Энтропия гравитирующего тела

А. В. Белинский,[a] М. Х. Шульман
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 13.04.2020, после доработки 29.04.2020, принята к публикации 08.06.2020.

Предложено обобщение зависимости для энтропии «обычных» массивных тел с относительно небольшой энтропией мысленного горизонта охватывающей поверхности на случай черных дыр (ЧД). При этом естественным образом обосновывается природа знаменитого «предела Бекенштейна» — универсального предела для энтропии — и определяются поправки к значениям «гравитационной» температуры поверхности для всего спектра астрофизических объектов.

Ключевые слова: черная дыра, энтропия, температура, плотность, термодинамика, поверхностная гравитация, гравитационный коллапс, предел Бекенштейна, температура Хокинга, температура Унру, дальнодействие.
УДК: 524. PACS: 95.30.-k.

ВВЕДЕНИЕ

В начале 1970-х годов группа космологов-релятивистов осуществила революционный прорыв в понимании термодинамики ЧД [1]. Бекенштейн [2] на основании результата Хокинга о неубывании абсолютного горизонта событий отождествил энтропию ЧД с площадью поверхности этого горизонта. Еще раньше сначала Зельдович [3], а значительно позже, вопреки своим первоначальным представлениям, и сам Хокинг [4, 5] показали, что ЧД должна излучать как абсолютно черное тело, обладающее соответствующей температурой. Эти идеи с большим недоверием и лишь постепенно воспринимались остальным сообществом космологов.

Огромная энтропия ЧД, по мнению Бекенштейна [6, 7], возникает потому, что состояние ЧД не дает информации о том, вследствие роста какой именно системы она образовалась. Энтропия ЧД рассматривается как максимально возможная величина энтропии для объектов данной массы — предел Бекенштейна, хотя строгого доказательства этого утверждения так и не было дано.

Термодинамика ЧД с колоссальной величиной присущей им энтропии обычно воспринимается физиками как некая экзотика, не имеющая аналогии с термодинамикой обычных объектов. В данной работе мы показываем, что возможен «плавный» переход от обусловленной гравитацией термодинамики «обычных объектов» к ЧД, и обосновываем знаменитый «предел Бекенштейна» — он действительно дает верхнюю границу энтропии гравитирующего объекта.

Энтропия обычного макроскопического тела во многих случаях может быть найдена исходя из термодинамического описания, когда используются макроскопические, а не микроскопические параметры состояния [8–11]. Именно поэтому и возникает неопределенность состояния. Его конкретное микросостояние неизвестно, да и не всегда существует в течение длительного промежутка времени.

Часто взаимодействием между взаимно удаленными частями макроскопической системы, например молекулами в капле воды или в сосуде с газом, можно пренебречь, потому что межмолекулярные силы по природе своей короткодействующие. Энтропия таких систем складывается из энтропии всех ее подсистем, иначе говоря, она аддитивна по объему, т. е. является экстенсивной величиной. Разобьем, в частности, находящееся в равновесии тело на макроскопические подсистемы, для которых равновесная температура имеет одно и то же значение T. Тепловая энергия $E_{\text{макр}}$ равна

$$E_{\text{макр}} = T\sum_V \Delta S_i = TS_{\text{макр}},$$

где ΔS_i — энтропия *объема* i-й подсистемы, $S_{\text{макр}}$ — энтропия макроскопического тела, аддитивная по объему.

Однако не все системы могут быть описаны обычной больцмановской термодинамикой, например облако межзвездной пыли достаточно больших размеров или аналогичный крупный космологический объект. Если мы мысленно разобьем облако на части, то эти части будут взаимодействовать не по границам соприкосновения, а полностью всеми объемами, т. е. каждая часть будет «чувствовать» всю систему целиком, все другие части. По этой причине, например, в гравитирующих системах очень сильно нарушается термодинамическая аддитивность: такую систему нельзя разбить на приблизительно независимые подсистемы. Энтропия в таких системах не будет обладать свойством аддитивности по объему.

