\,q_e^2q_m^2}}}{\alpha q_e}\times\int\limits_A^{\mathrm{sn}(\tau,k)}\frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}dy,$$

где константа интегрирования Λ_0 вычисляется по прежней формуле (8).

Частные случаи, рассмотренные в работе [8], можно получить после некоторых преобразований при значении эллиптического модуля $k=1$, что соответствует $C_3=\frac{C_1C_2}{2}$ (или $q_\phi=\frac{q_e+q_m}{2}$), или $k=0$, что получается при равенстве нулю любой из констант C_1 или C_2.

2. ВТОРОЙ КЛАСС РЕШЕНИЙ

Рассмотрим случай $4C_3^2-C_1^2C_2^2>0$, $C_3>0$. Введем обозначения

$$\sqrt{\frac{C_1^2}{2C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}}=A,$$
$$\frac{2\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}=k^2.$$

Замена переменной

$$A\ x=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

приводит интеграл (5) к виду (6), откуда можно получить выражение для дилатонного поля ϕ следующего вида:

$$e^{\alpha\phi}=\frac{1}{A}\cdot\mathrm{sc}\left(\pm\frac{\alpha A|C_2|}{2}\lambda+\Lambda_0,k\right).$$

Здесь $\mathrm{sc}(\tau,k)$ — еще одна эллиптическая функция Якоби [10]. Накладывая дополнительное требование $\phi\to0$ при $\lambda\to0$, зафиксируем константу Λ_0 условием

$$\mathrm{sn}(\Lambda_0,k)=B,$$

для чего введено новое обозначение

$$B=\sqrt{\frac{C_1^2}{C_1^2+2\,C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}}.$$

Явное выражени для константы Λ_0 выглядит следующим образом:

$$\Lambda_0=\int\limits_0^B\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.\qquad(9)$$

Потенциал электрического поля $v(\lambda)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$v(\lambda)=\frac{C_1}{A^2}\int\limits_0^\lambda\mathrm{sc}^2\left(\pm\frac{\alpha A|C_2|}{2}\lambda+\Lambda_0,k\right)d\lambda.$$

Действуя по аналогии с первым разделом статьи, введем обозначение $\tau=\pm\frac{\alpha A|C_2|}{2}\lambda+\Lambda_0$ и приведем интеграл к стандартной форме, записав потенциал $v(r)$ в виде следующего выражения:

$$v(\lambda) = \pm \frac{2\sqrt{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \Bigg[\mathrm{dn}(\tau, k)\,\mathrm{sc}(\tau, k) - \\ - \sqrt{\frac{C_1^2}{C_2^2} \frac{C_2^2 + 2\ C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1^2 + 2\ C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}} - \int\limits_{\Lambda_0}^{\tau} \mathrm{dn}^2(\tau, k) d\tau \Bigg]$$

или, приведя интеграл к более привычной форме нормального эллиптичекого интеграла Лежандра, в следующем виде:

$$v(\lambda) = \pm \frac{2\sqrt{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \Bigg[\mathrm{dn}(\tau, k)\,\mathrm{sc}(\tau, k) - \\ - \sqrt{\frac{C_1^2}{C_2^2} \cdot \frac{C_2^2 + 2\ C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1^2 + 2\ C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}} - \\ - \int\limits_{B}^{\mathrm{sn}(\tau,k)} \frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}} dy \Bigg].$$

Рассматривая центрально-симметричные поля по аналогии с первым разделом статьи, вычислим эффективные заряды. Результат совпадает с полученным в первом разделе: $q_e = C_1 q$, $q_m = C_2 q$ и $q_\phi = \pm \frac{\sqrt{4C_3 + C_1^2 + C_2^2}}{2} q$. В терминах зарядов введенные ранее обозначения запишутся следующим образом:

$$k^2 = 2 \frac{\sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}, \quad B = \sqrt{\frac{2q_e^2}{4q_\phi^2 + q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}},$$

$$\tau = \pm \frac{\alpha |q_e q_m|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4\ q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}} \cdot \frac{1}{r} + \Lambda_0,$$

где константа Λ_0 вычисляется по формуле (9).

Выражения для полей в этом случае выглядят так:

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{\frac{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}{2q_e^2}} \cdot \mathrm{sc}\,(\tau, k),$$

$$v(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}}{\alpha q_e} \times \\ \times \left[\mathrm{dn}(\tau, k)\,\mathrm{sc}(\tau, k) - \sqrt{\frac{q_e^2}{q_m^2} \cdot \frac{4q_\phi^2 - q_e^2 + q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}{4q_\phi^2 + q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4\ q_e^2 q_m^2}}} - \int\limits_{B}^{\mathrm{sn}(\tau,k)} \frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}} dy \right].$$

Частные случаи, рассмотренные в работе [8], можно получить при значении эллиптического модуля $k = 0$, что соответствует $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$ (или $q_\phi = \frac{q_e + q_m}{2}$), или при $k = 1$, что получается при равенстве нулю любой из констант C_1 или C_2.

3. ТРЕТИЙ КЛАСС РЕШЕНИЙ

Рассмотрим, наконец, случай $4C_3^2 - C_1^2 C_2^2 < 0$. В этом случае удобно преобразовать интеграл (5), разложив на множители многочлен под корнем следующим образом:

$$\lambda = \pm \frac{2}{\alpha |C_1|} \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \frac{4C_3}{C_1^2} x^2 + \frac{C_2^2}{C_1^2}}} = \\ = \pm \frac{2}{\alpha |C_1|} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{|C_1|}\sqrt{|C_1 C_2| - 2\ C_3} \cdot x + \left|\frac{C_2}{C_1}\right|\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt{2}}{|C_1|}\sqrt{|C_1 C_2| - 2\ C_3} \cdot x + \left|\frac{C_2}{C_1}\right|\right)}}.$$

Выполним замену переменной

$$x = \sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|} \frac{h\sqrt{1-z^2} - z\ g}{h\sqrt{1-z^2} + z\ g},$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$h = \sqrt{2\sqrt{|C_1 C_2|} + \sqrt{2|C_1 C_2| - 4\ C_3}},$$
$$g = \sqrt{2\sqrt{|C_1 C_2|} - \sqrt{2|C_1 C_2| - 4\ C_3}}.$$

Эта замена приводит интеграл к виду нормального эллиптического интеграла Лежандра I рода:

$$\lambda = \mp \frac{4}{\alpha h^2} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

где $k^2 = 1 - \left(\frac{g}{h}\right)^4$. Отсюда, переходя к определенному интегралу, обозначая константу интегрирования Λ_0

и выполняя обратную замену переменной, получим решение для дилатонного поля ϕ в виде выражения

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|} \cdot \frac{1 - \frac{g}{h}\,\mathrm{sc}\left(\mp\frac{\alpha h}{4}\lambda + \Lambda_0, k\right)}{1 + \frac{g}{h}\,\mathrm{sc}\left(\mp\frac{\alpha h}{4}\lambda + \Lambda_0, k\right)}.$$

Константу интегрирования Λ_0 можно найти из уравнения

$$\mathrm{sn}(\Lambda_0, k) = B,$$

где введено обозначение

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(2 + \sqrt{2 - \frac{4C_3}{|C_1C_2|}}\right)(\sqrt{|C_1|} - \sqrt{|C_2|})^2}{|C_1| + |C_2| - \sqrt{2|C_1C_2| - 4\ C_3}}},$$

или в явном виде путем вычисления интеграла

$$\Lambda_0 = \int\limits_0^B \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Потенциал электрического поля $v(\lambda)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$v(\lambda) = C_1\left|\frac{C_2}{C_1}\right| \int\limits_0^\lambda \frac{\left[1 - \frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\mp\frac{\alpha h^2}{4}\lambda + \Lambda_0, k)\right]^2}{\left[1 + \frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\mp\frac{\alpha h^2}{4}\lambda + \Lambda_0, k)\right]^2} d\lambda.$$