Тем не менее источники гравитационного поля обладают сходными свойствами с вышеописанными «макроскопическими» системами. В частности, для их описания можно подобрать макроскопические параметры, аналогичные понятиям температуры и энтропии. Более того, эти новые термодинамические параметры эффективно переходят в параметры, используемые в предельном случае для таких гравитационных объектов, как ЧД.

Каковы же природа и свойства энтропии гравитирующих объектов? Верлинде предположил, что связь между тяготением и энтропией может существовать для «обычных» массивных тел, далеких от гравитационного коллапса, а не только для ЧД [12]. Он ввел для каждого такого тела представление о гипотетическом сферическом экране, окружающем это тело и несущем информацию о нем, и предположил,

[a] E-mail: belinsky@physics.msu.ru

что силы гравитации имеют не фундаментальный, а вторичный характер, будучи в точности обусловленными по величине возникающим градиентом энтропии при изменении радиуса гипотетического экрана. В результате Верлинде пришел к прямой пропорциональности между энтропией S и площадью A сферы, ограничивающей тело.

Однако допущение о присутствии подобного «виртуального» экрана, несущего информацию, не представляется обоснованным (см., в частности, интересную статью [13]). С другой стороны, наличие несомненной связи между гравитацией и энтропией вовсе не должно быть обусловлено первичностью именно энтропии. Например, авторы работы [14] показывают, что правомерна и другая точка зрения: термодинамическое уравнение состояния выводится из уравнений теории тяготения.

1. ЭНТРОПИЯ ОБЪЕКТА С ГРАВИТАЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ МЕЖДУ ЕГО ЧАСТЯМИ

Гипотезе Верлинде мы противопоставляем противоположное утверждение: первичны не энтропийные силы, а гравитационные, и гравитационное поле должно создавать условия для возникновения градиентов энтропии не только в случае ЧД, но и в случае «обычных» массивных тел.

Исаак Ньютон в 1687 г. опубликовал широко используемую «теорему об оболочке — shell theorem» [15], согласно которой «сферически симметричное тело влияет на внешние объекты гравитационно так, как если бы вся его масса была сконцентрирована в центральной точке данного тела». Поэтому и возникает макроскопическая неопределенность: сила тяготения, действующая на пробное тело на расстоянии r от центра масс однородного и симметричного источника тяготения, не зависит от того, как именно распределена масса M источника внутри мысленной сферы радиуса r. (Понятно, что достаточно редко «обычные» тела обладают идеальной симметрией и однородностью. Отклонение от однородности и симметрии могут привести к смещению положения центра масс и «деформации» замкнутых эквипотенциальных поверхностей поля тяготения по сравнению со сферическими, однако этими эффектами, как правило, можно пренебречь на расстояниях от центра, превышающих несколько диаметров тела.) Но подобная неопределенность связана с возникновением энтропии, когда разные конфигурации подсистем соответствуют одному и тому же «макроскопическому» описанию системы для внешнего наблюдателя.

Приведем основные параметры объекта — источника гравитации с массой Mи радиусом r описанной вокруг объекта мысленной сферической оболочки.

Средняя плотность ρ материи в объекте:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}. \tag{1}$$

Поверхностный гравитационный заряд (surface gravity) κ, т. е. величина гравитационного ускорения, испытываемого малой пробной частицей на условной внешней сферической охватывающей оболочке:

$$\kappa = \frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r^3}{3r^2} = \frac{4\pi G\rho r}{3}, \tag{2}$$

где G — гравитационная постоянная. Соотношение (2) определяет не что иное, как, например, ускорение частицы в поле тяготения планеты.

Поверхностная температура (в эргах) $\Theta = k_B \cdot T$ на условной внешней сферической охватывающей оболочке, или полная энергия тела, отнесенная к площади A поверхности оболочки:

$$\Theta = k_B T = \frac{Mc^2}{A} = \frac{Mc^2}{4\pi r^2} = \frac{GM}{r^2}\frac{c^2}{4\pi G} = \kappa\frac{c^2}{4\pi G}. \tag{3}$$

Здесь $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, T — температура в кельвинах.