Выполнив замену переменной $\mathrm{sn}\left[\frac{1}{2}(\mp\frac{\alpha h^2}{4}\lambda + \Lambda_0), k\right] = \xi$, интеграл в этом выражении можно привести к следующему виду:

$$v(\lambda) = C_1\sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|}\left\{\lambda \pm \frac{32g}{\alpha h^3} \int\limits_{\mathrm{sn}\left(\frac{\Lambda_0}{2}, k\right)}^{\mathrm{sn}\left[\frac{1}{2}(\mp\frac{\alpha h^2}{4}\lambda + \Lambda_0), k\right]} \frac{(1 - 2\xi^2 + k^2\xi^4)^2\,\xi d\xi}{(1 - 2\xi^2 + k^2\xi^4)^2 + 2\frac{g}{h}\xi\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2\xi^2} + \left(\frac{g}{h}\right)^2\xi^2(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}\right\}.$$

К сожалению, вычислить данный интеграл или свести его к какому-либо стандартному виду не удалось.

Рассматривая центарльно-симметричное решение, соответствующее выбору функции $\lambda = \frac{q}{r}$, в первом порядке по $\frac{1}{r}$, можем получить выражения для эффективных зарядов, соответствующих каждому из полей. Эти выражения совпадают с теми, которые были получены в предыдущих двух случаях: $q_e = C_1 q$, $q_m = C_2 q$ и $q_\phi = \pm\frac{\sqrt{4C_3 + C_1^2 + C_2^2}}{2}q$. Параметры, входящие в выражения для полей ϕ и v, выражаются через эффективные заряды следующим образом:

$$h = \frac{1}{q}\sqrt{2\sqrt{|q_e q_m|} + \sqrt{2|q_e q_m| - 4\ q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2}},$$

$$g = \frac{1}{q}\sqrt{2\sqrt{|q_e q_m|} - \sqrt{2|q_e q_m| - 4\ q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2}},$$

$$k^2 = 1 - \left(\frac{g}{h}\right)^4,$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(2 + \sqrt{2 - \frac{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2}{|q_e q_m|}}\right)(\sqrt{|q_e|} - \sqrt{|q_m|})^2}{|q_e| + |q_m| - \sqrt{2|q_e q_m| - 4\ q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2}}}.$$

Частные случаи, рассмотренные в работе [8], можно получить при значении эллиптического модуля $k = 1$, что соответствует $C_3 = \frac{C_1C_2}{2}$ (или $q_\phi = \frac{q_e + q_m}{2}$). При равенстве нулю какой-либо из констант C_1 или C_2 данное решение смысла не имеет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе завершено построение общего гармонического решения нелинейных уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном, начатое в работе [8]. Представлены явные выражения для потенциалов дилатонного и электрического полей в терминах эллиптических функций Якоби и нормальных эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода. Найдена индукция магнитного поля. Отдельно рассмотрен случай центрально-симметричных полей и вычислены эффективные электрический, магнитный и дилатонный заряды.

В дополнение к основному тексту статьи в Приложении приводятся выражения для обобщенной силы Лоренца, действующей на пробные заряженные частицы в этих полях. Соответствующее взаимодействие согласовано с принципом наименьшего действия, как это показано в работе [11].