Как видно из соотношений (2) и (3), гравитационный заряд и поверхностная температура пропорциональны друг другу. Если учесть, что планковскую длину $l_p = 1.6 \cdot 10^{33}$ см можно представить в виде

$$l_p = \sqrt{\hbar G/c^3},$$

где $\hbar$ — редуцированная постоянная Планка, то соотношение (3) можно привести к виду, который будет использован в дальнейшем:

$$T = \kappa\frac{c^2}{4\pi G k_B} = \kappa\frac{\hbar c^2/c^3}{4\pi(\hbar G/c^3)k_B} = \frac{\hbar\kappa}{\pi c k_B}\frac{1}{4l_p^2}. \tag{4}$$

И последний параметр — энтропия источника гравитации. При ее анализе важно иметь в виду следующее обстоятельство. Подобно тому, как для «макроскопической» системы в состоянии равновесия мы принимали объемную температуру T одинаковой для всех ее подсистем, в данном случае, исходя из теоремы об оболочке, мы приняли ее поверхностный аналог T одинаковым для каждого участка поверхности A сферы. На первый взгляд, данный тезис кажется тривиальным. Однако в этой связи уместно вспомнить «гипотезу об обруче» [1] — определенную альтернативу теореме об оболочке Ньютона: схлопывающийся объект образует ЧД тогда и только тогда, когда этот объект можно полностью поместить в критическую сферу — «обернуть обруч» вокруг объекта. Следовательно, в случае недостаточно компактного и симметричного объекта может не существовать состояния с одной и той же поверхностной температурой. Но если можно окружить объект сферой, то, согласно (3) и упрощенному выражению

$$dE = \frac{E}{A}dA = TdA,$$

площадь сферы с точностью до коэффициента играет роль энтропии, и полная энтропия, соответствующая такой сфере, является аддитивной относительно поверхности сферы, т. е. складывается из величин энтропий частичных площадок на поверхности сферы.

Наконец, следуя примеру Бекенштейна, рассмотрим падение пробной частицы на источник поля тяготения. Пусть пробная частица пересекает мысленную

Таблица. Отношение ρ/ρ_0 для различных астрофизических объектов

Объект	Масса M, кг	Радиус r, м	Гравитационный радиус r_0, м	$(\rho/\rho_0) = (R_0/r)^3$	$(\kappa/\kappa_0) = (\Theta/\Theta_0) = (R_0/r)^2$
Земля	$6 \cdot 10^{24}$	$6 \cdot 10^{6}$	10^{-2}	$\sim 10^{-26}$	$\sim 10^{-18}$
Солнце	$2 \cdot 10^{30}$	$7 \cdot 10^{8}$	$3 \cdot 10^{3}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-10}$
Млечный Путь	$3 \cdot 10^{42}$	$\sim 10^{19}$	$\sim 10^{15}$	$\sim 10^{-12}$	$\sim 10^{-8}$
Вселенная	$\sim 10^{53}$	$\sim 10^{26}$	$\sim 10^{26}$	~ 1	~ 1

сферу определенного радиуса r, окружающую источник, в данном случае — не ЧД. Для другой пробной частицы вне этой сферы дело выглядит так, как будто масса источника увеличилась за счет первой пробной массы и, соответственно, увеличилось число возможных конфигураций распределения массы внутри указанной сферы. То есть первая пробная масса привносит в сферу связанную с ней энтропию, что в точности напоминает ситуацию с ЧД.

2. ЧД И ПРЕДЕЛ БЕКЕНШТЕЙНА

Итак, как было отмечено в разд. 1, в первой половине 70-х годов произошла цепочка событий, приведших к пониманию термодинамики ЧД, в частности к идее Зельдовича и позже Хокинга об излучении ЧД, как если бы ее горизонт событий имел конечную температуру, пропорциональную поверхностной гравитации ЧД. Бекенштейн установил, что ЧД должны обладать огромной энтропией S_0, пропорциональной площади A_0 ограничивающей их сферы — горизонта событий [2]:

$$S_0 = \frac{A_0}{4l_p^2}.$$

Приведем соотношения для ρ_0, κ_0 и $\Theta_0 = k_B T_0$, записанные непосредственно для ЧД массы M, гравитационный шварцшильдовский радиус которой, как известно, равен [16]

$$R_0 = \frac{2MG}{c^2}.$$

Критическая плотность ρ_0 материи в сколлапсировавшем объекте:

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R_0^3}. \tag{5}$$

Поверхностный гравитационный заряд (surface gravity) κ_0, т. е. величина гравитационного ускорения на горизонте событий ЧД равна

$$\kappa_0 = \frac{GM}{R_0^2} = \frac{4\pi G\rho_0 R_0}{3}. \tag{6}$$

Поверхностная температура $\Theta_0 = k_B T_0$ на горизонте событий ЧД:

$$\Theta_0 = k_B T_0 = \kappa_0 \frac{c^2}{4\pi G}. \tag{7}$$

Сравнивая формулы (1)–(3) и (5)–(7), видим, что

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{R_0^3}{r^3},$$

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{R_0^2}{r^2}.$$

Заметим, что из формулы (2) вытекает существование ускорения κ для пробной частицы в поле тяготения произвольного объекта. В силу принципа эквивалентности отсюда немедленно следует эффект Унру [17], т. е. существование теплового излучения с соответствующей температурой T (см. выражение (4)) в ускоряющейся системе отсчета, а само это ускорение κ отождествляется с ускорением Унру.

Хотя и принято связывать эффект Унру с квантовой теорией вакуума, в нашем случае она не понадобилась. Достаточен учет того простого факта, что ускоренный заряд в пространстве, окружающем источник гравитации, всегда излучает, черпая энергию из гравитационного поля. Более того, ускорение κ и температура T Унру плавно переходят в ускорение κ_0 и температуру T_0 Зельдовича—Хокинга на горизонте событий ЧД.

3. УНИФИКАЦИЯ ОПИСАНИЯ «ОБЫЧНОГО» ТЕЛА И ЧД

Выше мы получили для энтропии произвольного источника тяготения такую же пропорциональность площади его поверхности, а не объему, как и для ЧД. Сходный результат получил и Верлинде для энтропии голографического горизонта, однако это привело к фундаментальному парадоксу, который заметил и сам Верлинде: если коэффициент пропорциональности для «обычного тела» взять одним и тем же, то энтропия ЧД оказывается намного меньше энтропии обычного тела, поскольку гравитационный радиус этого тела при заданной массе M до достижения коллапса много меньше фактического!

В чем же причина этого парадокса? Дело в том, что при вычислении температуры источника тяготения мы фактически пользовались соотношением вида

$$\frac{1}{\Theta} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V,$$

где производная энтропии S по энергии E вычисляется при *постоянном* объеме V [18]. Но мы рассматриваем процесс приближения к коллапсу тела заданной массы M, характеризуемый изменяющейся плотностью $\rho = M/V$, причем это изменение никак нельзя считать малым. В таком случае мы должны учесть и изменение объема в выражении для температуры Θ. Этот учет может быть осуществлен введением некого множителя, зависящего от величины (ρ/ρ_0). Раскладывая этот множитель в ряд по степеням данной величины, ограничимся членом первого порядка, т. е. фактически приравняем данный множитель самой этой величине. Ясно, что для ЧД это ничего не меняет, а для «обычного» тела, например астрофизического объекта, уменьшает эту энтропию на много порядков (см. таблицу).