До сих пор остается нерешенной задача поиска точных решений уравнений ДМЭ, описывающих поля, зависящие от времени. Одним из самых интересных вопросов в этом направлении является вопрос описания электромагнитных, а также электродилатонных или магнитодилатонных плоских и сферических волн в пространстве.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ОБОБЩЕННАЯ СИЛА ЛОРЕНЦА

В работе [11] было показано, что движение пробной точечной частицы с электрическим зарядом в полях ДМЭ может быть описано исходя из принципа наименьшего действия. Также там было показано, что классическое выражение для силы Лоренца в присутствии дилатона должно быть заменено на формулу следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathscr{P}\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\right) - \\ - \mathscr{L}\left(\gamma^{-1}\nabla\phi + \gamma(\dot{\phi} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\phi))\mathbf{v}\right),$$

где $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\mathbf{v})^2}$, $\mathbf{E} = -\nabla v$, точкой обозначена производная по времени, а функции

$\mathscr{P}$ и $\mathscr{L}$ определены формулами

$$\mathscr{P} = \frac{-\varkappa e^{-(b+\alpha)\phi}}{\sqrt{1+\varkappa^2 e^{-2\,b\phi}}},$$
$$\mathscr{L} = b+\alpha - \frac{b\varkappa^2 e^{-2\,b\phi}}{1+\varkappa^2 e^{-2\,b\phi}},$$

где b и $\varkappa$ являются произвольными константами; подробнее их природа обсуждается в работе [11].

Подставляя в эту формулу выражения для полей $v(\lambda)$ и $\phi(\lambda)$, найденные в разд. 1, получаем точное выражение для обобщенной силы Лоренца, действующей на частицу в этих полях:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\varkappa}{A^{-\frac{b+\alpha}{\alpha}}\,\mathrm{sn}^{\frac{b+\alpha}{2\alpha}}(\tau,k)} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{\varkappa^2}{A^{-\frac{2b}{\alpha}}\,\mathrm{sn}^{\frac{2b}{\alpha}}(\tau,k)}\right)^{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \left(\frac{C_1}{A^2}\,\mathrm{sn}^2(\tau,k)\nabla\lambda + C_2[\dot{\mathbf{r}}\times\nabla\lambda]\right) \mp$$
$$\mp \left(b+\alpha - \frac{b\varkappa^2}{A^{-\frac{2b}{\alpha}}\,\mathrm{sn}^{\frac{2b}{\alpha}}(\tau,k)+\varkappa^2}\right) \times$$
$$\times \frac{A|C_2|}{2}\frac{\mathrm{cn}(\tau,k)\,\mathrm{dn}(\tau,k)}{\mathrm{sn}(\tau,k)} \cdot \left(\gamma^{-1}\nabla\lambda + \gamma(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\lambda)\dot{\mathbf{r}}\right).$$

Обозначения всех величин, входящих в эту формулу, введены в разд. 1

Соответствующее выражение для силы, действующей на пробную частицу в полях, найденных в разд. 2, может быть записано в виде следующей формулы:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\varkappa}{A^{-\frac{b+\alpha}{\alpha}}\,\mathrm{sc}^{\frac{b+\alpha}{2\alpha}}(\tau,k)} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{\varkappa^2}{A^{-\frac{2b}{\alpha}}\,\mathrm{sc}^{\frac{2b}{\alpha}}(\tau,k)}\right)^{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \left(\frac{C_1}{A^2}\,\mathrm{sc}^2(\tau,k)\nabla\lambda + C_2[\dot{\mathbf{r}}\times\nabla\lambda]\right) \mp$$
$$\mp \left(b+\alpha - \frac{b\varkappa^2}{A^{-\frac{2b}{\alpha}}\,\mathrm{sc}^{\frac{2b}{\alpha}}(\tau,k)+\varkappa^2}\right) \times$$
$$\times \frac{A|C_2|}{2}\frac{\mathrm{dn}(\tau,k)}{\mathrm{cn}(\tau,k)\,\mathrm{sn}(\tau,k)} \cdot \left(\gamma^{-1}\nabla\lambda + \gamma(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\lambda)\dot{\mathbf{r}}\right).$$