Отметим также, что обычно и множитель $1/4l_p^2$ переносят из выражения для температуры в выражение для площади A поверхности ограничивающей сферы, придавая, таким образом, энтропии безразмерную форму. Поэтому окончательную формулу для энтропии гравитационного происхождения мы предлагаем писать в виде

$$S \approx \frac{\rho}{\rho_0}\frac{A}{4l_p^2}.$$

Знак приближения здесь возникает потому, что мы ограничились первым порядком степенного разложения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги работы. Итак, для любой массивной частицы естественным образом возникает градиент энтропии, направленный вдоль радиуса поля тяготения. В этом смысле связь между «фундаментальной» силой и энтропией вовсе не является привилегией гравитационного взаимодействия, поэтому концепция Верлинде представляется несостоятельной.

Унификация выражения энтропии для обычных объектов и ЧД с помощью формулы (3) основана на линейном приближении неизвестной точной зависимости от (ρ/ρ_0) и позволяет описывать как «обычные» состояния массивных тел с относительно небольшой энтропией мысленного горизонта охватывающей поверхности, так и состояние ЧД с огромной энтропией на горизонте событий. При этом естественным образом объясняется и обосновывается природа знаменитого «предела Бекенштейна» — универсального предела для энтропии — и определяются поправки к значениям «гравитационной» температуры поверхности для всего спектра астрофизических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Торн К. С.* Черные дыры и складки времени: Дерзкое наследие Эйнштейна. М.: Издательство физико-математической литературы, 2007. С. 616. (*Thorn K. S.* Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy. New York: W. W. Norton Publishers, 1994. P. 619.)
2. *Bekenstein J. D.* // Phys. Rev. D. 1973. **7**, N 8. P. 2333.
3. *Зельдович Б. Я.* // ЖЭТФ. 1972. **62**. С. 2076.
4. *Bardeen J. M., Carter B., Hawking S. W.* // Commun. Math. Phys. 1973. **31**. P. 161; *Hawking S. W.* // Nature. 1974. **248**, March 1. P. 30.
5. *Hawking S. W.* // Commun. Math. Phys. 1975. **43.** P. 199.
6. *Bekenstein J. D.* // Contemp. Phys. 2003. **45**. P. 31.
7. *Bekenstein J. D.* // Lett. Nuovo Cimento. 1972. **4.** P. 737.
8. *Гиббс Дж. В.* Основные принципы статистической механики. М., Л.: ОГИЗ — Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. С. 204.
9. *Гельфер Я. М.* История и методология термодинамики и статистической физики, 2-е изд. М.: Высш. школа, 1981.
10. *Гельфер Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И.* Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. С. 272.
11. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. **2**. М.: Наука, 1990. С. 591.
12. *Verlinde E. J.* // High Energ. Phys. 2011.
13. *Yun Soo Myung, Hyung Won Lee, Yong-Wan Kim* // Entropic force versus temperature force. arXiv: 1006.1922v1 [hep-th] 9 Jun 2010.
14. *Porcelli F., Scibona G.* // On the Black Hole's Thermodynamics and the Entropic Origin of Gravity. arXiv: 1011.0895.
15. *Newton I.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London. 1687. Theorem XXXI.
16. *Новиков И. Д., Фролов В. П.* Физика черных дыр. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. С. 328.
17. *Unruh W. G.* // Phys. Rew. D. 1976. **14**, N 4. P. 870.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. **V**. Статистическая физика, ч. 1. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. С. 584.

The Entropy of a Gravitating Body

A. V. Belinskii[a], M. Kh. Shulman

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]belinsky@physics.msu.ru.

This paper proposes a generalization of the dependence for the entropy of «ordinary» massive bodies with a relatively small entropy of the event horizon of the covering surface to the case of black holes (BH). By doing this, the nature of the famous Bekenstein bound, that is, the universal limit for entropy, is immediately explained and corrections to the values of the «gravitational» surface temperature are determined for the entire spectrum of astrophysical objects.

Keywords: black hole, entropy, temperature, density, thermodynamics, surface gravity, gravitational collapse, Bekenstein limit, Hawking temperature, Unruh temperature, action at a distance.
PACS: 95.30.-k.
Received 13 April 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 5. Pp. 496–500.

Сведения об авторах

1. Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, профессор; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@physics.msu.ru.
2. Шульман Михаил Хананович — e-mail: shulman@dol.ru.