Наконец, сила, действующая на пробную частицу, движущуюся в полях, найденных в разд. 3, представлена следующим выражением:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\varkappa}{\left|\dfrac{C_2}{C_1}\right|^{\frac{b+\alpha}{2\alpha}}\left(\dfrac{1-\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}{1+\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}\right)^{\frac{b+\alpha}{\alpha}}} \times$$
$$\times \frac{1}{\left(1+\dfrac{\varkappa^2}{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|^{\frac{b}{\alpha}}\left(\frac{1-\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}{1+\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}\right)^{\frac{2b}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \left(C_1\left|\frac{C_2}{C_1}\right|\left(\frac{1-\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}{1+\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}\right)^2\nabla\lambda + C_2[\dot{\mathbf{r}}\times\nabla\lambda]\right) \mp$$
$$\mp \left(b+\alpha - \frac{b\varkappa^2}{\left|\dfrac{C_2}{C_1}\right|^{\frac{b}{\alpha}}\left(\dfrac{1-\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}{1+\frac{g}{h}\,\mathrm{sc}(\tau,k)}\right)^{\frac{2b}{\alpha}}+\varkappa^2}\right) \times$$
$$\times \frac{gh^3}{2}\frac{\mathrm{dn}(\tau,k)}{h^2\cdot\mathrm{cn}^2(\tau,k) - g^2\cdot\mathrm{sn}^2(\tau,k)} \times$$
$$\times \left(\gamma^{-1}\nabla\lambda + \gamma(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\lambda)\dot{\mathbf{r}}\right).$$

В последней формуле, по аналогии с предыдущими разделами, введено обозначение $\tau = \mp\frac{\alpha h^2}{4}\lambda + \Lambda_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Overduin J. M., Wesson P. S.* // Phys. Rept. 1997. **283**. P. 303
2. *Berman D. S., Thompson D. C.* // Phys. Rept. 2014. **566**, № 1.
3. *Youm D.* // Phys. Rept. 1999. **316**, 1.
4. *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // International Journal of Modern Physics A. 2016. **31**, N 23. P. 1650127.
5. *Kechkin O. V., Mosharev P. A.* // Modern Physics Letters A. 2016. **31**, N 31. P. 1650169.
6. *Кечкин О. В., Мошарев П. А.* // Труды XVI Межвузовской научной школы молодых специалистов «Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине». 2015.
7. *Кечкин О. В., Денисова И. П., Мошарев П. А.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2019. № 3. 1930406.
8. *Кечкин О. В., Мошарев П. А.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2019. № 6. С. 1960102.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб. 2016.
10. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Ч.2. М. 1963.
11. *Denisova I. P., Kechkin O. V.* // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2018. **15** N 5. P. 464.

A General Harmonic Solution in Dilaton Electrodynamics: An Exact Expression for the Fields and the Generalized Lorentz Force

O. V. Kechkin[1,2,a], **P. A. Mosharev**[3,4,b]

[1]*Department of General Nuclear Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[2]*Department No 8 «Information Technologies and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University). Moscow, 121552 Russia.*
[3]*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
[4]*Department of Higher Mathematics, National Research University «Moscow Power Engineering Institute». Moscow 111250, Russia.*
E-mail: [a]*kechkin@sinp.msu.ru,* [b]*moscharev.pavel@physics.msu.ru.*

An exact expression is obtained for harmonic fields in Maxwell electrodynamics with dilatons in terms of elliptic Jacobi functions and elliptic Legendre integrals. The case of centrally symmetric fields is considered individually and effective charges of all three types, that is, electric, magnetic, and dilaton charges, are calculated. An expression is given for the generalized Lorentz force that acts on a test electrically charged particle in these fields.

Keywords: electrodynamics with dilaton, exact solutions, elliptic functions.
PACS: 11.10.Lm, 11.15.Kc.
Received 10 June 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 5. Pp. 427–433.

Сведения об авторах

1. Кечкин Олег Вячеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-25-58, e-mail: kechkin@sinp.msu.ru.
2. Мошарев Павел Александрович — e-mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru.